2011 年 10 月 12 日 (2011 年 10 月 19/26 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 2

お知らせ

- 期末試験 (2 月 8 日) の時間 (10:45–12:15) についてご質問をいただきました.
  今学期の期末試験は 1 週間 +2 日の日程で，そのうち 2 日間を全学科目の試験に充てます.「微分積分学第二」の試験はどのクラスも 2 月 8 日の 3，4 時限に行います．この時間には他の試験は行われませんので，ご安心ください.

前回までの訂正

- 黒板に書いた「平均値の定理」が「平均値の定現」に見えたそうです．失礼しました.
- 講義資料 1, 2 ページ一番下：1.17 ⇒ 3.17
- 講義資料 1, 3 ページ 2 行目：
$$3+\frac{1}{2\sqrt{10}}=3+\frac{1}{2\left(3+\frac{1}{6}\right)} \qquad \Rightarrow \qquad 3+\frac{1}{2\sqrt{10}}>3+\frac{1}{2\left(3+\frac{1}{6}\right)}$$
- 講義資料 1, 3 ページ 8 行目 (定理 1.4 の 1 行目)：$f(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0$
- 講義資料 1, 3 ページ 11 行目：$a<c<x(<b) \Rightarrow a<c<x(\leqq b)$
- 講義資料 1, 3 ページ 11 行目：$\xi=1/\bigl((2m+1)\pi\bigr) \Rightarrow \xi=1/(2m\pi)$
- 講義資料 1, 4 ページ最下段：$0\leqq x\leqq 1 \Rightarrow 0\leqq x\leqq 2$ (2 箇所)
- 講義資料 1, 5 ページ 1 行目：$[0,1] \Rightarrow [0,2]$
- 講義資料 1, 5 ページ 3 行目：開区間 (a,b) で連続 ⇒ 開区間 (a,b) で微分可能
- 講義資料 1, 5 ページ下から 6 行目：
  かつ $g(a)\neq g(b)$ を満たすとする．⇒ $g(a)\neq g(b)$ を満たし，$g'(x)=0$ なら $f'(x)\neq 0$ であるとする.
- 講義資料 1, 6 ページ問題 1-5, 2 行目：a で連続 ⇒ $(a,a+h)$ で微分可能
- テキスト 153 ページ一番下：$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-\dfrac{b_n}{a_{n+1}} \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n+1}}-\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ (著者の正誤表にあるようです)
- テキスト 171 ページ 1 行目：$\sqrt{h^2-k^2} \Rightarrow \sqrt{h^2+k^2}$

授業に関する御意見

- 先生は紙に書く字より黒板に書く字の方が見やすく感じます．後期も宜しくお願いいたします.　**山田のコメント：** ごめんなさい．紙の方は慌てて書いているので.
- もう少し字を丁寧に書いてほしいです.
- 先生の説明はとってもわかりやすいですが，漢字の書き方は，私にとって見えません．ゆっくり書いてください.
- 前期より話すスピードが速くなった．ちょっと聞き取りにくい.
  山田のコメント： ごめんなさい．努力します.
- ロピタルの定理がすごく懐かしいです.　**山田のコメント：** そう?
- 今期こそ問題解答作成委員会が必要な気がする.　**山田のコメント：** そうですね.
- 後期は頑張ります.
- がんばってみます
  山田のコメント： そうしてください.
- 今回の授業の進め方はとても分かりやすかったです.　**山田のコメント：** よかった（のでしょうか?）
- 提出物の期限が翌日というのは少し早いと思います.　**山田のコメント：** これより遅いと整理ができません．私にもっと働けと?
- 冬の朝，人が少なくて寒いとか言われると，来たくなくなりますね.　**山田のコメント：** あなたが来て暖めてください.
- 前期では単位をありがとうございました．後期では点数がいただけると至極の喜びです.　**山田のコメント：** 勝手に取って行ってくださいね.
- すっかりバカになって帰ってきました．また半年間よろしくお願いします.　**山田のコメント：** me, too．こちらこそ.
- 前期に引き続き後期もよろしくお願いします.
- 後期もよろしくお願いします（4 件）
- 今年も（原文ママ）よろしくお願いします.
  山田のコメント： こちらこそ
- 毎日，連続 8 時間眠りたい $[00:00, 08:00]$．$\bigl((00:00, 08:00]\bigr)$　**山田のコメント：** 眠りについた時刻は寝ているのかどうか，という議論ですか?
- 久しぶりの微分積分!　**山田のコメント：** me, too
- 先生が「病院の定理」とおっしゃった気がするのですが気のせいですか?
  山田のコメント： ギヨーム・ド・ロピタルは l'Hospital と綴りますが，現在のフランス語では，サイレントの "s" を書かずに l'Hôpital と書くらしいです．というわけでフランス語の辞書を引いてみましょう．ちなみに有名な平均律クラビーア曲集（John Lewis がカバーしている）は小川さんの作曲でしたね.

質問と回答

質問： 平均値の定理 1.1 を Rolle の定理を用いて証明してみました．欠点があればご指摘お願いします．汚くてすみません．

(証明) 閉区間 $[a,b]$ で定義され，開区間 (a,b) では微分可能な連続関数を f とし，同様の定義域をもつ連続関数 F を次式のように 表せるとする．

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\dots(1)$$

ここで F は (a,b) で連続であり，(1) より $F(a)=F(b)=0$ だから，Rolle の定理より $F'(c)=0$ かつ $a<c<b$ $\dots(2)$ を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．(1) の両辺を x で微分すると $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となり $x=c$ とすると $F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\dots(4)$ となるので (2) かつ (4) より平均値の定理 1.1 が示された．

お答え： OK です．そんなに汚くはありません．ちょっとだけコメント：下線を付けた部分，「表せるとする」だと表せないときはどうする，という疑問がでてきませんか? ここでは与えられた関数 f に対して F を具体的に与えているわけですから「(1) で関数 $F(x)$ を定義する」とすべきです．もう 1 点，“(3)” がないんですけど...

質問： 「平均値の定理 1.1 の証明」において，(1) 1.1 での仮定より $F(x)$ は (a,b) で 連続 かつ $F(a)=F(b)=0$. (2) ロルの定理より $F'(c)=0$ $(a<c<b)$ なる c が 1 つ以上存在．(3) $F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ なる c が 1 つ以上存在，とやってみました．F の形がとても「わざとらしい」のですが，この証明によって，どんな「1.1 の仮定をみたす関数」でも定理が成り立つと言えるのでしょうか?

お答え： まず下線の部分，「微分可能」ですね．仮定を満たす関数 f に対して “わざとらしく” F を定義していますが，f を与えれば自動的に F が決まるようになっていますし，F が Rolle の定理の仮定を満たすことは 1.1 の仮定を f が満たすことから自動的にわかりますので “どんな f に対しても” 結論が成り立つわけです．ちなみに，F はそんなわざとらしい関数ではありません．関数 $g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ のグラフは点 $(a,f(a))$ と $(b,f(b))$ を通る直線で，$F(x)=f(x)-g(x)$ ですね．

質問： コーシーの平均値の定理の証明が想像もつかず気になります．平均値の定理の証明も高校の教科書では（グラフでの説明はあるものの）証明されていませんし．

お答え： 講義資料 1，5 ページ下のヒントではだめですか? 平均値の定理の証明は，教科書によってはされているようです．

質問： $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\dots(1)$, $\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)\dots(2)$, $(1)\div(2)$ で $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\dots(3)$ が導けないことはわかったんですが，(3) の導き方が気になってねれません!

お答え： 講義資料 1, 5 ページ下のヒントではだめですか?

質問： 問題：区間 $[0,1]$ で定義された連続関数 $g(x)$ が，$(0,1)$ で微分可能，かつ $g(0)=g(1)=0$ ならば $g'(c)=g(c)$ を満たす $c\in(0,1)$ が存在する．この問題の私の解き方は正しいですか?

証明：$f(x)=e^{-x}g(x) \Rightarrow f'(x)=\left[g'(x)-g(x)\right]e^{-x}$ に，Rolle の定理を適用すれば $f'(c)=0$, すなわち $[g'(c)-g(c)]e^{-c}=0$ となる $c\in(0,1)$ が存在する．このとき $g'(c)=g(c)$ (q. e. d.)

お答え： だいたい正解ですが，“Rolle の定理を適用” の部分，Rolle の定理の仮定を満たしていること，すなわち $f(0)=f(1)=0$ であることを明記すべきと思います．

質問： 平均値の定理の証明は高校のときの証明では不十分なのでしょうか?

お答え： 教科書によりいろいろですので，なんとも言えません．いくつかの教科書には，講義資料 1 のような証明が書いてありますね．前期にも少しコメントしましたが，この証明では定理 1.11 を用いています．高等学校ではこれを証明してはいないわけです．

質問： 高校時代に，平均値の定理は

$$(1)\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad (a<c<b) \qquad (2)\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)\quad (0<\theta<1)$$

(f: 一変数関数で $[a,b]$ ($[a,a+h]$) で連続 (a,b) ($(a,a+h)$) で微分可能) の 2 つを学びましたが，実際に受験で使うのは (1) がほとんどでしたが (2) はどのような場合に使えば問いを進めやすくすることが出来るのでしょうか?

お答え： 「問いを進める」とはどういう意味でしょうか．(2) の形はこれからあとで何回か使います．講義資料 1 にも挙げましたし，講義でもコメントしましたが，(2) の形は $h>0$ でなくても成り立ちます．そのときは f が満たすべき仮定を "a と $a+h$ を含む区間で微分可能" とすべき (少し強い仮定になりますが) です．実際，$h<0$ のときは $[a,a+h]$ という区間はありませんから．

質問： 平均値の定理でこれからは $b=a+h$ という風にした方が良いですか．

お答え： 両方使えるとよいです．

質問： $\sqrt{10}$ の近似値は $\sqrt{9}$ を利用して求めましたが，$\sqrt{9}$ のかわりにもっといい感じの整数でない半端な数を利用すると精度が上がりそうですね．$\sqrt{5}$ の場合は，例えば $\sqrt{4.84}(=2.2)$ を使うと $\sqrt{5}<2.24$ となるので $\sqrt{4}(=2)$ を使った場合の $\sqrt{5}<2.25$ よりもちょっといいかんじだと思います．$y=\sqrt{x}$ は単調増加関数なので，上の図 (略) で a が 5 に近いほど精度も高いですか．そのへんがよくわからなかったです．

お答え： 全くそのとおりです．今回はかなりラフな評価をやっています．ただ "a が 5 に近いほど精度がよい" のは $\sqrt{x}$ が単調増加，というよりも，連続であることによります．

質問： $\sqrt{10}$ の近似値を求める問題で a に選ぶ数を 10 との差がより小さな数にすればするほどより正確な近似値が得られるものなのですか．

お答え： たとえば $a=(3.1)^2$ としてやってごらんなさい．

質問： $\sqrt{10} > \left(3+\frac{1}{2\sqrt{c}}\right) > 3+\frac{1}{2\sqrt{10}}$ の $1/(2\sqrt{10})$ を有理化して左辺に移行 (原文ママ：移項のこと?) して $\sqrt{10}>\frac{60}{19}>3.15$ としてはいけないのですか?

お答え： いけなくはありません．具体的な関数の値の近似の問題は，さまざまな方法があり，方法によって得られる精度が違います．

質問： $\sqrt{10}$ の近似計算で，小数第 2 位のあたいはどこまで絞ればよいのか? (適切なのか) $(3+\frac{1}{8}$ or $3+\frac{3}{20}) < \sqrt{10}$ (すごいとは思うけど実際に思いつけるかどうか)

お答え： 近似はやり方によって精度が違います．ここでは，(1) どういう公式を使い (2) どういう不等式を用いて近似値が得られるか，そのとき，その不等式から "小数第何位までが正しいといえるか" が理解できていればよいです．

質問： $\frac{3}{19}>\frac{3}{20}$ とする必要がわかりません．それぐらい計算してもいいよな (原文ママ) 気がします．

お答え： 山田は暗算ができないので，簡単に求まる値にしたかった．

質問： $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{5^x-\frac{\log 5}{\log 3}3^x}{x^2}=(\text{中略})=\frac{\log 5}{2}\log 5-\log 3$ のように，ロピタルの定理を使ったあとも極限が $0/0$ という不定形でもう一度ロピタルの定理をつかって極限を求めるのは問題ないですか?

お答え： 問題ないですね．

質問： L'Hospital の定理でも $\frac{(\log 5)5^x-(\log 3)3^x}{2x}\to+\infty$ $(x\to+0)$ という形で止めていれば正しいということすよね．

お答え： そうですが，$+\infty$ になるのは自明ですか．

質問： 授業の最初に L'Hospital の定理と書いてありましたけど，L'Hospital の内容は何ですか? $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が成立するということですか?

お答え： これだけではだめ．仮定は何でしたか?

質問： 1-6 $\cdot$ (略) $(\sin 0-0=0,\ \tan 0-0=0,\ (\sin x-x)'=\cos x-1$ で微分可能より) (略): ロピタルの定理を使うときの確認はこの程度で良いですか．

お答え： よいんですけど，なぜ $\tan x-x$ の微分可能性は確認していないのでしょうか?

質問： L'Hospital の定理は "0/0" という不定形があればこの定理を使えるが，$+\infty/+\infty$ という不定形などでもこの定理を使えるでしょうか (他 3 件)．

お答え： ∞/∞ の場合でも $x\to\pm\infty$ の場合でも成立しますが，証明は別にやらなければなりません．ここではそれ以上深入りしません．

質問： ロピタルの定理は $\frac{\infty}{0}$ などの形のときも使えますか?

お答え： $\frac{\infty}{0}$ は不定形ではありません．

質問： 授業の最後の Cauchy の平均値の定理だが，資料の証明方法はわかったけど，先生の言った方法がわからない．

お答え： 講義では "このようにやって示せるわけではない" ということを述べたはず．すなわち "言った方法" は誤り．

質問： Cauchy の平均値の定理 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ でどうして $f(a)$ と $g(a)$ が消去できますか? (他 2 件)

お答え： 講義で述べたのは，Cauchy の平均値の定理から，ロピタルの定理 (問題 1-5) を示す方法．1-5 の仮定から $f(a)=g(a)=0$ ですね．

質問： 微分可能，$f'(a) > 0$ でも $f'(x)$ が連続でないと $f(x)$ は a を含む区間で 増加にならない とありましたが，$f'(x)$ が連続でなくても "$x = a$" のところでは "増加" といってもよい気がしますが，なぜダメなのですか？ (たとえば，プリント p. 4 の注意 1.10 の関数では $x = 0$ からちょっとでもずれた $1/(2n\pi)$ n が無限大であっても) では f' が $-1/2$ と負になりますが $x = 0$ では増加してるといってはいけないのですか？

お答え： 下線部「増加にならない」⇒「増加であるとは限らない」「n が無限大であっても」⇒ "n が無限大" という状況は考えていません．
ご質問への回答：どうしてもそう言いたいのであれば "関数 $f(x)$ が $x = a$ で増加" とうことの意味を明確にしなければなりません．"区間 I で $f(x)$ が増加" とうことは明確に定義できます："$x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$ ならばつねに $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ"．

質問： 関数 $f(x) =$ (略：例 1.10 の関数) のグラフはどのようになるのでしょうか．$x = 0$ を含むどんな小さな区間でも増加と現象の両方があるというのがイメージできません．

お答え： 適当なグラフ描画ソフトウェアを使って描いてご覧なさい．

質問： 講義内容の中で $f(x)$ が C^1-級，$f'(a) > 0$ なら a を含む十分小さい区間で $f'(x) > 0$ があるが，二変数関数の場合，$f(x, y)$ が C^1-級，$f'(a, b) > 0$ なら (a, b) を含む十分小さい区間で $f'(x, y) > 0$ となりますか？

お答え： 二変数関数 $f(x, y)$ に対して $f'(x, y)$ とは何ですか？ また，平面上の点 (a, b) を含む十分小さい「区間」とは何ですか？ 前期にやったことを思い出しましょう．

質問： 講義資料 p.3 の上から 5 行目「とくに $\sqrt{10}$ を 10 進小数で表したとき...」10 進小数以外で表すこともあるのですか？

お答え： あっても良いでしょう．むしろ計算機的には 2 進や 16 進で表したほうが自然では？

質問： 注意 1.9 についてですが，c を含む区間 I と書いてありますが，もし連続性の定義を使うなら，この区間は微小区間にしないとだめだと思います．任意の区間について注意 1.9 の原理は適用するのですか．

お答え： 「微小区間」という言葉をきちんと定義できますか？ 注意 1.9 では "ある区間が存在して" といっています．"どんな区間でもよい" (任意の arbitrary 区間) とは一言も言っていません．

質問： 講義資料 p2 の下から 1 行目と 3 行目．$9 < c < 10.$ $\dots - 3 + \frac{1}{6} < 1.17.$ これ (点) はなんですか？

お答え： ピリオドです．数式も文の要素なので，文末のピリオドを付けているわけです．

質問： 講義資料の中で使われている "系" とはどのような意味ですか？

お答え： 直前の定理などから容易に導かれる命題のことをその定理の "系" と呼びます．論理的には "定理" と同じですが...ちなみに：定理 (theorem), 命題 (proposition), 補題 (lemma, なにかを示すための補助的な定理), 系 (corollary) という語は数学の文脈では頻繁に使われますので覚えておくとよいと思います．

質問： 講義資料 1 の問題 1-1「平均値の定理 1.1 の状況を絵に描きなさい」とありますが，なぜ図ではなく絵なのでしょうか．(絵と図の違いを教えてください．)

お答え： ここでは区別していません．Picture の訳語と思ってください．

質問： プリント 3 ページの定理 1.4. の証明で，区間 $(a, b]$ となっているのは何故ですか？

お答え： $x = a$ とすると区間 $[a, a]$ というわけのわからないものが出てくるから．

質問： 平均値の定理による $\sqrt{n}$ の近似を実用とする分野とはどのようなものですか？

お答え： 君は平方根の近似値をどのような場面で使いますか？

質問： 平均値の定理などを $\forall$ や ε など魔法の呪文をつかったような証明はないのでしょうか．

お答え： べつに魔法の呪文ではないんですけど．

質問： 授業でよく出る「変態」な関数の例には，三角関数が含まれていますが，含まれない例はないんですか．

お答え： そういう変態も後日紹介します．

質問： C^1-級でない関数が変態な関数で少し変な挙動を示す関数という認識でよかったですか？

お答え： よくありません．文脈によります．変態には明確な定義がないので．ところで「認識」という語で何を表していますか？

質問： f が $[a, b]$ で増加をいうには（$[a, b]$ で微分可能 or C^1-級）で $f'(x) > 0$ のときに平均値の定理を使って証明すればよいのですか？

お答え： 質問の状況がわかりません．定理 1.8 が成立する，ということを認めた上での話ですか？ それとも定理 1.8 を証明したいのですか．

質問： 直線グラフに平均値の定理 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ $(a < c < b)$ を用いたとき，c が無限大に存在するという解釈で大丈夫ですか？

お答え： 大丈夫ではありません．(1) 平均値の定理は関数に適用するものです．グラフに適用するものではありません．(2) 平均値の定理のステートメントがただしくありません．“そのような c が 存在する” ことが重要．(3) “無限大に存在する” という言葉の意味がわかりません．

質問： 先生は一般的にマクロな視点で見ると連続でもミクロな視点だと非連続 (原文ママ：不連続のこと?) なもの (エネルギー，電荷) は連続であると捕え (原文ママ：捉えですかね) ますか．

お答え： 考える問題によります．地球の人口でも連続量と考え，人口増加の微分方程式をたてたりするわけです．

質問： 「実数の連続性」とあって気になったのですが，連続性という性質は実数に限ったものではなく複素数にもいえることなんでしょうか?

お答え： 「連続性」という語で何を指すかによります．ここでは実数のみを考えておきましょう．複素数は実数を用いて定義されるので，実数の連続性からいろいろな性質が言えるはず．

質問： 今学期学習することの中に，ロピタルの定理のような，計算が簡単になるような定理がありますか？

お答え： ロピタルで計算が簡単になるんですか？

質問： 微分可能性などについてすっかり忘れてしまいました．どこを勉強すればいいですか？

お答え： 前期の講義資料．

質問： 色々な人の名前が入った定理が出てきて定理の名前が覚えにくいんですが，何かいい方法はありませんか？

お答え： 何回も使っているうちに自然に覚えます．

質問： 2 ヶ月ぶりに先生にあって，大学が始まったんだなと痛感しました．

お答え： おひさしぶり．

2 極限と連続性

命題 2.1 (三角不等式). 任意の実数 x, y に対して $|x+y| \leqq |x|+|y|$ が成り立つ.

証明： x, y がともに 0 でなければ $|x|+|y|+|x+y|>0$ だから

$$\begin{aligned}\bigl(|x+y|-|x|-|y|\bigr)\bigl(|x+y|+|x|+|y|\bigr) &= |x+y|^2-\bigl||x|+|y|\bigr|^2=(x+y)^2-(|x|+|y|)^2\\ &= x^2+2xy+y^2-|x|^2-2|x|\,|y|-|y|^2\\ &= x^2+2xy+y^2-x^2-2|xy|-y^2=2(xy-|xy|)\leqq 0\end{aligned}$$

から結論が得られる.

系 2.2. 任意の実数 x, y に対して $\bigl||x|-|y|\bigr| \leqq |x-y|$ が成り立つ.

証明： 三角不等式を用いて

$$|x|=|(x-y)+y|\leqq|x-y|+|y|, \qquad |y|=|(y-x)+x|\leqq|y-x|+|x|=|x-y|+|x|$$

が成り立つことがわかるので $|x|-|y|\leqq|x-y|$, $|y|-|x|\leqq|x-y|$ を得る.

■ド・モルガンの法則　命題 P, Q に対して

「(P かつ Q) でない」 ≡ 「(P でない) または (Q でない)」
「(P または Q) でない」 ≡ 「(P でない) かつ (Q でない)」

である．ここで "≡" は二つの命題が「同値である」すなわち論理的に同じ意味であることを表している.
さらに，不定の文字 x を含む命題 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

「(すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ) でない」 ≡ 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」
「(ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ) でない」 ≡ 「すべての x に対して $P(x)$ が成り立たない」

である.
さて 「P ならば Q」とは「(P でない) または Q」のことである．このことから

「(P ならば Q) でない」 ≡ 「((P でない) または Q) でない」 ≡ 「P かつ (Q でない)」.

2.1 数列の極限

定義 2.3. 実数を成分とする数列 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ が α に収束するとは，任意の正の数 ε に対して次を満たす番号 N が存在することである：任意の n に対して，$n>N$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon$.

例 2.4. 数列 $\{1/n; n=1,2,\dots\}$ は 0 に収束する.
実際，任意の正の実数 ε に対して $N=[1/\varepsilon]+1$ とする[*1]．すると $n>N$ のとき

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\frac{1}{[1/\varepsilon]+1}\leqq\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon.$$

2011 年 10 月 12 日 (2011 年 10 月 19/26 日訂正)

*1 実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表 (Gauss 記号)

例 2.5. 羊羹の三等分.

定義 2.6. 実数を成分とする数列 $\{a_n\}$ が **発散する**とは，$\{a_n\}$ がどんな数 α にも収束しないことである.

例 2.7. 数列 $\{(-1)^n; n = 1, 2, \dots\}$ は発散する．このことを示そう．

数列 $\{a_n\}$ が収束するとは

> ある実数 α で (任意の正の数 ε に対して次を満たす番号 N が存在する：すべての番号 n に対して $n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$)

ということである．これを否定して，数列 $\{a_n\}$ が発散するとは,

> 任意の実数 α に対して次が成り立つ (ある正の数 ε で次を満たすものが存在する：任意の番号 N に対してある番号 n で $n > N$ かつ $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となるものが存在する)

ということである.

さて，この例の場合，すなわち $a_n = (-1)^n$ のとき，(1) $\alpha \neq 1$ のとき，$\varepsilon = |1 - \alpha|$ とおく．このとき，任意の番号 N に対して $n = N + 1$ (N が奇数のとき)，$n = N + 2$ (N が偶数のとき) とおくと，$n > N$ かつ n は偶数だから，$|a_n - \alpha| = |1 - \alpha| = \varepsilon \geqq \varepsilon$ が成り立つ．(2) $\alpha = 1$ のとき，$\varepsilon = 2$ とおく．このとき，任意の番号 N に対して $n = N + 2$ (N が奇数とのき)，$n = N + 1$ (N が偶数のとき) とおくと，$n > N$ かつ n は奇数だから，$|a_n - \alpha| = |-1 - 1| = 2 \geqq \varepsilon$ が成り立つ.

以上より $\{a_n\}$ は収束しない，すなわち発散する.

定義 2.8. 実数を成分とする数列 $\{a_n\}$ が**正の無限大に発散**する，とは任意の実数 M に対して，ある番号 N で次を満たすものが存在することである：任意の番号 n が $n > N$ を満たすならば $a_n > M$.

例 2.9. 数列 $\{n^2; n = 1, 2, \dots\}$ は正の無限大に発散する.

実際，実数 M に対して $N = \max\{[M] + 1, 1\}$ とすると，$n > N$ を満たす番号 n に対して (1) $M \geqq 0$ のとき $N \geqq 1$ だから $a_n = n^2 > N^2 \geqq NM \geqq M$. (2) $M < 0$ のとき $a_n = n^2 > N^2 = 1 \geqq M$.

定義 2.10. 数列 $\{a_n\}$ が上に (下に) **有界である** である，とは，ある実数 M で次を満たすものが存在することである：任意の番号 n に対して $a_n \leqq M$ ($a_n \geqq M$)．とくに $\{a_n\}$ が上に有界かつ下に有界であるときに，単に**有界である**という.

注意 2.11. 数列 $\{a_n\}$ が有界であるための必要十分条件は，次を満たす実数 M が存在することである：任意の番号 n に対して $|a_n| \leqq M$.

命題 2.12. 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば $\{a_n\}$ は有界である.

> **証明：** 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとする．(収束の定義で $\varepsilon = 1$ とすると) ある番号 N で $n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < 1$ となるものが存在する．そこで $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |\alpha| + 1\}$ とおくと $n = 1, \dots, N$ のとき $|a_n| \leqq \max\{|a_1|, \dots, |a_N|\} \leqq M$．また $n > N$ のとき，$|a_n| = |\alpha + (a_n - \alpha)| \leqq |\alpha| + |a_n - \alpha| \leqq |\alpha| + 1 \leqq M$.

例 2.13. 数列 $\{S_n\}$ を

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

によって定めると，この数列は有界でない．とくに $\{S_n\}$ は発散する.

実際

$$|S_n| = S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \int_j^{j+1} \frac{1}{j}\,dx \geqq \sum_{j=1}^{n} \int_j^{j+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1).$$

2.2 関数の極限と連続性

定義 2.14. 実数 a を含む区間から a を除いた点で定義された一変数関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ を満たすとは，任意の正の数 ε に対してある正の数 δ で次を満たすものが存在することである：任意の実数 x が $0 < |x-a| < \delta$ を満たすならば $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.

定義 2.15. 関数 f が a で**連続**である，とは，f が a をふくむある開区間 I で定義され，

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである.

注意 2.16. 関数 f が a で連続であるための必要十分条件は f が a を含む開区間 I で定義されており，かつ，任意の正の数 ε に対して，正の数 δ で次を満たすものが存在することである：$|x-a| < \delta$ を満たす任意の x に対して $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

命題 2.17. 関数 f が a で連続，かつ $f(a) > 0$ ならば a を含む開区間 I で $f(x) > 0$ $(x \in I)$ となるものが存在する.

証明： (注意 2.16 で $\varepsilon = f(a)/2$ として) ある正の数 δ で

$$|x-a| < \delta \qquad \text{ならば} \qquad |f(x)-f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

となるものが存在する．そこで $I = (a-\delta, a+\delta)$ とすると $x \in I$ なら $|x-a| < \delta$ だから

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) \geqq f(a) - |f(x)-f(a)| \geqq f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0.$$

問題

2-1 実数 r に対して，数列 $\{r^n; n = 1, 2 \ldots, \}$ は (1) $|r| < 1$ のとき 0 に収束，(2) $r = 1$ のとき 1 に収束，(3) それ以外のとき発散することを示しなさい.

2-2 定義 2.8 に倣って数列 $\{a_n\}$ が負の無限大に発散する，ということの定義を述べなさい.

2-3 発散する数列で，有界なものの例を挙げなさい．また，有界でない数列で，正の無限大にも負の無限大にも発散しないものの例を挙げなさい.

2-4 次のことはどのように定義するべきか：

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2-5 関数 f が a で連続かつ $f(a) < 0$ のとき，a を含むある開区間 I で $x \in I$ ならば $f(x) < 0$ となるものが存在する.