2011 年 10 月 5 日 (2011 年 10 月 12 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 1

お知らせ

- 前期に続き，よろしくおねがい申し上げます.
- 前期を履修された方，成績評価の不手際でご迷惑をおかけいたしました．申し訳ありません.
- 前期「微分積分学第一」を履修された方,

  http://www.math.titech.ac.jp/ kotaro/class/2011/calc1/20110720.pdf

  に授業評価の集計結果をあげております．参考までに.
- 講義概要および授業日程に目を通しておいてください．とくに試験の日程に気をつけてください.
- 指定した日時に試験を受けられない方は，事前に山田までご連絡ください.

1 平均値の定理

1.1 平均値の定理

定理 1.1 (平均値の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f が，開区間 (a,b) では微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \qquad a<c<b$$

を満たす c が少なくとも一つ存在する．

微分可能な関数は連続であることに注意すれば，定理 1.1 から次がただちに従う：

系 1.2. 一変数関数 f が a と $a+h$ を含む区間で微分可能であるとする．このとき，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h \qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が少なくとも一つ存在する．

証明： まず $h=0$ の場合はどんな θ をとっても結論の式が成り立つ．
次に $h>0$ の場合，f は $[a,a+h]$ で微分可能であるから，とくに連続．したがって，定理 1.1 を $b=a+h$ として適用すると

$$f(a+h)=f(a)+f'(c)h \qquad a<c<a+h$$

を満たす c が少なくとも存在する．ここで $\theta=(c-a)/h$ とおけば $a<c<a+h$ から $0<\theta<1$ が得られる．
最後に $h<0$ の場合は，区間 $[a+h,a]$ に対して平均値の定理 1.1 を適用すれば

$$\frac{f(a)-f(a+h)}{a-(a+h)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(c) \qquad a+h<c<a$$

を満たす c が存在する．ここで $h<0$ に注意すれば $c=a+\theta h$ $(0<\theta<1)$ と表されることがわかる．

1.2 平均値の定理の応用

■関数の近似値

例 1.3. $\sqrt{10}$ の近似値を求めよう．関数 $f(x)=\sqrt{x}$，$a=9$, $b=10$ に対して定理 1.1 を適用すると

$$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{10-9}=\frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad 9<c<10$$

を満たす c が存在する．この式を整理すると

$$\sqrt{10}=3+\frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad 9<c<10.$$

とくに $c>9$ だから

$$\sqrt{10}<3+\frac{1}{2\sqrt{9}}=3+\frac{1}{6}<3.17.$$

2011 年 10 月 5 日 (2011 年 10 月 12 日訂正)

一方，$c<10$ だから，上の式を用いて

$$\sqrt{10} > 3+\frac{1}{2\sqrt{10}} > 3+\frac{1}{2\left(3+\frac{1}{6}\right)} = 3+\frac{3}{19} > 3+\frac{3}{20} = 3.15.$$

以上から

$$3.15 < \sqrt{10} < 3.17$$

が得られた．とくに $\sqrt{10}$ を 10 進小数で表したとき，小数第一位は 1, 小数第二位は 5 または 6 であることがわかる．

■関数の値の変化

定理 1.4. 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数が (a,b) で微分可能かつ $f'(x)=0$ $(a<x<b)$ を満たしているならば，f は $[a,b]$ で定数である．

証明. 区間 $(a,b]$ 内の任意の点 x をとり，平均値の定理 1.1 を区間 $[a,x]$ に対して適用すると，

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c), \qquad a<c<x(\leqq b)$$

を満たす c が存在する．仮定より，このような c に対して $f'(c)=0$．したがって $f(x)=f(a)$ が成り立つ．x は任意だったから

$$f(x)=f(a) \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

が成り立つ． □

注意 1.5. 一般に，点 a を含む開区間で定数であるような関数 f に対して $f'(a)=0$ である．

系 1.6. 区間 I で定義された微分可能な関数 F, G がともに連続関数 f の原始関数ならば $G(x)=F(x)+C$ (C は定数) と書ける．

証明： 関数 $H(x)=G(x)-F(x)$ は区間 I 上で $H'(x)=0$ を満たすから区間 I 上で定数である．

注意 1.7. 関数 F, G の定義域 I が区間でなければ系 1.6 は成り立たない．実際，$\boldsymbol{R}\setminus\{0\}=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x\neq 0\}$ 上で定義された二つの関数

$$F(x)=\log|x|, \qquad G(x)=\begin{cases}\log x & (x>0)\\ \log(-x)+7 & (x<0)\end{cases}$$

はともに $f(x)=1/x$ の原始関数であるが，差は定数でない．

■関数の増減

定理 1.8. 区間 (a,b) で定義された微分可能な関数 f の導関数が (a,b) で正 (負) の値をとるならば，f は (a,b) で単調増加 (減少) である．

証明. 区間 (a,b) から二つの数 x_1, x_2 を $x_1<x_2$ を満たすようにとる．このとき，区間 $[x_1,x_2]$ に対して定理 1.1 を適用すれば

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \qquad (a<)x_1<c<x_2(<b)$$

を満たす c が存在することがわかる．仮定より $f'(c) > 0$ なので，$x_2 - x_1 > 0$ であることと合わせて

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

が得られる．すなわち $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つことがわかるので，f は単調増加. □

注意 1.9. 微分可能な関数 f の導関数が連続である[*1]とき，f の定義域の内点 c で[*2]$f'(c) > 0$ ならば，c を含む開区間 I で，f が I 上単調増加となるものが存在する．

実際，f' が連続かつ $f'(c) > 0$ ならば c を含む開区間 I で $f'(x) > 0$ が I 上で成り立つものが存在する (この事実は第 3 回講義にて説明する).

注意 1.10. 一般に，微分可能な関数 f の定義域の内点 c で $f'(c) > 0$ だったからといって，c を含むある開区間で f が単調増加であるとは限らない．

実際，次の関数を考えよう：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

すると f は微分可能で，その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0). \end{cases}$$

であるから，とくに $f'(0) = 1/2 > 0$ である．ここで，$x = 0$ を含む開区間 I を一つ与え，$\xi = 1/(2m\pi)$ が I に含まれるように十分大きい番号 m をとると，$f'(\xi) < 0$ である．f' は $x \neq 0$ では連続だから ξ を含む区間 J で $f'(x) < 0$ $(x \in J)$ となるものが存在する．したがって $I \cap J$ で f は単調減少である．すなわち，0 を含む任意の開区間は f が単調減少であるような区間を含む.

1.3 平均値の定理の証明

平均値の定理を示すには，次の連続関数の性質 (第 3/4 回講義で扱う予定; ここでは証明を与えない) を用いる：

定理 1.11 (最大・最小値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f は，区間 $[a, b]$ で最大値・最小値をもつ.

注意 1.12. 区間 I で定義された関数 f が $c \in I$ で最大値 (最小値) をとる，とは任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(c)$ $(f(x) \geqq f(c))$ が成り立つことである．

関数 f が区間 I で最大値をとる，とは，上のような $c \in I$ が存在することである．

ここで，c は定義域 I に含まれていることに注意せよ．たとえば $\boldsymbol{R}$ 全体で定義された関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ は $f(x) \leqq \pi/2$ を満たしているが $f(x) = \pi/2$ となる $x \in \boldsymbol{R}$ は存在しないので，最大値をとる，とはいえない.

注意 1.13. この定理は (中間値の定理と同様) よく考えないと当たり前の定理であるが，実数の連続性と深く関わっている．実際，定義域を有理数に限って，$f(x) = 4x^2 - x^4$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を考えると，これは $0 \leqq x \leqq 2$

[*1] すなわち C^1-級.

[*2] すなわち c を含むある開区間が f の定義域に含まれるような点.

上で (定義域を有理数に限っても) 連続な関数だが，最大値をとらない．もちろん，同じ関数を，$\boldsymbol{R}$ の区間 $[0,2]$ 上で定義された連続関数と考えれば $x=\sqrt{2}$ で最大値をとる．

補題 1.14 (Rolle の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 F が開区間 (a,b) で微分可能，かつ $F(a)=F(b)$ を満たしているならば，

$$F'(c)=0,\qquad a<c<b$$

を満たす c が少なくとも一つ存在する．

証明. 関数 F が定数関数なら，区間 (a,b) 上で $F'=0$ となり，結論は明らかだから，以下 F は定数関数でないとしておく．

関数 F は $[a,b]$ で連続だから，$c_1, c_2\in[a,b]$ で F は c_1 で最大値をとり，c_2 で最小値をとるようなものが存在する．

いま，$c_1\in(a,b)$ とする．このとき，$c_1+h\in(a,b)$ となる任意の $h\neq 0$ に対して $F(c_1+h)\leqq F(c_1)$ だから

$$\frac{F(c_1+h)-F(c_1)}{h}\begin{cases}\leqq 0 & (h>0)\\ \geqq 0 & (h<0)\end{cases}$$

が成り立つ．ここで F は c_1 で微分可能だから

$$F'(c_1)=\lim_{h\to 0}\frac{F(c_1+h)-F(c_1)}{h}$$

が存在するが，とくにこの極限は右極限，左極限と一致しなければならないので $F'(c_1)=0$.

一方，$c_1=a$ または $c_1=b$ とする．すると $F(a)=F(b)$ だから，F は a, b で最大値を取る．ここで F は定数関数ではないとしているので，最小値は $F(a)$ よりも真に小さい値でなければならない．したがって $c_2\in(a,b)$ となる．これに対して上と同じ議論を行うと $F'(c_2)=0$ がわかる． □

平均値の定理 1.1 の証明. 関数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

に対して Rolle の定理 (補題 1.14) を適用すればよい． □

定理 1.15 (Cauchy の平均値の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f, g がともに (a,b) で微分可能，$g(a)\neq g(b)$ を満たし，$g'(x)=0$ なら $f'(x)\neq 0$ であるとする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad a<c<b$$

を満たす c が少なくともひとつ存在する．

証明. 関数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\bigl(g(x)-g(a)\bigr)$$

に対して Rolle の定理 (補題 1.14) を適用すればよい． □

問題

1-1 平均値の定理 1.1 の状況を絵に描きなさい．

1-2 平均値の定理を用いて $\sqrt{5}$ の近似値が 2.2 (小数第一位の数字は 2) であることを示しなさい．

1-3 定理 1.11 の仮定が必要であることを，次のようにして示しなさい：

- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値をもつが最小値をもたないものの例を挙げなさい．
- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい．
- 閉区間 $[0,1]$ で定義された (連続とは限らない) 関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい．

1-4 平均値の定理の証明を完成させなさい．同様に，Cauchy の平均値の定理の証明を完成させなさい．

1-5 Cauchy の平均値の定理を用いて，次を示しなさい (L'Hospital の定理の特別な場合)：

関数 $f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a,a+h)$ で連続，かつ $(a,a+h)$ で微分可能であるとする．さらに $f(a)=g(a)=0$, かつ極限値

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在するならば，極限値

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

も存在して，両者は等しい．

1-6 次の極限値を求めなさい．

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{5^x-3^x}{x^2}$.