微分積分学第一
講義ノート

東京工業大学 全学科目
2011年度前期

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

1　多変数関数

■記号　実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表すことにする[*1]．さらに，正の整数 n に対して，n 個の実数の組全体の集合を $\boldsymbol{R}^n$ と書く[*2]：

$$\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1, \dots, x_n \in \boldsymbol{R}\}.$$

とくに $\boldsymbol{R}$ は数直線，$\boldsymbol{R}^2$ は座標平面，$\boldsymbol{R}^3$ は座標空間とみなすこともできる．集合 $\boldsymbol{R}^n$ の要素のことを "$\boldsymbol{R}^n$ の点" と呼んだりする．

■多変数関数　集合 $\boldsymbol{R}^n$ のある範囲 D （すなわち D は $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合[*3]) 上の各点 $(x_1, \dots, x_n)$ に対して実数 $f(x_1, \dots, x_n)$ を対応させる規則 f を D 上で定義された**関数**という[*4]．とくに $n \geqq 2$ のとき**多変数関数**，それに対して $n = 1$ のとき (高等学校で学んだ関数) を **1 変数関数**と言うことがある．「f は $D \subset \boldsymbol{R}^n$ 上で定義された関数である」ということを

$$f\colon D \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

と書く．

例 1.1. 点 $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと f は $\boldsymbol{R}^2$ 上で定義された関数である: $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$[*5]．この規則を

$$f\colon \boldsymbol{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \in \boldsymbol{R}$$

などと書くことがある[*6]．とくに

$$f(0, 0) = 0, \qquad f(1, 0) = 1, \qquad f(-1, -1) = \sqrt{2}$$

である．

例 1.2. 東経 x 度，北緯 y 度の地点の標高を $f(x, y)$m とすると，$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である．たとえば

$$f(\text{富士山頂の経度}, \text{富士山頂の緯度}) = \text{富士山の標高}$$

である．

例 1.3. いまこの瞬間の，東経 x 度，北緯 y 度の地点の地表における気圧を $f(x, y)$hPa とすれば，$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である．

2011 年 4 月 6 日 (2011 年 4 月 13 日訂正)

[*1] 太字の "R"．手で書くときは $\mathbb{R}$ のように書くのが普通．テキストではこれを用いている．

[*2] "$x \in \boldsymbol{R}$" は "x は集合 $\boldsymbol{R}$ の要素" と読む．この場合は "x は実数" と同義．

[*3] "$D \subset \boldsymbol{R}^n$" と書く．この授業では D としてあまり変な部分集合は考えない．D を $\boldsymbol{R}^n$「領域」(ちゃんとした定義のある言葉である) とするのが妥当だが，その定義を述べるのにはすこし手間がかかるので，いまはあまり気にしないことにする．テキスト 7 ページ，脚注 4 参照．

[*4] テキストでは「函数」と表している．本来は「函」が正しいのだが，最近は「関」が多数派．

[*5] 2 変数関数の場合，$\boldsymbol{R}^2$ の点を (x_1, x_2) と書くかわりに (x, y) と書くことがある．このとき "$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である" ということもある．この講義では，簡単のため，主に 2 変数関数を扱うが，ほとんどの場合，一般の多変数関数に拡張することは容易である．

[*6] 矢印 "$\to$" と "$\mapsto$" の使い分けに注意．

■グラフと等高線　2 変数関数 $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ $(D \subset \boldsymbol{R}^2)$ に対して，$\boldsymbol{R}^3$ の部分集合

$$\{\bigl(x, y, f(x,y)\bigr) \mid (x,y) \in D\}$$

を f の**グラフ**という．関数 f が "性質のよい" 関数ならばそのグラフは座標空間 $\boldsymbol{R}^3$ の曲面になる．

一方，2 変数関数 $f\colon D \to \boldsymbol{R}$ と定数 c に対して，集合

$$\{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\}$$

を，関数 f の高さ c の**等高線**という．

2 変数関数のグラフや等高線は関数の変化の様子を表しているといってよい．

■スカラ場　例 1.2, 1.3 のように，関数 f が「座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ の各点に対して実数が対応している」とみなせるとき，f を $\boldsymbol{R}^2$ 上の**スカラ場**[*7] または平面のスカラ場という．同様に，3 変数関数が，座標空間の各点にたいして実数を対応させているとみなせるとき，空間のスカラ場という．

問題

1-1 身の回りの現象の中で，2 変数関数，3 変数関数. . . で表されるものの具体例を挙なさい．

1-2 身の回りで，平面のスカラ場，空間のスカラ場とみなせる量の具体例を挙げなさい．

1-3 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \bigl((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0) \text{ のとき}\bigr) \end{cases}$$

に対して，次の値を求めなさい:

- $f(0,0)$, $f(1,1)$, $f(1,2)$, $f(1,3)$.
- $f(2,4)$, $f(3,6)$, $f(4,8)$.
- $f(a, ma)$ (m は定数, a は 0 でない定数).

1-4 例 1.1 の関数 f のグラフを描きなさい．また，高さ 1, 2, 3 . . . の等高線を描きなさい．

1-5 関数 $f(x,y) = x^2 - y^2$ のいろいろな高さの等高線を描きなさい．また，この関数のグラフを描きなさい．

1-6 例 1.2, 1.3 の関数 f の等高線は何か．また，例 1.2 の関数 f のグラフは何か．

1-7 問題 1-3 の関数 f の等高線を描きなさい．

1-8 次のような意見に対して，有効な反論をなるべくたくさん挙げなさい：

> 3 変数関数, 4 変数関数 . . . のグラフは描くことができない．したがって，このような関数を考えることに実用的な意味はない．

[*7] Scalar field. 「スカラー場」と書くこともある．

2　偏微分

2.1　一変数関数の微分 (復習)

区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ 上で定義された一変数関数 f と $a \in I$ に対して極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2.1}$$

が存在するとき，f は a で**微分可能**であるといい，極限値 (2.1) を f の a における**微分係数**とよんで $f'(a)$ で表す．定義域 I 上のすべての点で f が微分可能ならば，新しい関数

$$f' \colon I \ni x \longmapsto f'(x) \in \boldsymbol{R}$$

が定まる．これを f の**導関数**とよぶ．

例 2.1.

- $f(x) = |x|$ で与えられる関数 f は $x = 0$ で微分可能でない．
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $(x \in \boldsymbol{R})$ で与えられる関数 f は $x = 0$ で微分可能でない．f のグラフは滑らかな曲線であることに注意しよう．
- 正の実数 α に対して

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる関数 f は $\alpha > 1$ のとき 0 で (したがって $\boldsymbol{R}$ で) 微分可能で，

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin\dfrac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる．

微分可能な関数 f を $y = f(x)$ と書き表したとき，

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

と書くことがある．この記号は，合成関数・逆関数の微分公式を覚えるのに便利であった．

さらに $f'(x)$ が微分可能なとき，$f'(x)$ の導関数 $f''(x)$ を f の **2 次導関数** (2 階微分)，$f''(x)$ の導関数を 3 次導関数... とよぶ．一般に f $(y = f(x))$ の n 次導関数を

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

と書く．ここで $f^{(0)}(x) = f(x)$ と約束しておく．

2011 年 4 月 13 日 (2011 年 4 月 27 日訂正)

2.2 偏微分係数と偏導関数

領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された 2 変数関数

$$f\colon D \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) \in \boldsymbol{R}$$

を考える．点 $(a,b) \in D$ において，極限値

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

がともに存在するとき，f は (a,b) で**偏微分可能**であるといって，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

を「f の (a,b) における x に関する (y に関する) **偏微分係数**」という．

さらに f が D の各点で偏微分可能なとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon D \ni (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in \boldsymbol{R}$$

は D で定義された 2 変数関数を与える．これを f の x に関する**偏導関数**という．同様に f の y に関する 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ も定義される．

注意 2.2 (記号の注意)**.**

- 偏導関数の記号 $\frac{\partial f}{\partial x}$ の ∂ は**ディー**または**ラウンド・ディー**と読むが，d と書くことはない．
- 2 行にまたがるのがいやな場合は
$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$
という記号を使う．

■偏導関数の計算　関数 f ($f(x,y)$) の x に関する偏導関数は，y の値を止めたまま x を変化させて得られる 1 変数関数の導関数とみなすことができる．したがって $f(x,y)$ が x, y の式で与えられているとき，f_x は $f(x,y)$ の y を定数として x に関して微分したもので与えられる．

2.3 高階の偏導関数

関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ がそれぞれ偏微分可能ならば 4 つの 2 変数関数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

を考えることができる．これらを f の **2 次偏導関数**という．

例 2.3. 2 変数関数　$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^2$ に対して

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 6xy, \qquad f_y(x,y) = 3x^2 + 2y.$$

さらにこれを微分して 2 次偏導関数

$$f_{xx} = 6x + 6y, \qquad f_{xy} = 6x, \qquad f_{yx} = 6x, \qquad f_{yy} = 2$$

を得る．

この例では f_{xy} (x で偏微分して，そのあと y で偏微分したもの) と f_{yx} (y で偏微分して，そのあと x で偏微分したもの) が一致する．これは偶然ではなく

よく使われる状況では f_{xy} と f_{yx} は一致する．

これを**偏微分の順序交換定理**という．この「よく使われる状況」は次回にきちんと説明しよう．問題 2-7 は f_{xy} と f_{yx} が一致しない例 (病的な例) である．

問題

2-1 例 2.1 を確かめなさい．

2-2 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

の偏導関数をすべて求めなさい．

2-3 変数 (t,x) の 2 変数関数 $u(t,x)$ に関する関係式

$$(*) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を**熱方程式**という (暇な人はこのいわれについて調べなさい)．関数

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

は方程式 $(*)$ を満足することを示しなさい．

2-4 2 変数関数 $f(x,y)$ が関係式

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

を満たしているとき，f は**調和関数**であるという (暇な人はこのいわれについて調べなさい)．次の関数は調和関数であることを確かめなさい：

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

また，x, y の 3 次以下の多項式で調和関数となるものをすべて求めなさい．

2-5 3 変数関数 $f(x,y,z)$ が関係式

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

を満たしているとき，f を (3 変数の) 調和関数という．一変数関数 $F(t)$ を用いて

$$f(x,y,z) = F(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

という形でかけるような 3 変数関数 f が調和関数となるような F を求めなさい．

2-6 2 変数関数 $f(x,y)$ に関する関係式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)=0$$

を満たすとき，関数 f のグラフで与えられる曲面を**極小曲面**という (暇な人はこのいわれについて調べなさい)．次の関数 (定義域はどこと考えるのがよいか) のグラフは極小曲面であることを確かめなさい：

$$f(x,y)=\log\bigl(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}\bigr),\qquad g(x,y)=\log\frac{\cos x}{\cos y}.$$

2-7 関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

は 2 階偏微分可能であることを示し，2 次偏導関数を求めなさい (cf. テキスト 21 ページ問い 7)．

2-8 一般に n 変数関数の 2 次導関数は何通りあるか．偏微分の順序交換ができる場合と，順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい．

3 連続性・微分可能性

3.1 一変数関数の連続性と微分可能性 (復習)

■連続性と微分可能性 区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された 1 変数関数 f が $a \in I$ で**連続**であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである.

例 3.1.

- 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 で連続でない. 実際 $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = 1$ であるが、$f(0) = 0$ である.

- 関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 で連続でない. 実際

$$x_n = \left[\left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]^{-1}, \qquad y_n = \left[\left(2n + \frac{3}{2} \right) \pi \right]^{-1} \qquad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

により数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を定義すると $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$ であるが, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1$, $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = -1$ となるので $\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない.

定理 3.2. 一変数関数 f が a で微分可能ならば a で連続である.

証明.

$$\begin{aligned} \left(\lim_{x \to a} f(x) \right) - f(a) &= \lim_{x \to a} \bigl(f(x) - f(a) \bigr) = \lim_{h \to 0} \bigl(f(a+h) - f(a) \bigr) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right) \\ &= \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \left(\lim_{h \to 0} h \right) = f'(a) \times 0 = 0. \qquad \square \end{aligned}$$

■C^r-級関数 区間 I で定義された一変数関数 f に対して

- f が I で連続である, とは I の各点で連続なことである. このとき f は I で C^0-級である, という.
- f が I で微分可能であるとは I の各点で微分可能なことである. このとき f は自動的に I で連続になる. また f の導関数 f' は, 区間 I で定義された関数となる (f' が連続であるとは限らない).
- f が I で C^1-級である, とは, f が I で微分可能で, かつ導関数 f' が I で連続であることと定義する.
- 正の整数 r に対して f が I で C^r-級であるとは、f の r 次導関数 $f^{(r)}$ が存在して I で連続となることと定義する.
- 関数 f が全ての負でない整数 r に対して C^r-級であるとき, f は C^∞-級であるという.

2011 年 4 月 20 日 (2011 年 4 月 27 日訂正)

■**平均値の定理**　多変数関数の微分を議論するのに必要なので，平均値の定理を思い出しておこう．証明は後期の微分積分学第二で与える：

定理 3.3. 関数 f が区間 I で微分可能であるとき，点 $a \in I$ と $a+h \in I$ となるような $h \neq 0$ に対して，

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \qquad (0 < \theta < 1)$$

を満たす θ が存在する[*8].

3.2　二変数関数の連続性と微分可能性

■**極限**　2 変数関数 f に対して

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

である，とは (x,y) がどのような経路で (a,b) に近づいても $f(x,y)$ の値が A に近づくことである[*9].

注意 3.4. (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(h,k)\to(0,0))} f(a+h, b+k)$.

(ii) $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) = A$ とは，$\sqrt{h^2+k^2}$ が 0 に近づくときに $f(a+h,b+k)$ が A に近づくことである．

(iii) $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) = A$ とは，

$$h = r\cos\theta, \qquad k = r\sin\theta \qquad (r > 0)$$

とおいたとき，r が 0 に近づくならば $f(a+h,b+k) = f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ が A に近づくことである．

(iv) 二つの 2 変数関数 $\alpha(h,k)$, $\beta(h,k)$ が $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h,k) = 0$, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h,k) = 0$ を満たしているとする．さらに 2 変数関数 f が $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ を満たしているならば，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f\bigl(a+\alpha(h,k), b+\beta(h,k)\bigr) = A$$

である．

(v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ ならば, 0 に収束する 2 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a+h_n, b+k_n) = A$.

(vi) “$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$” でないための必要十分条件は, 0 に収束する 2 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ をうまくとると $f(a+h_n, b+k_n)$ が A に収束しないようにできることである．

例 3.5. • 関数 $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)$ を考える．$h_n = \frac{1}{n}$, $k_n = \frac{1}{n}$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(h_n,k_n) = 1$ であるが, $h_n = \frac{1}{n}$, $k_n = -\frac{1}{n}$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(h_n,k_n) = -1$ である．したがって, 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．一方,

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right) = 0, \qquad \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} f(x,y)\right) = 0$$

[*8] 関数 f を与えたとき，θ は a と h に依存して定まる．与えられた a, h に対して具体的に θ の値を求めることはそれほど重要ではない．

[*9] このことのもう少しきちんとした定義は後期に紹介する．

である．

- $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ は $(x,y)\to(0,0)$ としたときの極限値を持たない．一方，

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1,\qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

である．

- $f(x,y)=xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ は $(x,y)\to(0,0)$ のとき 0 に近づく．実際，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと

$$(*)\qquad f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{1}{4}r^2\sin 4\theta$$

だが，$|\sin 4\theta|\leqq 1$ だから

$$\left|\frac{r^2}{4}\sin 4\theta\right|\leqq\frac{r^2}{4}\qquad \text{すなわち}\qquad -\frac{r^2}{4}\leqq\frac{r^2}{4}\sin 4\theta\leqq\frac{r^2}{4}$$

なので $(*)$ の右辺は $r\to 0$ とすると 0 に近づく．

■連続性

定義 3.6. 領域 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f が点 $(a,b)\in\boldsymbol{R}^2$ で**連続**であるとは，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

が成り立つことである．

例 3.7. (1) $\boldsymbol{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big)\\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続でないが，f は $(0,0)$ で偏微分可能で $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ である．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big)\\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big)\end{cases}$$

は $(0,0)$ で連続である．

一般に，多項式であらわされる関数は連続，有理式，すなわち多項式の商で表される関数は分母が 0 とならない点で連続である．

■微分可能性

定義 3.8. 領域 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で**微分可能**であるとは，うまく定数 A, B を選び，$(a+h,b+k)\in D$ となるような (h,k) に対して

$$(\star)\qquad f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

とおくとき

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

となるようにできることである．

命題 3.9. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能であって，$(\star)$ の定数 A, B は $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ でなければならない．

証明. 式 $(\star)$ の $k=0$ として

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\frac{Ah+\varepsilon(h,0)\sqrt{h^2}}{h}=A+\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}$$

だが，$-|\varepsilon(h,0)|\leqq\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}\leqq|\varepsilon(h,0)|$，かつ $h\to 0$ とすると $\varepsilon(h,0)\to 0$ だから

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f_x(a,b).$$

一方 $h=0$ とすることで $B=f_y(a,b)$ も得られる． □

命題 3.10. 関数 f が (a,b) で微分可能ならば (a,b) で連続である．

証明. 式 $(\star)$ の両辺で $(h,k)\to(0,0)$ とすればよい． □

注意 3.11. 命題 3.9 の逆は成立しない．実際，例 3.7 (1) の関数 f は $(0,0)$ で偏微分可能であるが連続でない．したがって，命題 3.10 の対偶から微分可能でない．

■微分可能性の十分条件

命題 3.12. 領域 D で定義された二変数関数 f が D の各点で偏微分可能，かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である．

証明. 点 $(a,b)\in D$ で微分可能であることを示そう．$(\star)$ の $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ として $\varepsilon(h,k)\to 0$ $((h,k)\to(0,0))$ を示せばよい:

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく．いま，k を一つ固定して

$$F(h):=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)$$

とおくと[*10] f の偏微分可能性から F は h の微分可能な関数で $F'(h)=f_x(a+h,b+k)$, $F(0)=0$ が成り立つ．そこで F に平均値の定理 3.3 を適用すると

$$F(h)=F(h)-F(0)=F'(0+\theta h)h=F'(\theta h)h=f_x(a+\theta h,b+k)h \qquad (0\leqq\theta=\theta(h,k)\leqq 1)$$

を満たす θ が存在する (θ は h と k を与えるごとに決まるので (h,k) の関数である)．同様に $G(k)=f(a,b+k)-f(a,b)$ とおくと，

$$G(k)=G'(\delta k)k=f_y(a,b+\delta k)k \qquad (0\leqq\delta=\delta(k)\leqq 1)$$

を満たす k の関数 δ が存在する．したがって

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k)&=\frac{F(h)+G(k)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\&=\big(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a,b)\big)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+\big(f_y(a,b+\delta k)-f_x(a,b)\big)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\end{aligned}$$

[*10] 記号 “:=” は (ここでは) 左辺を右辺によって定義するという意味を表す．

となるが，$0 < \theta < 1$, $0 < \delta < 1$ だから $\theta h \to 0$, $\delta k \to 0$ $((h,k) \to (0,0))$ が成り立つことと，$|h/\sqrt{h^2+k^2}| \leqq 1$, $|k/\sqrt{h^2+k^2}| \leqq 1$ であることから，右辺は $(h,k) \to (0,0)$ のときに 0 に近づく． □

注意 3.13. 命題 3.12 の逆は成立しない．実際，

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

は $(0,0)$ で微分可能であるが f_x, f_y は原点で連続でない．

■C^r**-級関数**　領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された二変数関数 f に対して

- f が D で連続である，とは D の各点で連続なことである．このとき f は I で C^0-級である，という．
- f が D で微分可能であるとは D の各点で微分可能なことである．このとき f は自動的に D で連続，また D の各点で偏微分可能になる．また f の偏導関数 f_x, f_y は，D で定義された関数となる
- f が D で C^1-級であるとは D の各点で偏微分可能で，f_x, f_y が D で連続となることである．
- f が D で C^2-級である，とは，f の 2 次導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} が D 上で定義されていて，さらにそれらがすべて D で連続であることと定義する．

3.3　偏微分の順序交換定理

定理 3.14 (偏微分の順序交換)**.** 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された二変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在して，ともに連続であるとき，$f_{xy} = f_{yx}$ が成立する．

証明は，テキスト 20 ページ，定理 7．後日，時間があれば紹介する．
とくに f が C^2-級であれば $f_{xy} = f_{yx}$ である．

問題

3-1 実数 α に対して，次の条件を満たす整数 k を求めなさい：関数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $\boldsymbol{R}$ で C^k 級であるが C^{k+1}-級でない．

3-2 平均値の定理 3.3 の絵を $h > 0$, $h < 0$ の場合にそれぞれ描きなさい．

3-3 2 変数関数が連続であること，偏微分可能であること，微分可能であること，C^1-級であることの間の関係を整理しなさい．
例：微分可能 $\Rightarrow$ 連続；連続 $\not\Rightarrow$ 微分可能．実際 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ で連続だが微分可能でない．

3-4 2 変数関数が C^r-級であることを定義しなさい．また C^r-級の関数は，任意の r 以下の任意の負でない整数 k に対して C^k-級であることを確かめなさい．

3-5 2 変数関数が C^∞-級であることを定義しなさい．

4　全微分・方向微分

■微分可能性の復習

定義 4.1. 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で**微分可能**であるとは，うまく定数 A, B を選び，$(a+h, b+k) \in D$ となるような (h,k) に対して

$$(\star) \qquad f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

とおくとき

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

となるようにできることである．

命題 4.2. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能であって，$(\star)$ の定数 A, B は $A = f_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$ でなければならない．

以上から，次のことがわかる：

定理 4.3. 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ で微分可能であるための必要十分条件は，f が (a,b) で偏微分可能で，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つことである．

■全微分　関数 $f(x,y)$ が $P = (a,b)$ で微分可能であるとき，

$$(df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

で与えられる 2 次列ベクトル $(df)_P$ を**関数 f の点 P における全微分**または**微分**という．さらに，(x,y) に対して 2 次行ベクトル $\bigl(f_x(x,y), f_y(x,y)\bigr)$ を対応させる規則

$$(4.1) \qquad df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

を f の**全微分**または**微分**という．

例 4.4. 関数 $\varphi(x,y) = x$, $\psi(x,y) = y$ に対して $d\varphi = (1,0)$, $d\psi = (0,1)$ である．このことを

$$dx = (1,0), \qquad dy = (0,1)$$

と書く．

2011 年 4 月 27 日 (2011 年 5 月 4 日訂正)

この記号を用いれば (4.1) は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{4.2}$$

と書くことができる．これが通常の全微分の表し方である．

命題 4.5. 2 変数関数 f が点 $P=(a,b)$ で微分可能なとき，

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = (df)_P\boldsymbol{h} + \varepsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}| \qquad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{h}| = \sqrt{h^2+k^2}$$

と書くと $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \varepsilon(\boldsymbol{h}) = 0$ が成り立つ．ただし $(df)_P\boldsymbol{h}$ は行ベクトルと列ベクトルの積として得られる 1×1 行列で，これをスカラとみなしている[*11]．

■曲線にそう微分　数直線上の区間 I 上で定義された 1 変数関数 $x(t)$, $y(t)$ の組 $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ は I から座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ への写像と思える：

$$\gamma\colon I \ni t \longmapsto \gamma(t) = \bigl(x(t),y(t)\bigr) \in \boldsymbol{R}^2.$$

このような写像を**曲線**あるいは**曲線のパラメータ表示**という．以下，曲線と言えば $x(t)$, $y(t)$ が微分可能となるもののみを考える[*12]．このことをとくに断るときは“γ は微分可能”という．

曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して

$$\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \bigl(\dot x(t),\dot y(t)\bigr) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$$

を曲線上の点 $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ における**速度ベクトル**という[*13]．

さて，2 変数関数 $f(x,y)$ と曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t),y(t)\bigr)$ に対して

$$F(t) = f\bigl(x(t),y(t)\bigr) \tag{4.3}$$

は，1 変数関数を与える．

命題 4.6. 2 変数関数 $f(x,y)$ と曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t),y(t)\bigr)$ がともに微分可能であるとき，(4.3) は微分可能で

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ．

---

*11　ここで (x,y) の (a,b) からの変化 (h,k) を，行ベクトルではなく列ベクトル ${}^t(h,k)$ で表すことに注意．“行列を掛ける”という文脈ではベクトルは普通列ベクトルで表す．この記法に合わせるならば $\boldsymbol{x} = {}^t(x,y)$ と列ベクトルで表し，$f(x,y)$ の代わりに $f(\boldsymbol{x})$ と書くのが自然．このとき，命題の式は

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = (df)_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{h} + \varepsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|$$

と書ける．この方がすっきりするはずだが，座標平面上の点の座標を横に並べる高等学校の教科書の記号を慮って，ここにあるような“まぜこぜ”な記号を用いた．

*12　だからといって γ が“なめらか”な曲線になるとは限らない．おなじみのサイクロイドを思い出そう．

*13　速度 velocity と速さ speed の違いは説明しなくてよいですよね．

証明： 実数 t を一つ固定して

$$\varepsilon_1(\delta) := \frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta} - \dot{x}(t), \qquad \varepsilon_2(\delta) := \frac{y(t+\delta)-y(t)}{\delta} - \dot{y}(t)$$

とおけば，x, y の微分可能性より $\delta \to 0$ のとき $\varepsilon_j(\delta) \to 0$．さらに

$$h(\delta) := \delta\bigl(\dot{x}(t) + \varepsilon_1(\delta)\bigr), \qquad k(\delta) := \delta\bigl(\dot{y}(t) + \varepsilon_2(\delta)\bigr)$$

とおけば，$\delta \to 0$ のとき h, $k \to 0$ が成り立つ．これらの記号を用いて，f の微分可能性に注意すれば，

$$\begin{aligned}
F(t+\delta) - F(t) &= f\bigl(x(t+\delta), y(t+\delta)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \\
&= f\bigl(x(t)+h(\delta), y(t)+k(\delta)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)h(\delta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)k(\delta) + \varepsilon\bigl(h(\delta), k(\delta)\bigr)\sqrt{h(\delta)^2 + k(\delta)^2}
\end{aligned}$$

となる．ただし $\varepsilon(h,k)$ は $(h,k) \to (0,0)$ のときに 0 に近づく関数である．この式の両辺を δ で割って $\delta \to 0$ とすると結論が得られる．

命題 4.6 の結論の式は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (df)\dot{\gamma}$$

などと書くことができる．ここで，速度ベクトル $\dot{\gamma}$ は列ベクトルとみなしている．

■方向微分　ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ と点 $P = (a,b)$ に対して $\gamma(t) = {}^t(a+tv_1, b+tv_2) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{a} = {}^t(a,b)$) とおくと $\gamma(t)$ は $t=0$ で点 P を出発し，一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で動く運動とみなすことができる．この γ と，点 P のまわりで定義された 2 変数関数 f に対して (4.3) で定義される $F(t)$ を考えると，

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v_2 = (df)_P\boldsymbol{v} \tag{4.4}$$

となることがわかる．この右辺の量を，関数 f の点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**という．

■勾配ベクトル　点 $P = (a,b)$ の近くで定義された微分可能な関数 f に対してベクトル

$$\operatorname{grad} f_P := \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$$

のことを f の P における**勾配ベクトル** gradient vector という[*14]．これを用いると，方向微分 (4.4) は

$$(df)_P\boldsymbol{v} = \bigl((\operatorname{grad} f)_P\bigr) \cdot \boldsymbol{v}$$

と内積 “$\cdot$” を用いて表すことができる．

問題

4-1 2 変数関数が f が “標高を表すスカラ場”, 曲線 $\gamma(t)$ が，時刻 t とともに移動する人の運動と思うとき，式 (4.3) で表される一変数関数はどのようなものか，説明しなさい．

4-2 平面上の点 (x,y) における標高が，多項式 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ で表されているような世界があるとする．この世界を，原点を中心とする半径 1 の円に沿って，反時計回りに速さ 1 で歩くとき，この旅はどのようなものになるか．すなわち，上り坂，下り坂になる区間を指摘しなさい．ヒント：考えている旅は $\gamma(t) = \bigl(\cos t, \sin t\bigr)$ となる．

[*14] 全微分 $(df)_P$ は行ベクトルだったが，それを “縦に並べかえた” だけ．

4-3 点 $P=(a,b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0,0)$ でないとする．このとき，f の点 P における単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分 $(df)_P\boldsymbol{v}$ が最大になるのは $\boldsymbol{v}$ が $(\mathrm{grad}_f)_P$ と同じ向きに平行なときである．このことを示しなさい．ヒント：$\boldsymbol{v}$ は単位ベクトルであることに注意．$\boldsymbol{v}={}^t(\cos t,\sin t)$ と表される．

4-4 点 $P=(a,b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0,0)$ でないとする．点 P を通る f の等高線を $\gamma(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ $(\gamma(0)=P)$ とパラメータ表示するとき，$t=0$ における γ の速度ベクトル $\dot\gamma(0)$ は $(\mathrm{grad}\,f)_P$ に直交することを示しなさい．すなわち，“等高線は勾配ベクトルに直交する”．

4-5 関数 f を次のように定義する：

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (y=x^2\quad\text{かつ}\quad x\neq 0)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}.$$

すると，$\boldsymbol{v}={}^t(v_1,v_2)$ に対して，f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\big(tv_1,tv_2\big)$$

は 0 になることを示しなさい．f は原点で連続か．

5　合成関数の微分公式

■合成関数の微分 (チェイン・ルール)

命題 5.1 (合成関数の微分公式 (命題 4.6 再録)). 2 変数関数 $f(x,y)$ と曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ がともに微分可能であるとき，一変数関数 $F(t)=f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ は微分可能で，

$$\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t)$$

が成り立つ．

偏微分の意味を考えれば，命題 5.1 から直ちに次のことがわかる：

系 5.2 (チェイン・ルール). 2 変数関数 $f(x,y)$ と，2 つの 2 変数関数の組

$$x=x(\xi,\eta),\qquad y=y(\xi,\eta)$$

がともに微分可能であるとき，2 変数関数

$$\tilde{f}(\xi,\eta)=f\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)$$

は微分可能で，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\xi}(\xi,\eta)&=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial\xi}(\xi,\eta)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial\xi}(\xi,\eta)\\ \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\eta}(\xi,\eta)&=\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial\eta}(\xi,\eta)+\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial\eta}(\xi,\eta)\end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 5.3. 物理学や工学では，系 5.2 の $\tilde{f}(\xi,\eta)$ のことを $f(\xi,\eta)$ のように $f(x,y)$ と同じ f を用いて表すことがある．文脈で独立変数がはっきりわかるのならこの記法が便利である．このとき (適当に省略をして) 系 5.2 の結論の式を

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi},\qquad\frac{\partial f}{\partial\eta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}$$

と表すことができる．あるいは，従属変数に名前をつけて

$$z=f(x,y)=f\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)=\tilde{f}(\xi,\eta)$$

と書いたとき，チェイン・ルールを

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi},\qquad\frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}$$

と書くこともできる．

2011 年 5 月 4 日 (2011 年 5 月 25 日訂正)

■R^m **から** R^n **への写像とその微分**　正の整数 m に対して，m 個の実数の組全体の集合を $\boldsymbol{R}^m$ と書くのであった (講義資料 1, テキスト 3 ページ)．領域[*15] $D \subset \boldsymbol{R}^m$ 上で定義された写像 $F\colon D \to \boldsymbol{R}^n$ を考える．ただし n も正の整数である．この写像は D の各点 $(x_1, \dots, x_m)$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の要素 $F(x_1, \dots, x_m)$ を対応させる対応の規則である．$y = F(x_1, \dots, x_m)$ とおくと $\boldsymbol{R}^n$ の要素であるから，n 個の実数の組であり，それを $(y_1, \dots, y_n)$ と書けばそれぞれの成分 y_j は $(x_1, \dots, x_m)$ によって定まる一つの実数である．すなわち y_j は $(x_1, \dots, x_m)$ の関数となっている．以上の考察から[*16] 写像 $F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to \boldsymbol{R}^n$ とは領域 $D \subset \boldsymbol{R}^m$ 上で定義された n 個の関数の組とみなすことができる：

(5.1)　$$F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \ni (x_1, \dots, x_m) \longmapsto \bigl(F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m)\bigr) \in \boldsymbol{R}^n.$$

ただし $F_j\colon D \to \boldsymbol{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ は D 上で定義された関数であり，F の成分とよぶ．写像 F の成分が F_j $(j = 1, \dots, n)$ であることを $F = (F_1, \dots, F_n)$ と書くことにしよう．

写像 $F = (F_1, \dots, F_n)\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to \boldsymbol{R}^n$ が C^r**-級** であるとは[*17]，各 j に対して関数 $F_j\colon D \to \boldsymbol{R}$ が C^r-級 (講義資料 3 参照) となることである．

定義 5.4. 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^m$ 上で定義された C^1-級の写像 $F = (F_1, \dots, F_n)\colon D \to \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \qquad (n \times m\text{行列})$$

を F の**微分** differential または**ヤコビ行列** Jacobian matrix という．ただし $(x_1, \dots, x_m)$ は $D \subset \boldsymbol{R}^m$ の座標である．

■**合成写像とその微分**　写像 $F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to \boldsymbol{R}^n$ と $G\colon \boldsymbol{R}^n \supset U \to \boldsymbol{R}^k$ が与えられ，かつ任意の $\boldsymbol{x} \in D$ に対して $F(\boldsymbol{x}) \in U$ が成り立つとき，

$$G \circ F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \ni x \longmapsto G\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr) \in \boldsymbol{R}^k$$

で与えられる写像 $G \circ F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to \boldsymbol{R}^k$ を F と G の**合成写像**という．

命題 5.5. 上の状況で，F, G がともに C^1-級ならば

$$d(G \circ F) = dG\,dF, \qquad \text{すなわち} \qquad d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr)\,dF(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ただし右辺の積は行列の積を表す．

■**逆写像**　領域 $D \subset \boldsymbol{R}^m$ の各点 $\boldsymbol{x}$ に対してそれ自身を対応させる対応の規則

$$\mathrm{id}_D\colon D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \mathrm{id}_D(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \in D$$

[*15] 数学的には厳密に定義のある用語である：テキスト 47 ページ参照．が，それを述べるのには用語や概念の準備が少々必要なので，ここでは曖昧に次のようなものだと思う：(1) ひと続きの $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合である (2) “端” がない．たとえば $\boldsymbol{R}^m$ 全体や，単位球 $\{(x_1, \dots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid (x_1)^2 + \dots + (x_m)^2 < 1\}$ を想像してもらえばよい．

[*16] 以下のことが最初から当たり前と思える人はそんな考察をしなくてもよい

[*17] 本当は微分可能性から定義していくべきだが，簡単のため C^r-級の概念だけを定義しておく．こういうもののみを考えていても実用上はほとんど問題がない．

を D 上の**恒等写像** identity map という．

領域 $D \subset \boldsymbol{R}^m$ から $U \subset \boldsymbol{R}^m$ への写像 $F\colon D \to U$ に対して，写像 $G\colon U \to D$ で

$$G \circ F = \mathrm{id}_D, \qquad F \circ G = \mathrm{id}_U$$

を満たすものが存在するとき，G を F の**逆写像** inverse map といい，$G = F^{-1}$ と書く．

例 5.6. 領域 $D = \{(r,\theta) \in \boldsymbol{R}^2 \mid r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ と $U = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x > 0\}$ に対して

$$F\colon D \ni (r,\theta) \longmapsto F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in U, \qquad G\colon U \ni (x,y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \in D$$

とすると $G = F^{-1}$, $F = G^{-1}$ である．実際, $r > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意すれば

$$G \circ F(r,\theta) = G(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}, \tan^{-1}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) = (r, \tan^{-1}\tan\theta) = (r,\theta),$$

一方，$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ とすると $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\cos\theta > 0$．したがって，$x > 0$ に注意して

$$\cos\tan^{-1}\frac{y}{x} = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\tan^{-1}\frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sin\tan^{-1}\frac{y}{x} = \sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

したがって

$$F \circ G(x,y) = F\left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\cos\tan^{-1}\frac{y}{x}, \sqrt{x^2+y^2}\sin\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = (x,y).$$

注意 5.7. 座標平面上の点 (x,y) に対して例 5.6 のように $(r,\theta) = G(x,y)$ と定めるとき, (r,θ) を座標平面の**極座標** polar coordinate system という[*18]．これに対して，(x,y) を**直交座標系** あるいは **デカルト座標系** Cartesian coordinate system という．

命題 5.8. 写像 $F\colon \boldsymbol{R}^m \supset D \to U \subset \boldsymbol{R}^m$ が逆写像 $G = F^{-1}$ をもち，F，F^{-1} ともに C^1-級ならば

$$dF^{-1} = (dF)^{-1} \qquad \text{すなわち} \qquad d(F^{-1})\big(F(\boldsymbol{x})\big) = \big(dF(\boldsymbol{x})\big)^{-1}$$

が成り立つ．ただし右辺の “-1” は m 次正方行列の逆行列を表す．

> **証明：** 恒等写像の微分が単位行列 E となることに注意して，$F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_D$ に命題 5.5 を適用すれば $dF^{-1}dF = E$, また $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_U$ に命題 5.5 を適用すれば $dFdF^{-1} = E$．したがって dF^{-1} は dF の逆行列である (逆行列の定義)．

■変数変換

例 5.9 (平面極座標とラプラシアン)**.** 例 5.6 の状況を考える：

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \qquad y = y(r,\theta) = r\sin\theta. \tag{5.2}$$

このとき $F\colon (r,\theta) \mapsto (x,y)$ の微分は

$$dF = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

*18 偏角 θ の変域は $-\pi < \theta < \pi$ まで拡張することができる．

である．一方，逆写像 $G = F^{-1}\colon (x,y) \mapsto (r,\theta)$ は $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ と表されているから

$$dG = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

となる．

平面上の C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して

$$\Delta z = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{5.5}$$

を対応させる Δ を**ラプラス作用素** Laplacian[*19]という．いま，$f(x,y)$ を (5.2) によって (r,θ) の関数とみなしたとき，Δf を f の r,θ に関する偏導関数を用いて表そう．

式 (5.6) とチェイン・ルール (系 5.2) を用いれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= r_x \frac{\partial f}{\partial r} + \theta_x \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r - \frac{y}{x^2+y^2} f_\theta \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r - \frac{y}{x^2+y^2} f_\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) f_r + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f_r}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) f_\theta - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial f_\theta}{\partial x} \\
&= \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_r + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{rr} - \frac{y}{x^2+y^2} f_{r\theta}\right) \\
&\qquad + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta - \frac{y}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{\theta r} - \frac{y}{x^2+y^2} f_{\theta\theta}\right) \\
&= \frac{x^2}{x^2+y^2} f_{rr} - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_{r\theta} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} f_{\theta\theta} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_r + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{x^2+y^2} f_{rr} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_{r\theta} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} f_{\theta\theta} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} f_r - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta.
\end{aligned}$$

したがって $r = \sqrt{x^2+y^2}$ に注意すれば

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}$$

となる．

例 5.10. 例 5.9 を少し異なった方法で計算しよう：上の記号をそのまま用いると，命題 5.8 をもちいれば

$$dG = d(F^{-1}) = (dF)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

である．したがって

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

[*19] 物理学や工学では至るところに現れる．

これを用いれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2\theta f_{rr} - \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta f_r + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2\theta f_{rr} + \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta f_r - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta
\end{aligned}
$$

なので，例 5.9 と同じ結果を得る．

問題

5-1 命題 5.5 の結論の式を成分を用いて表しなさい．

5-2 命題 5.1 は命題 5.5 の特別な場合であることを確かめなさい．

5-3 例 5.6 の状況を絵に描きなさい．

5-4 平面のスカラ場 $f(x,y)$ が $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$ をみたしているとき，f を**調和関数**という．

- 一変数関数 $F(t)$ を用いて $f(x,y) = F(\sqrt{x^2+y^2})$ の形に表される調和関数をすべて求めなさい．
- $f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ は調和関数であることを確かめなさい．

5-5 定数 c $(\neq 0)$ に対して

$$
\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct
$$

により変数変換 $(t,x) \mapsto (\xi,\eta)$ を定める．このとき，C^2-級関数 $f(t,x)$ に対して

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4c^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}
$$

となることを確かめなさい．

さらに，$f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0$ を満たす C^2-級関数 f は，2 つの C^2-級の一変数関数 F, G を用いて

$$
f(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)
$$

という形に書けることを示しなさい．

方程式 $f_{tt} = c^2 f_{xx}$ を**波動方程式**という．ここに述べたことを，“波動方程式の d'Alembert の解法” という．

5-6 空間のスカラ場 $f(x,y,z)$ に対して $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ を対応させる Δ を空間の**ラプラス作用素**という．空間の変数変換

$$
x = r\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi \qquad \left(r>0, -\pi<\theta<\pi, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)
$$

に対して

$$
\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi} & \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} & 0 \\ -\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}
$$

であることを確かめ，

$$
\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r}f_r + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r^2}\tan\varphi f_\varphi
$$

となることを確かめなさい．

6　微分方程式

今回は，微分や偏微分が応用の場面で現れる “微分方程式” を紹介する．現象がどのような微分方程式で表されるか，という問題は数学の問題ではなく，その現象をあつかう諸科学の問題である．したがって “なんでそれが成り立つの?” という質問はこの授業の範囲外 (ここでやることではない) と思ってほしい．また，微分方程式の一般論をここで展開するつもりも一切ない．偏微分，ラプラシアンなどがどのような場面に現れるか，という風景をあらかじめ眺めるのが目標である．この節では，現れる関数はとくに断りのない限り，すきなだけ微分可能 (C^∞-級) としておく．

6.1　常微分方程式

一変数関数 $u(t)$ とその導関数，2 次導関数 ... の間の関係式を**常微分方程式**といい，その関係式を満たす関数 $u(t)$ を微分方程式の**解**という．

例 6.1. 放射性物質 A が崩壊していく状況を考える．時刻 t における物質 A の質量を $u(t)$ とおくと $u(t)$ は常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u \qquad (\lambda \text{ は正の定数}) \tag{6.1}$$

を満たす．任意の定数 k に対して $u(t) = ke^{-\lambda t}$ はこの方程式の解である．

さらに 時刻 $t = t_0$ で物質 A が $k_0\mathrm{Kg}$ あったとすると，時刻 t における質量 $u(t)$ は方程式 (6.1) に加えて

$$u(t_0) = k_0 \tag{6.2}$$

を満たさなければならない．常微分方程式 (6.1) の，条件 (6.2) を満たす解は $u(t) = k_0 \exp\{-\lambda(t - t_0)\}$ である[*20]．

(6.2) のような特定の独立変数の値における未知関数の値を指定する条件のことを，常微分方程式の**初期条件**といい，初期条件を満たす常微分方程式の解を求める問題を**常微分方程式の初期値問題**という．

例 6.2. 理想的なばねの先端につけた質量 m の質点が振動している状況を考える．ばねに沿って x 軸をとり，平衡点を原点とする．質点に働く力はフックの法則に従うばねの復元力 $-kx$ ($k > 0$ はばね定数) および速度に比例する空気抵抗 $-m\gamma\frac{dx}{dt}$ ($\gamma > 0$ は定数) のみとすると，時刻 t におけるばねの位置 $x(t)$ は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{6.3}$$

を満たす．

この方程式は $x = x(t)$ の 2 次導関数を含んでいるので **2 階**常微分方程式という．これに対して (6.1) のような方程式を **1 階**常微分方程式という．

ばねの振動は，時刻 $t = t_0$ でのおもりの位置と速度によって定まる．すなわち，この方程式に関する初期値問題とは,

$$x(t_0) = x_0, \qquad \frac{dx}{dt}(t_0) = v_0 \tag{6.4}$$

2011 年 5 月 13 日 (2011 年 7 月 6 日訂正)

*20　e^X のことを $\exp(X)$ と書くこともある．

なる条件を満たす解を求めることである．

例 6.3. 区間 $\{t \,|\, t > 0\}$ で定義された関数 $f(t)$ に関する微分方程式の初期値問題

$$f''(t) + \frac{p}{t} f'(t) = 0, \qquad f(1) = \alpha, \quad f'(1) = \beta \tag{6.5}$$

を考える．ただし p, α, β は定数である．この方程式の解は

$$u(t) = \frac{1}{\beta}\left(t^{1-p} - 1\right) + \alpha \qquad (p \neq 1 \text{ のとき})$$
$$u(t) = \beta \log t + \alpha \qquad (p = 1 \text{ のとき})$$

となる．

6.2 偏微分方程式

多変数関数の偏導関数の関係式を**偏微分方程式**，その関係式を満たす関数を偏微分方程式の**解**という．

■ラプラスの方程式・ポアッソンの方程式 2 変数関数 $u = u(x, y)$, 3 変数関数 $w = w(x, y, z)$ をそれぞれ座標平面，座標空間のスカラ場とみなすとき，

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

によりあたらしい関数をつくる対応 Δ をラプラス作用素 (Laplacian) という．

とくに C^2-級関数 $u(x, y)$ $(w(x, y, z))$ が偏微分方程式 $\Delta u = 0$ $(\Delta w = 0)$ (**ラプラス方程式**と呼ばれる) を満たすとき，u (w) は**調和関数** harmonic function と呼ばれる．

ラプラス方程式はさまざまな場面に現れる．たとえば，真空中の静電場のポテンシャル (電位) は調和関数となることは電磁気学で学ぶ．また，ニュートンの万有引力の法則に従う重力場のポテンシャル (重力の位置エネルギー) は調和関数となることは力学で学ぶ．さらに，空間に電荷や質量が分布している場合は，これらのポテンシャルは $\Delta w = \rho$ $(\rho = \rho(x, y, z)$ は点 (x, y, z) における電荷 (質量) 密度) を満たす．このような $\Delta w = \rho$ (ρ は既知関数) の形の方程式を**ポアソン方程式**とよぶ．

例 6.4. 平面のスカラ場 $u = u(x, y)$ が一変数関数 F を用いて $u(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2})$ の形に表されるとき u は (原点を中心とする) 回転対称なスカラ場と呼ぶことにする．

回転対称な調和関数を求めよう．極座標 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いると

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \tag{6.6}$$

となることを前回見たが，とくに u が回転対称なら u は r だけの関数で θ によらない: $u = u(r)$*21．このとき u が調和関数であるためには $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0$ となることが必要十分．したがって，例 6.3 から回転対称な平面のスカラ場は

$$u = \beta \log \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha \qquad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

となる．

*21 $u(r)$ は最初にのべた F に対応する．

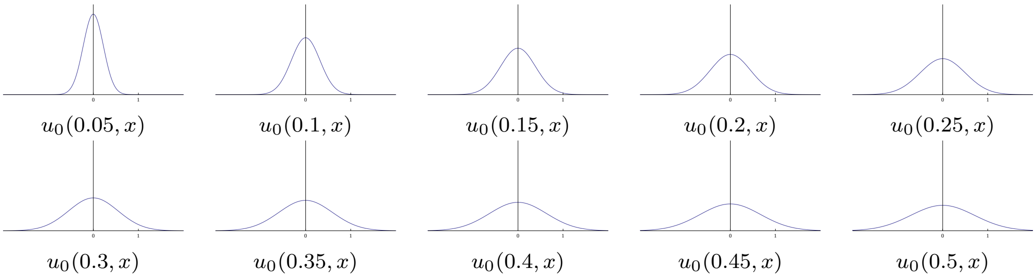

図 1　熱方程式の基本解 ($c = 1$)

例 6.5. 前の例と同様に，空間のスカラ場 $w = w(x, y, z)$ が $w = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ と書けているとき，回転対称なスカラ場と呼ぶことにする．空間の調和関数で，回転対称なものは

$$w = \frac{\beta}{r} + \alpha \qquad (\alpha,\ \beta \text{ は定数})$$

と表される．

■針金の熱伝導　一様な針金に沿って x 軸を配置し，時刻 t における針金の位置 x における針金の温度を $u(t, x)$ とすると，u は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.7}$$

を満たす．この方程式を (1 次元の) **熱方程式**という．ただし c は針金の熱容量と熱伝導率によって定まる正の定数である．

講義資料 2 の演習問題 2-3 でみたように

$$u_0(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) \tag{6.8}$$

は $\{(t, x) \,|\, t > 0\} \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された (6.7) の解である．これを熱方程式 (6.7) の**基本解**とよぶ．高等学校数学 C で学んだ言葉を用いれば，各 t を指定するごとに $u_0(t, x)$ は平均 0，分散 $2ct$ (標準偏差 $\sqrt{2ct}$) の正規分布の密度関数である．とくに

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) = 1$$

が成り立つ[*22] 時刻 t を 0 に近づけると

$$\lim_{t \to +0} u_0(t, x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

となり，極限は存在しないが，$t > 0$ ではなめらかな関数を与えている (図 1).

次に，関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

[*22] この積分の求め方は，前期のうちに紹介する．

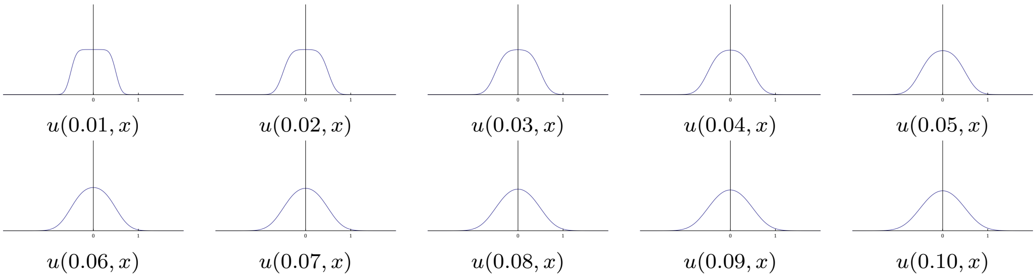

図 2　熱方程式の解 (6.9) ($c = 1$)

に対して

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t, x-y) f(y)\,dy \tag{6.9}$$

とすると $u(t,x)$ も (6.7) の解を与えており，$t \to 0$ とすると "大体" f に近づく[*23] (図 2).

■高次元の熱方程式　一様な鉄板，たとえばフライパンなどの位置 (x, y), 時刻 t における温度を $u(t, x, y)$ とすると，u は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u \qquad (c \text{ は正の定数}) \tag{6.10}$$

を満たす．ただし，Δ は (x, y) に関するラプラス作用素である：

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

たとえば u が (x, y) について回転対称，すなわち $u = u(t, \sqrt{x^2 + y^2})$ の形になっていると仮定すると，極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて (6.10) は

$$u_t = c\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right)$$

と書き換えることができる．とくに

$$u(t,r) = \frac{1}{4\pi\sqrt{ct}} \exp\left(-\frac{r^2}{4ct}\right) \tag{6.11}$$

はこの方程式の解である．

同様に，空間の温度分布 $u = u(t, x, y, z)$ も

$$u_t = c\Delta u \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を満たす．

[*23] "大体" の説明は今回はしない．

■弦の振動と波動方程式　一様な弦が振動している状況を考える．弦にそって x 軸をとり，時刻 t における弦の平衡点からのずれを $u(t,x)$ とすると，振幅が小さいときは u は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.12}$$

を満たす．ただし c は弦の張力と線密度から定まる正の定数である．これを**波動方程式**とよぶ．この方程式の任意の解は

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

と書ける．ただし F, G は (すきなだけ微分可能な) 1 変数関数である (演習問題 5-5)*24.

熱方程式と同じように，平面や空間の波動方程式は $u_{tt} = c^2 \Delta u$ と表される．太鼓の膜の振動や空間の波動は (場合によっては近似的に) この方程式により表される．

問題

6-1 セシウム 137 (^{137}Cs) の半減期は 30.17 年である．この場合，方程式 (6.1) の定数 λ の値を求めなさい．(単位はどうするか)

6-2 微分方程式 (6.3) で $\gamma = 0$ の場合を考える．このとき $\omega = \sqrt{k/m}$ とおくと

$$x(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) \qquad (\alpha,\ \beta \text{ は定数})$$

が解になることを示しなさい．さらに初期値条件 (6.4) を満たす解を求めなさい．

6-3 例 6.5 を確かめなさい (問題 2-5) 参照.

6-4 (6.11) にならって空間の熱方程式の (同じような形の) 回転対称な解を求めなさい.

6-5 実数 θ に対して $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (i は虚数単位) と定める (オイラーの公式)．さらに，複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対して

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

と定めよう．すると, e^z の実部 $\operatorname{Re} e^z$ および虚部 $\operatorname{Im} e^z$ は (x,y) の調和関数である．

6-6 複素数 $z = x + iy$ に対して $f(z) = z^m$ (m は正の整数) とする．$\operatorname{Re} f(z)$ ($\operatorname{Im} f(z)$) は (x,y) の関数とみなすことができるが，これは (x,y) の調和関数である．

*24 応用上必要な解を求めるには，さらに境界条件や初期条件を考慮する必要がある．

7　初等関数

■逆三角関数

定義 7.1.
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \cos y$ $(0 \leqq y \leqq \pi)$ をみたす y を $y = \cos^{-1} x$ と書く.
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \sin y$ $(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$ をみたす y を $y = \sin^{-1} x$ と書く.
- 与えられた実数 x に対し $x = \tan y$ $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ をみたす y を $y = \tan^{-1} x$ と書く.

これら $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ をそれぞれ**逆余弦関数**, **逆正弦関数**, **逆正接関数**といい，逆三角関数とよぶ.

注意 7.2.
- 人によっては $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$ の代わりに arccos, arcsin, arctan とも書く.
- 逆三角関数を，値域を制限せずに，例えば "$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n は整数)" のように厳密な意味では関数にならない "多価関数" とみなすこともある． このとき，定義 7.1 の逆三角関数を "逆三角関数の主値" といい，$\mathrm{Cos}^{-1} x$, $\mathrm{Arccos}\, x$ などと書くこともある.

合成関数の微分公式を用いれば，次の逆三角関数の微分公式を得る：

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}. \tag{7.1}$$

ただし $x = \pm 1$ で $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$ は微分可能でない．逆余弦関数と逆正弦関数の導関数は符号が違うだけだが，これは，恒等式

$$\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

による．公式 (7.1) から

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt, \qquad \sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \tag{7.2}$$

が成り立つことがわかる.

■初等関数　多項式，冪関数 (x^α の形．冪乗根を含む)，指数関数，対数関数，三角関数，逆関数に加減乗除，合成の操作を**有限回**施すことによって得られる関数を**初等関数**という．初等関数はその定義域に含まれる開区間上で C^∞-級である.

微分公式から，初等関数の導関数は初等関数であることがすぐにわかるが，初等関数の原始関数は初等関数であるとは限らない．初等関数で表されるいくつかの積分，その基本テクニックを演習問題に挙げておく.

■双曲線関数

定義 7.3. 実数 x に対して

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

をそれぞれ x の**双曲的余弦** hyperbolic cosine, **双曲的正弦** hyperbolic sine, **双曲的正接** hyperbolic tangent とよび，これらを**双曲線関数** hyperbolic functions という.

2011 年 5 月 18 日 (2011 年 5 月 25 日訂正)

注意 7.4. 双曲的余弦 $\cosh t$ と，角度 ht の余弦 $\cos ht$ を混同しないように．印刷物であれば，ここにあるように立体と斜体のフォントの使い分けで明確に区別できる．

双曲線関数の性質：

- 恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ[*25]．とくに $\bigl(x(t), y(t)\bigr) = (\cosh t, \sinh t)$ は (x, y) 平面の双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の右半分のパラメータ表示となる．(双曲線関数の名前の由来．これに対して，三角関数は円のパラメータ表示を与えることから "円関数" circular functions と呼ばれることがある.)
- 加法定理

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \qquad \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

 が成り立つ．
- 微分公式

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x$$

 が成り立つ[*26]．
- 微分方程式 $u'' = u$ の, 初期条件 $u(0) = A$, $u'(0) = B$ を満たす解 $u(t)$ は

$$u(t) = A\cosh t + B\sinh t$$

 で与えられる．

■余談：円周率の近似 実数 t に対して，初項 1, 公比 $-t^2$ の等比級数の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^N t^{2N} = \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1 + t^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^N t^{2N+2}}{1+t^2}$$

を $t = 0$ から x まで定積分すると,

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1} + R_N(x) \qquad \left(R_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt\right)$$

を得る．ここで

$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt \leqq \int_0^{|x|} t^{2N+2}\,dt = \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$
$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt \geqq \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+x^2}\,dt = \frac{1}{2N+3}\frac{|x|^{2N+3}}{1+x^2}$$

なので,

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1} + R_N(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right) + R_N(x) \tag{7.3}$$
$$\frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)(1+x^2)} \leqq |R_N(x)| \leqq \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$

[*25] 三角関数と同様に $\cosh^2 x$ は $(\cosh x)^2$ を表す．

[*26] $(\tanh x)' = 1/\cosh^2 x$ という公式よりもここに挙げた公式の方が便利だと思う．同様に $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ と覚えよう．

が成り立つ．これは後期に扱うテイラーの定理の特別な場合である．とくに $|x| \leqq 1$ とすると

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき})$$

が成り立つので，逆正接関数の級数表示

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) \tag{7.4}$$

が得られた．

とくに (7.4) で $x = 1$ とすると，ライプニッツの式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \tag{7.5}$$

が得られる．この右辺を適当な項まで計算すれば，円周率の近似値が得られる．誤差の項を $\widetilde{R}_N$ とすると (7.3) の $R_N(1)$ の形から

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+3}\right) + \widetilde{R}_N, \qquad \frac{2}{2N+3} \leqq |\widetilde{R}_N| \leqq \frac{4}{2N+3}$$

が成り立つことがわかる．この式を用いて円周率を小数 100 位まで求めることを考えよう：誤差 $|\widetilde{R}_N|$ は 10^{-100} を超えないようにするにはすなわち $N \geqq 10^{100} - \frac{3}{2}$ が必要，$N \geqq 2 \times 10^{100} - \frac{3}{4}$ が十分である (!).

ここで，次の等式 (マチンの公式) を思い出そう：

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}. \tag{7.6}$$

公式 (7.3) を用いると，$\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{1}{239}$ として

$$\pi = 4\left(\sum_{k=0}^{M} \frac{4(-1)^k \alpha^k}{2k+1} - \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j \beta^j}{2j+1}\right) + R_{M,N}, \qquad |R_{M,N}| \leqq \frac{16\alpha^{2M+1}}{2M+1} + \frac{4\beta^{2N+1}}{2N+1}$$

となる．とくに $R_{M,N}$ が 10^{-100} を超えないためには $M = 100$, $N = 20$ くらいあれば十分である．公式 (7.5) を用いた計算 (10^{100} 項くらい必要) と比較せよ．

問題

7-1 双曲線関数について

- $\cosh x \geqq 1$, $-1 < \tanh x < 1$ であることを確かめなさい．
- $\cosh x$ は偶関数，$\sinh x$, $\tanh x$ は奇関数である．
- グラフ $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \tanh x$ を描きなさい．
- 三角関数に倣って，双曲線関数の 2 倍角の公式，3 倍角の公式，半角の公式，積和公式，和積公式をつくりなさい．
- $t = \tanh\frac{u}{2}$ とおいたとき，$\cosh u$, $\sinh u$ を t の有理式で表しなさい．このことを用いて，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上に，x 座標，y 座標がともに有理数であるような点がたくさんあることを確かめなさい．

- A, B を定数とするとき，$A\cos t + B\sin t$ は $r\cos(t+\alpha)$, $r\sin(t+\beta)$ の形に表すことができる (合成公式)．これに倣って，双曲線関数の合成公式をつくりなさい．
- $x \geqq 1$ を満たす x に対して，$x = \cosh y$，$y \geqq 0$ を満たす y を $y = \cosh^{-1} x$ と書くと

$$\cosh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr)$$

となることを確かめなさい．同様に $\sinh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ を定義し，

$$\sinh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr), \qquad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

であることを確かめなさい．

7-2 次の等式を示し，それに対して公式 (7.3) を適用して π の近似値を小数第 5 位まで求めなさい：

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}.$$

7-3
- $\log x = (x)' \log x$ であることを用いて $\log x$ の原始関数を求めなさい．
- $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ の原始関数を求めなさい．

7-4 負でない整数 n に対して $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ とおく．とくに $n \geqq 2$ のとき $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成り立つことを示し，

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{2m-1}{2m}\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n=2m), \\ \dfrac{2m}{2m+1}\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdots\dfrac{2}{3} & (n=2m+1) \end{cases}$$

であることを確かめなさい．ただし m は正の整数である．さらに $\sin^n x$ の積分についても同様のことを行いなさい．

7-5 $\sqrt{1-x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい．
- $x = \sin\theta$ と置換する．
- $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ と置換する．

7-6 $f(x) = (x-1)(x-2)(x+4)^2$ とするとき，$1/f(x)$ の原始関数を求めなさい (部分分数分解)．

7-7 定数 a, b に対して $1/(x^2 - 2ax + b)$ の原始関数を次の場合に求めなさい．
- $a^2 - b = 0$ の場合, すなわち $1/(x+a)^2$ の原始関数．
- $a^2 - b > 0$ の場合 (部分分数分解)．
- $a^2 - b < 0$ の場合：$1/(1+u^2)$ の原始関数に帰着させる．

7-8 $1/\cos x$ $(= \sec x)$ の原始関数を，次の方法で求めなさい：
- $t = \tan\frac{x}{2}$ と置換する．被積分関数は t の有理式なので，部分分数分解を用いることができる．
- $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ とおいて $u = \sin x$ と置換する．
- $\frac{1}{\cos x} = \cosh u$ と置換する．

7-9 $\sqrt{1+x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい：
- $(x)'\sqrt{1+x^2}$ とみなして部分積分を行うことにより，$1/\sqrt{1+x^2}$ の積分に帰着する．
- $x = \tan\theta$ と置換する．
- $x = \sinh u$ と置換する．

7-10 次の関数の原始関数を求めなさい：

$$\frac{1}{x^4-1}, \qquad \frac{1}{x^3-1}, \qquad \frac{1}{x^4+1}.$$

7-11 地球 (半径 R メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き，その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき，ゴムひもはどれくらい伸びるか．R を用いて表しなさい．さらに，R の具体的な値 (1 メートルが定義されたときのいきさつからすぐにわかる) を用いて，伸びを実際に求めなさい：関数電卓を用いるとどのような値になるか．その答えは何桁目まで正しいか．さらに，手計算で値を求めるためにはどうしたらよいか．

8　一変数関数の積分再論

■区間の記号　実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の部分集合で "ひと続き" のもの[*27]を**区間**という．区間には次のようなものがある：

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\} \quad (\text{開区間}) & [a,b] &= \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqq x \leqq b\} \quad (\text{閉区間}) \\ (a,b] &= \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \leqq b\} & [a,b) &= \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqq x < b\} \\ (-\infty,a) &= \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < a\} & (-\infty,a] &= \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \leqq a\} \\ (a,\infty) &= \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x\} & [a,\infty) &= \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqq x\}. \end{aligned}$$

また，$\boldsymbol{R} = (-\infty,\infty)$ も区間である．

■区間の分割　閉区間 $[a,b]$ の**分割**とは，有限個の実数の列 $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ で，

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

を満たすものである．分割 Δ の**幅**とは

$$|\Delta| := \max\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}$$

で定まる正の数のこととする．

■定積分　区間 $I = [a,b]$ で定義された関数 f と I の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して

$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_j \Delta x_j, \qquad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \underline{f}_j \Delta x_j, \qquad \Delta x_j = x_j - x_{j-1} \tag{8.1}$$

と定める．ただし

$$\bar{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の最大値}), \qquad \underline{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の最小値})$$

とする．

定義 8.1. 区間 I で定義された関数 f が I で**積分可能**である，とは I の分割 Δ の幅をどんどん小さくしていったとき $\overline{S}_\Delta$, $\underline{S}_\Delta$ の値が同じ値に近づくことである．このとき，その値を

$$\int_I f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．

例 8.2. 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

2011 年 5 月 25 日

[*27] 数学用語では "連結"．この授業では定義しない．

とする．分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ に対して各区間 $[x_{j-1}, x_j]$ には有理数も無理数も含まれるので

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 1(x_j - x_{j-1}) = x_N - x_0 = 1, \qquad \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 0(x_j - x_{j-1}) = 0$$

したがって f は $[0,1]$ で積分可能でない．

例 8.3. 区間 $[-1,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考える．$[-1,1]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \ldots, x_N\}$ に対して番号 $k = k(\Delta)$ を $0 \in [x_{k-1}, x_k]$ となるようにとると，f の最大値は，区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で 1，それ以外の小区間では 0 になる．また f の最小値は 0 だから，

$$\overline{S}_\Delta(f) = x_k - x_{k-1} \qquad \big(k = k(\Delta)\big), \qquad \underline{S}_\Delta(f) = 0.$$

ここで $0 < x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$ だから，$|\Delta|$ をどんどん小さくしていくと $\overline{S}_\Delta(f)$ は 0 に近づく．したがって，f は $[-1,1]$ で積分可能で

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$$

である．

記号の約束として $b < a$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定める．

■連続関数の積分可能性と微積分の基本定理

定理 8.4. 閉区間 $I = [a,b]$ で定義された**連続関数** f は I で積分可能である．

定理 8.5 (微積分の基本定理)**.** 区間 $I = [a,b]$ で定義された連続関数 f に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

とおくと F は I で微分可能で $F'(x) = f(x)$ が成り立つ．

■原始関数と積分 (定積分) の計算　一変数関数 f の**原始関数**とは $F'(x) = f(x)$ となる関数 F のことである．

区間 I で定義された関数 f の 2 つの原始関数 F, G は $G(x) = F(x) + \text{定数}$ を満たす．実際，

$$\frac{d}{dx}\big\{G(x) - F(x)\big\} = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

なので $G(x) - F(x)$ は I で定数である．すなわち，

区間 I で定義された関数 f の原始関数は，定数の差をのぞいてただ一つ定まる．

命題 8.6. 区間 I で連続な関数 f には原始関数が存在する．

証明： 区間 I 内の点 a を一つ固定して

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

とおけばよい．

例 8.7. 関数 e^{-x^2} の原始関数は (定数だけの差をのぞいて) $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ である．

連続関数 f に対して，その原始関数が $F(x)$ であることを

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

とかく[*28]

命題 8.8. 区間 I で連続関数 f の一つの原始関数を F とするとき，I の点 a, b に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．

■曲線の長さ (道のり)

命題 8.9. 区間 $[a,b]$ で定義された C^1-級関数 f のグラフの長さ (弧長) は

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

で与えられる．

証明： 区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ に対して点 $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$,$\ldots$, $(x_N, f(x_N))$ を結ぶ折れ線の長さは

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1+\left(\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2}\,(x_j - x_{j-1})$$

で与えられる．ここで，平均値の定理から

$$\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = f'(\xi_j) \qquad x_{j-1} < \xi_j < x_j$$

を満たす ξ_j が存在するから，

$$I_\Delta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1+(f'(\xi_j))^2}\,(x_j - x_{j-1}) \leqq \sum_{j=1}^N \overline{F}_j \Delta_j, \qquad I_\Delta \geqq \sum_{j=1}^N \underline{F}_j \Delta_j$$

となる．ただし $F(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ とすると

$$\overline{F}_j = (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } F \text{ の最大値}), \qquad \underline{F}_j = (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } F \text{ の最小値}), \qquad \Delta_j = x_j - x_{j-1}$$

である．ここで $F(x)$ は連続関数だから，$|\Delta|$ を 0 に近づけると I_Δ は $F(x)$ の a から b までの積分に一致する．

[*28] “$+C$” と積分定数を書くこともある．

系 8.10. パラメータ t により $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$ と表示された平面上の C^1-級曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

で与えられる．

問題

8-1 高等学校の教科書では，関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

と定義していることが多い．ここではそのような定義を採用しなかった．その理由を挙げなさい．

8-2 楕円 $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ について，

- E が囲む平面の部分の面積は πab である．
- E の長さは

$$4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt, \qquad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

  で与えられる．
- 地球の地軸を含む平面による切り口は，赤道方向に長軸，地軸方向に短軸をもつ楕円になる．赤道方向の半径は 6377.397km, 極方向の半径は 6356.079km とするときこの楕円の周の長さの近似値を求めなさい．(ヒント：近似式 $\sqrt{1-x} \fallingdotseq 1 - \frac{x}{2}$ (x が小さいとき) を用いる．40003.5 ± 0.1km くらいになるはず．)

8-3 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の第一象限の部分の 1 点を $P(x, y)$ とする．$O(0,0)$, $A(1,0)$ とするとき，線分 OA, OP, および双曲線の弧 AP で囲まれた部分の面積を $t/2$ とするとき，P の座標 x, y を t で表しなさい．

8-4 放物線 $y = x^2$ の $0 \leqq x \leqq a$ に対応する部分の長さを求めなさい．

8-5 サイクロイド

$$\gamma(t) = \bigl(t - \sin t, 1 - \cos t\bigr)$$

の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれる図形の面積， および弧の長さを求めなさい．

8-6 空間の半径 R の球体がある．中心からの距離 r における球体の (体積) 密度が $\rho = \rho(r)\mathrm{kg/m^3}$ で与えられるとき，球体の質量を ρ を用いて表しなさい．ただし ρ は $[0, R]$ で定義された連続関数である．

9 重積分の意味と計算

■長方形の分割 閉区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ に対して

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],y\in[c,d]\}=\{(x,y)\,|\,a\leqq x\leqq b,c\leqq y\leqq d\}\subset \boldsymbol{R}^2$$

を $[a,b]$ と $[c,d]$ の直積という．この集合は座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ の長方形とその内部を表している．

いま，区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ の分割をそれぞれ

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,\qquad c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d \tag{9.1}$$

ととると，長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ は，mn 個の小さな長方形に分割される：

$$I=[a,b]\times[c,d]=\bigcup_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}}\Delta_{jk},\qquad \Delta_{jk}=[x_{j-1},x_j]\times[y_{k-1},y_k]$$

この分割の 2 つのことなる長方形は，たかだか境界にしか共通部分をもたない．このような長方形の分割を Δ と書くとき，分割の**幅**とは

$$|\Delta|:=\max\{(x_1-x_0),(x_2-x_1),\dots,(x_m-x_{m-1}),(y_1-y_0),\dots,(y_n-y_{n-1})\}$$

で与えられる正の数のことである．

■領域・コンパクト集合 $\boldsymbol{R}^2$ の連結な開部分集合 D を $\boldsymbol{R}^2$ の**領域**という[*29]．連続関数 $f_1,\dots,f_n$ に対して

$$\{x\in\boldsymbol{R}^2\,|\,f_1(x)>0,\dots,f_n(x)>0\}\subset\boldsymbol{R}^2$$

という形で表される集合は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合である．たとえば，単位開円板

$$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}=\{(x,y)\,|\,1-x^2-y^2>0\}\subset\boldsymbol{R}^2$$

は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合である．集合 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ の任意の 2 点が D 内の連続な道でつながっているとき，D は連結である[*30]．

一方，$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合が **閉集合**であるとは，その補集合が開集合となることである．連続関数 $f_1,\dots,f_n$ に対して

$$\{x\in\boldsymbol{R}^2\,|\,f_1(x)\geqq 0,\dots,f_n(x)\geqq 0\}\subset\boldsymbol{R}^2$$

という形で表される集合は $\boldsymbol{R}^2$ の閉集合である．また，$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 D が**有界**であるとは，十分大きい長方形 I をとれば $D\subset I$ となることである．$\boldsymbol{R}^2$ の有界な閉集合のことを**コンパクト部分集合**という[*31]．

2011 年 6 月 1 日

[*29] 連結，開という言葉はここでは定義しない．以下に述べることだけで十分だが，気になる人はテキスト 4.3 節を参照せよ．

[*30] この概念は，厳密には “弧状連結” である．連結性の定義は別にあるが，($\boldsymbol{R}^n$ の場合は) 弧状連結性と同値である．

[*31] これも，通常のコンパクト集合の定義とはことなるが，$\boldsymbol{R}^n$ の場合はこの性質をもつことがコンパクト性の必要十分条件である．

■長方形上の重積分　長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ で定義された関数 f と I の分割 (9.1) に対して

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_{jk},\eta_{jk})(x_{j+1}-x_j)(y_{k+1}-y_k) \qquad (\text{ただし } \xi_{jk}\in[x_{j-1},x_j],\ \eta_{jk}\in[y_{k-1},y_k])$$

なる和を考える．分割の幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけるとき，(ξ_{jk},η_{jk}) のとり方によらずにこの和が一定の値に近づくとき，その値を長方形 I 上の f の**重積分**といい，

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy$$

と書く[*32]．

■コンパクト集合上の重積分　平面 $\boldsymbol{R}^2$ のコンパクト部分集合 D 上で定義された関数 f を考える．このとき，D を含む長方形 I をひとつとり，

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \bigl((x,y)\in D\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)\notin D\bigr)\end{cases}$$

と定め，I 上での $\tilde{f}$ の重積分を

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_I \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

と書いて，f の D 上での重積分という[*33]．

■面積確定集合　コンパクト部分集合 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ 上で，定数関数 $f(x,y)=1$ が積分可能であるとき，D を**面積確定集合**，

$$|D|:=\iint_D dx\,dy$$

を D の**面積**という．

■積分可能性　コンパクト集合 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ 上で定義された関数 f が**連続**である，とは D を含むある開集合 Ω 上で連続な関数 $\tilde{f}$ で，D 上で f と一致するものが存在すること，と定める．ここでは証明を与えないが，次のことは認めておきたい：

定理 9.1. $\boldsymbol{R}^2$ の面積確定なコンパクト部分集合 D 上で定義された連続関数 f は D で積分可能，すなわち

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

が存在する．

■多重積分　同様に $\boldsymbol{R}^3$ のコンパクト部分集合 D 上での積分 (三重積分)，体積確定集合，体積，さらに一般に $\boldsymbol{R}^m$ 上の積分も定義される．

[*32] 習慣にしたがって積分記号 $\int$ を 2 つ並べるが，ひとつしか書かない場合もある．

[*33] この重積分は，コンパクト集合 D を覆う長方形 I のとり方によらない．

例 9.2.

- x 軸にそって $x=a$ から $x=b$ の区間に棒が横たわっている．このとき x における棒の線密度を $\rho(x)$ (kg/m) とすると，棒全体の質量は
$$\int_a^b \rho(x)\,dx$$
で与えられる．
- xy 平面上に，コンパクト集合 D の形に板が横たわっている．このとき 点 $(x,y)\in D$ における板の面密度を $\rho(x,y)$ (kg/m^2) ると，板全体の質量は
$$\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$$
で与えられる．
- 空間のコンパクト集合 D の形の立体の，点 $(x,y,z)\in D$ における密度が $\rho(x,y,z)$ (kg/m^3) であるならば，立体の質量は
$$\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
である．

例 9.3.

- 平面の長方形領域 $I=[a,b]\times[c,d]\subset \boldsymbol{R}^2$ は面積確定で $|I|=(b-a)(d-c)$ である．
- 区間 $[a,b]$ で定義された (一変数の) 連続関数 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ が $\varphi(a)\leqq\psi(a)$, $\varphi(b)\leqq\psi(b)$ を満たしているとする．このとき，
$$D:=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,\varphi(x)\leqq y\leqq\psi(x), a\leqq x\leqq b\}$$
とおく (図示せよ) と，これは $\boldsymbol{R}^2$ のコンパクト部分集合である．
とくに，D は面積確定で，
$$|D|=\int_a^b\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$
が成り立つ．
実際，区間 $[a,b]$ の分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ をり，その小区間 $\Delta_j=[x_{j-1},x_j]$ に対応する D の部分
$$D_j:=\{(x,y)\in D\,|,x\in\Delta_j\}$$
の面積は，分割が十分に細かいときは
$$\left[\int_{\varphi(x_{j-1})}^{\psi(x_{j-1})} f(x_j,y)\,dy\right]\Delta x_j \qquad (\Delta x_j=x_j-x_{j-1})$$
で近似される．添字 j を動かしてこれらの和をとって $|\Delta|\to 0$ とすれば，一変数関数の積分の定義から面積の式がえられる．
- コンパクト集合 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$ 上で関数 $f(x,y)=x^2$ を積分する：
$$\begin{aligned}\iint_D x^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^1\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right]dx\\ &= 2\int_{-1}^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right]dx\\ &= 2\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.\end{aligned}$$

問題

9-1 テキスト 119 ページ，章末問題 1, 2.

9-2 $\boldsymbol{R}^3$ 原点を中心とする半径 1 の球体 D の体積を

$$\iiint_D dx\,dy\,dz$$

を計算することにより求めなさい．同様のことを $\boldsymbol{R}^4$, $\boldsymbol{R}^4$ に対して行い，半径 1 の 4 次元球体，5 次元球体の "体積" を求めなさい.

10 重積分の応用

例 10.1. $D=\{(x,y)\,|\,\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{y}^2\leqq 1\}\subset \boldsymbol{R}^2$ の面積 $|D|$ を求めよう．図形の対称性から

$$D':=\{(x,y)\,|\,\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{y}^2\leqq 1, x\geqq 0, y\geqq 0\}$$

の面積 $|D'|$ を求めれば $|D|=4|D'|$ である．

$$|D'|=\iint_{D'}1\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3}dx=\int_0^1\left[\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3\right]dy=\frac{3\pi}{32}.$$

したがって求める面積は $3\pi/8$.

例 10.2. 関数

$$f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\qquad (a,b \text{ は正の定数})$$

のグラフと xy 平面で囲まれた部分の体積を求めよう．$f(x,y)$ は

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1\right\}$$

上で負でない値をとっている．点 D 上の小さな長方形 $[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]$ と，この長方形上の $f(x,y)$ のグラフで囲まれた部分の体積は,

$$f(x,y)\Delta x\Delta y$$

で近似されるので，考えている図形の体積は

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=\frac{2}{3}\pi ab$$

であることがわかる．

例 10.3. 空間の部分集合 $D=\{(x,y,z)\,|\,z^2\leqq 4x, y^2\leqq x-x^2\}$ の体積 $|D|$ を求めよう．平面の部分集合 $D'=\{(x,y)\,|\,y^2\leqq x-x^2\}$ に対して

$$|D|=\iiint_D dx\,dy\,dz=\iint_{D'}dx\,dy\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dz=\iint_{D'}4\sqrt{x}\,dx\,dy=\cdots=\frac{32}{15}.$$

例 10.4. グラフ $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ の面積を求めよう．ただし D は $\boldsymbol{R}^2$ のコンパクト部分集合で，f は D 上で C^1-級とする．

集合 D 上の小さな長方形 $[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]$ 上のグラフは空間の 3 点

$$P=\bigl(x,y,f(x,y)\bigr),\qquad Q=\bigl(x+\Delta x,y,f(x+\Delta x,y)\bigr),R=\bigl(x,y+\Delta y,f(x,y+\Delta y)\bigr)$$

2011 年 6 月 8 日 (2011 年 6 月 15 日訂正)

を頂点にもち PQ, PR を 2 辺にもつ平行四辺形に近い．この微小平行四辺形の面積は，空間ベクトルの外積 (ベクトル積) を用いて

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| &= |(\Delta x, 0, f(x+\Delta x, y) - f(x,y)) \times (0, \Delta y, f(x, y+\Delta y) - f(x,y))| \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\right)^2}\,\Delta x \Delta y \\
&\fallingdotseq \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,\Delta x \Delta y
\end{aligned}
$$

と書けるので，この総和をとれば，求める面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dx\, dy$$

で求められる．

問題

今回の問題では“厳密な”証明はとくに要求しない．問題の意味から積分の表示を (ある程度いい加減に) 導くことができればよい．

10-1 $\boldsymbol{R}^2$ の長方形 $D = [a,b] \times [c,d]$ を含む領域で定義された C^2-級関数 F に対して

$$\iint_D \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\, dx\, dy = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

であることを確かめなさい．

10-2 次の積分の値を求めなさい．

$$
\begin{aligned}
&\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy, && D = \{(x,y) \,|\, x+y \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}, \\
&\iint_D \frac{x}{y}\, dx\, dy && D = \{(x,y) \,|\, 1 \leqq y \leqq x^2, 2 \leqq x \leqq 4\} \\
&\iint_D x^2 y\, dx\, dy && D = \{(x,y) \,|\, 0 \leqq x \leqq \pi, 0 \leqq y \leqq \sin x\} \\
&\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy && D = \{(x,y) \,|\, x \geqq 0, y \geqq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1\} \\
&\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz && D = \{(x,y,z) \,|\, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0, x+y+z \leqq 1\}.
\end{aligned}
$$

10-3 座標空間の次の図形の体積を求めなさい：

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1\right\} \qquad a,\ b,\ c \text{ は正の定数.}$$

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} \leqq 1\right\} \qquad a,\ b,\ c \text{ は正の定数.}$$

10-4 xy 平面上の面積確定集合 D が上半平面 $\{(x,y) \,|\, y > 0\}$ に含まれているとする．このとき

- xy 平面が座標空間に含まれているとみなす．D を x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積は
$$2\pi \iint_D y\,dx\,dy$$
である．
- D の重心の座標は
$$\frac{1}{|D|}\left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy\right) \qquad \left(|D| = \iint_D dx\,dy\right)$$
である．

10-5 xy 平面上のなめらかな曲線 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は
$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$$
で与えられることを確かめなさい．ただし，区間 $[a, b]$ 上で $f(x) > 0$ であるとする．

10-6 xy 平面上の曲線 C が
$$C : \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$
とパラメータ表示されている．ただし $x(t)$, $y(t)$ は t の一変数関数として C^1-級で，区間 $[a, b]$ で $y(t) > 0$ であるとする．
- 曲線 C を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は
$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
で与えられる．
- 曲線 C の重心の座標は
$$\frac{1}{L}\left(\int_a^b x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt, \int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$
$$\left(L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$
で与えられる．

11　重積分の変数変換

■線形変換と面積　$\boldsymbol{R}^2$ の線形変換

$$L_A\colon \boldsymbol{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \qquad (A \text{ は 2 次の正方行列})$$

を考える．行列 A が正則，すなわち $\det A \neq 0$ ならば L_A は逆写像をもつ．とくに L_A は 1 対 1 の写像 (単射) である．行列 A が正則であるとき L_A を**正則な線形変換** とよぶ．

補題 11.1. 線形変換 L_A による $\boldsymbol{R}^2$ の直線の像は直線または一点である．とくに L_A が正則ならば直線の像は直線になる．

証明： 異なる 2 点 $P, Q \in \boldsymbol{R}^2$ を結ぶ直線 l の像を調べよう．P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とすると直線 l は

$$l = \{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, t \in \boldsymbol{R}\}$$

と表される．ここで L_A の線形性から

$$L_A\bigl((1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}\bigr) = (1-t)A\boldsymbol{p} + tA\boldsymbol{q}$$

なので，l の L_A による像は

$$l' = \{(1-t)\tilde{\boldsymbol{p}} + t\tilde{\boldsymbol{q}} \,|\, t \in \boldsymbol{R}\} \qquad \tilde{\boldsymbol{p}} = A\boldsymbol{p}, \quad \tilde{\boldsymbol{q}} = A\boldsymbol{q}$$

とかける．とくに $\overrightarrow{OP'} = \tilde{\boldsymbol{p}}$, $\overrightarrow{OQ'} = \tilde{\boldsymbol{q}}$ となる点 P', Q' をとると (1) $P' \neq Q'$ のとき，l' は P', Q' を通る直線となる．(2) $P' = Q'$ のとき l' は P' 1 点からなる集合である．さらに $\det A \neq 0$ なら写像 L_A は 1 対 1 であるから (2) のケースは起こりえない．

補題 11.2. 正則な線形変換 L_A による $\boldsymbol{R}^2$ の平行な 2 直線の像は平行な 2 直線である．

証明： 平行な 2 直線の像は 2 つの直線であるが，これらが交わるとすると L_A が 1 対 1 であることに反する．

補題 11.3. 直線 l 上の異なる 2 点 P, Q をとっておく．直線 l にない 2 点 R, S が直線 l の同じ側にあるための必要十分条件は，$\det(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$ と $\det(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ})$ が同じ符号をもつことである．ここで $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルは列ベクトルとみなし，det は 2 つの 2 次列ベクトルを並べてできる行列の行列式を表す．

証明： ${}^t(a,b) = \overrightarrow{PQ}$ とおき，$\boldsymbol{n} = {}^t(-b,a)$ とすると，(1) $\det(\boldsymbol{v}, \overrightarrow{PQ}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ である．ただし右辺は $\boldsymbol{R}^2$ の内積を表す．(2) $\boldsymbol{n}$ は直線 l に直交する零でないベクトルである．
直線 l 上にない点 R が，直線 l の $\boldsymbol{n}$ が指し示す側にあるための必要十分条件は $\overrightarrow{PR}$ と $\boldsymbol{n}$ が鋭角をなすことである：$(\overrightarrow{PR}, \boldsymbol{n}) > 0$. このことと (1) から結論が得られる．

補題 11.4. 線形変換 L_A によって，$\boldsymbol{R}^2$ の平行四辺形とその内部は $\boldsymbol{R}^2$ の平行四辺形とその内部，または線分に移る．とくに L_A が正則ならば平行四辺形の像は平行四辺形である．

証明： 簡単のため L_A が正則であるとし，平行四辺形 $PQRS$ の像を求める：$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$ とすると，線分 PQ は $\{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, 0 \leqq t \leqq 1\}$ となるので，その像は線分 P', Q' となる．ただし P', Q' はそれぞれ L_A による P, Q の像．各辺に対して同様のことを考えれば，平行四辺形の像が平行四辺形となることがわかる．さらに，平行四辺形の内部は 4 つの辺を含む直線の一方の側の共通部分なので，補題 11.3 から結論を得る (すこし端折った)．

2011 年 6 月 15 日

補題 11.5. 平行四辺形 $PQRS$ の面積は $|\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$ である．ただし $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PR}$ で，これらを 2 次の列ベクトルとみなしている．

証明. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，求める面積は

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\sin\theta| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}. \tag{11.1}$$

ただし $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を表す．ここで $\boldsymbol{a}={}^t(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{b}={}^t(b_1,b_2)$ とおいて (11.1) を計算すれば結論を得る． □

補題 11.6. 線形変換 L_A による平行四辺形 D の像の面積は，$|\det A|\,|D|$ である．ただし $|D|$ は D の面積である．

証明： 平行四辺形 $D=PQRS$ の各頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ とし，

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{b}=\overrightarrow{PR}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}$$

とおく．P, Q, R の L_A による像をそれぞれ P', Q', R' と書くと，

$$\overrightarrow{P'Q'}=A\boldsymbol{q}-A\boldsymbol{p}=A(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})=A\boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{P'R'}=A\boldsymbol{b}$$

であるから

$$|D'|=|\det(A\boldsymbol{a},A\boldsymbol{b})|=\bigl|\det\bigl(A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\bigr)\bigr|=\bigl|\det A\cdot\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\bigr|=|\det A|\,|D|.$$

■2 変数の変数変換 $\boldsymbol{R}^2$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$F\colon \boldsymbol{R}^2\supset(u,v)\longmapsto F(u,v)=\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)\in\boldsymbol{R}^2$$

を考える．微分可能性から

$$F(a+h,b+k)=F(a,b)+\begin{pmatrix}x_u(a,b) & x_v(a,b)\\ y_u(a,b) & y_v(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\sqrt{h^2+k^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}(h,k) \qquad |\boldsymbol{\varepsilon}(h,k)|\to 0 \quad \text{as} \quad (h,k)\to(0,0)$$

と書ける．この ${}^t(h,k)$ の係数行列は，F の微分 dF またはヤコビ行列 (講義資料 5) である．このことから，(h,k) が十分小さいときは，近似式

$$\Phi(h,k):=F(a+h,b+k)-F(a,b)\fallingdotseq\begin{pmatrix}x_u(a,b) & x_v(a,b)\\ y_u(a,b) & y_v(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

が成り立つ．

記号. ヤコビ行列の行列式を

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{pmatrix}$$

と書き，**ヤコビ行列式**, Jacobian という．

以下,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$$

が至るところ成立しているとする．

定理 11.7 (重積分の変数変換；テキスト 92 ページ)**.** 上の状況で xy 平面上のコンパクト集合 D と uv 平面上のコンパクト集合 E が F によって 1 対 1 に対応しているとき,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv$$

が成り立つ.

問題

11-1 テキスト 94 ページ，問 6,7; 95 ページ，問 8, 9.
11-2 テキスト 97 ページ問 10.
11-3 テキスト 100 ページ，問 11, 12; 101 ページ，問 13, 14.
11-4 テキスト 119 ページ（章末問題）1, 2, 3, 4.

12　広義積分 (一変数)

■広義積分　半開区間 $(a, b]$ で定義された連続関数 f に対して

$$\text{極限値} \qquad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \qquad \text{が存在するとき，その値を} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．関数 f が $[a, b)$ で連続であるときも同様に

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

が定義される．

また，区間 $[a, \infty)$ で定義された連続関数 f に対して

$$\text{極限値} \qquad \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx \qquad \text{が存在するとき，その値を} \qquad \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

と書く．同様に

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

も定義される．

これらは定積分の概念を拡張したもので**広義積分**[*34] とよばれる．とくに，定義のなかに現れる極限値が存在するとき**広義積分は収束する**，そうでないとき**発散する**という．

例 12.1.

- 正の数 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^{1} = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \qquad \text{なので} \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} 2(1-\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

すなわち，この広義積分は収束する．

- 正の数 $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_{\varepsilon}^{1} = \log 1 - \log \varepsilon = -\log \varepsilon \qquad \text{なので} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} -\log \varepsilon \to +\infty.$$

すなわち，この広義積分は発散する．

- 正の数 M に対して

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^M = -e^{-M} + 1 \qquad \text{なので} \qquad \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{M \to +\infty} (1 - e^{-M}) = 1.$$

すなわち，この広義積分は収束する．

- 正の数 M に対して

$$\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^M = \log M \qquad \text{なので} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M \to +\infty} \log M = +\infty$$

すなわち，この広義積分は発散する．

2011 年 6 月 29 日 (2011 年 7 月 6 日訂正)

[*34] “こうぎせきぶん” と読む．“広義” は “広い意味” という意味．

例 12.2. 原始関数が求まらなくても，広義積分の収束がわかる場合がある．たとえば，定数 $k \in (0,1)$ に対して広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

を求めよう．正の数 $\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \qquad (x=\sin t)$$

であるが，右辺の被積分関数は $[0,\frac{\pi}{2}]$ で連続であるから，$\varepsilon \to +0$ の極限をとることができて[*35]

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt$$

を得る．

関数 $f(x)$ が (a,b) で連続な場合は

$$\int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx$$

が $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ としたときにその近づけ方によらずある値に収束するとき，その極限値を広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と定める．区間の一方または両方の端点が有限でない場合[*36] も同様に定義する．

例 12.3. 正の数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x}{1-x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{2}\log(1-x^2)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} = -\left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\ &= -\frac{1}{2}\bigl(\log\varepsilon_2 + \log(2-\varepsilon_2) - \log(2-\varepsilon_1) - \log\varepsilon_1\bigr)\end{aligned}$$

であるが，$\varepsilon_1 \to +0$ のとき，右辺の最後の項は発散するので，広義積分

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

は発散する．特別な近づけ方で $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \to (0,0)$ とすると，たとえば

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0 \to 0(\varepsilon \to +0)$$

となるが，

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx = 0 \qquad \text{であるとはいわない．}$$

[*35] 原始関数の連続性を用いる．

[*36] 不正確な言い方だが...

■広義積分の収束判定　広義積分の値が具体的にわからなくても，収束することはわかる場合がある．

事実 12.4. 区間 $I = (a, b]$ で定義された連続関数 f, g がともに I 上で $f(x) \geqq 0$, $g(x) \geqq 0$ を満たし，さらに

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (x \in I), \qquad \text{かつ} \qquad \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{が収束する}$$

ならば，広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

は収束する．

この事実の証明には "実数の連続性" が必要である．時間があれば後期に説明するかもしれない[*37]．

例 12.5 (ガンマ関数)**.** 実数 $s > 0$ に対して広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

は収束する．そこで

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \qquad (s > 0)$$

とおき，これを**ガンマ関数**とよぶ.

例 12.6 (ベータ関数)**.** 正の数 p, q に関して広義積分

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束する．このようにして得られる 2 変数関数を**ベータ関数**とよぶ.

問題

12-1 関数 $f(x)$ が $[a, b)$ で連続であるとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の定義を述べなさい.

12-2 関数 $f(x)$ が $(-\infty, b] =$ で連続であるとき，広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ の定義を述べなさい.

12-3 広義積分

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx, \qquad \int_1^\infty x^\beta\,dx$$

が収束，発散するような実数 α, β の範囲を求めなさい.

12-4 例 12.5 の広義積分が収束することを確かめなさい．なお,

- この積分は区間の上端も下端も広義積分になっているので，たとえば $(0, 1]$ での積分と $[1, +\infty)$ での積分の収束を別々に示す必要がある.
- ∞ の側の収束性には次の事実を用いる：m を任意の正の整数としたとき,

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0.$$

[*37] 少なくとも，これと関連した話題を級数の収束判定の項で説明する.

これは次の不等式から示すことができる：

$$x > 0 \text{ ならば} \qquad f_m(x) := e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m\right) > 0$$

である．このことは，$f'_m(x) = f_{m-1}(x)$ であることに注意して数学的帰納法を用いれば示すことができる．

12-5 任意の正の数 s に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であることを示しなさい．これを用いて，正の整数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを確かめなさい．

12-6 例 12.6 の広義積分が収束することを確かめなさい．