2011 年 10 月 19 日 (2011 年 10 月 26 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 3

前回の補足

- 「P ならば Q」とその否定についてのご質問をいくつかいただきました．まず「P ならば Q」とは 「(P でない) または Q」のこと，というのがしっくりこないようですね．これを “ならば” の定義とする，というのが一番 “簡単” です (!)．枠組みをはっきりさせていないので，多少曖昧な言い方になりますが，P, Q はともに “真”, “偽” いずれかの値をとる文字と思いましょう．それらに対して「P ならば Q」も真偽いずれかの値をとります．それが P，Q の真偽によってどのように定まるかを考えます．(1) P が偽のときは Q の真偽にかかわらず「P ならば Q」は真です．(2) Q が真のときは P の真偽にかかわらず「P ならば Q」は真です．(1), (2) 以外のときは「P ならば Q」は偽です．すなわち「P ならば Q」が真であることと「(P が偽) または (Q が真)」であることは同値です．
- 不等号に関していくつかのご指摘がありました．一般に $x < y$ ならば $x \leqq y$ が成り立っています．(「$x \leqq y$」の定義は「$x < y$ または $x = y$」でした)．したがって，実際には $x < y$ なのだけれども $x \leqq y$ と書いても間違いではありません (もちろん，そのあとの議論がそれで上手く行けばですが)．たとえば，講義資料 2, 8 ページ下から 11 行目の
$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) \geqq f(a) - |f(x) - f(a)| \boxed{\geqq} f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0.$$
の枠をつけた不等号は，実際には “$>$” ですが，“$\geqq$” でも何も間違っていないわけです．
- 記号 max, min について：
$$\max\{x, y\} := (x \text{ と } y \text{ のうち小さくない方}), \qquad \min\{x, y\} := (x \text{ と } y \text{ のうち大きくない方}),$$
すなわち
$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & (x \geqq y \text{ のとき}) \\ y & (x < y \text{ のとき}), \end{cases} \qquad \min\{x, y\} = \begin{cases} x & (x \leqq y \text{ のとき}) \\ y & (x > y \text{ のとき}) \end{cases}$$
と定めます．すると，
$$\min\{x, y\} \leqq x \quad \text{かつ} \quad \min\{x, y\} \leqq y, \qquad \min\{x, y\} = x \quad \text{または} \quad \min\{x, y\} = y,$$
が成り立ちます．
たとえば $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ を示す際，与えられた正の数 ε に対して $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\}$ とおきました．このようにすると，$|x - 1| < \delta$ のとき
$$|x^2 - 1| = |x - 1|\,|x - 1 + 2| \leqq |x - 1|\,(|x - 1| + 2) < \delta(\delta + 2)$$
となりますが，$\delta \leqq \frac{\varepsilon}{3}$, かつ $\delta \leqq 1$ が成り立つので，右辺は ε 以下になることがわかります．
δ をどうしてこのようにおいたのか，という質問がありましたが，結論を満たすように “適当” に決めたのです．
- 講義資料 2, 例 2.4 の $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$，命題 2.17 の $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$，上のコメントの例の δ のとり方など，(1) なぜこうなるのですか，(2) どうしてこうおくのですか (3) どうやってこの値を見つけるのですか，という問いをいただきました．(1) こうなるのではなく，このようにおくのです．(2) このようにおくとうまくいくからです．(3) 導きたい結論から逆算して “適当に” 定めます．

前回までの訂正

- 板書で三角不等式が $|ab| = |a|\,|b|$ になってましたよ，というご指摘がありました．(ご指摘には不等号がついていたのですが，薄くなっているのでどちらか判別できません...) 三角不等式は $|a+b| \leqq |a| + |b|$ ですね．$|ab| = |a|\,|b|$ という等式も成り立ちます．
- $\therefore$ について：これは (桑畑といいましたが) 茶畑の記号だそうです．数学の文脈では $\therefore$ は therefore, $\because$ は because と読みます．
- 講義資料 2, 3 ページ 13 行目：佐賀 ⇒ 差が
- 講義資料 2, 3 ページ下から 21 行目：狂言 ⇒ 極限
- 講義資料 2, 6 ページ 10 行目の右側の式：$|y| = |(y-x)+y| \Rightarrow |y| = |(y-x)+x|$
- 講義資料 2, 6 ページ脚注：最小の整数 ⇒ 最大の整数
- 講義資料 2, 7 ページ 13 行目：奇数とのき ⇒ 奇数のとき
- 講義資料 2, 7 ページ下から 13 行目：講義資料 4 参照
- 講義資料 2, 7 ページ下から 4 行目：$|a_n| = |\alpha - (a_n - \alpha)| \Rightarrow |a_n| = |\alpha + (a_n - \alpha)|$
- 講義資料 2, 8 ページ 6 行目：$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$

授業に関する御意見

- ヨウカンの 3 等分の話を聞いて，コンパスと定規を無限回使えば，角の 3 等分が可能と書かれた本を思い出しました．
  山田のコメント： そうです，それです．
- 先生は何故羊かんを例として選んだのですか．昨日お召し上がりになったのですか？
  山田のコメント： 毎年この例でやっているので．
- 羊羹でたとえるのは初めて見ました．金の板がどかなら聞いたことがありましたが.... **山田のコメント：** 食べ物の方が身につきやすい．
- 理論ばかの分野に入ってた! **山田のコメント：** すぐに計算（の面倒なやつ）をいっぱいやらせてあげます．
- 思考力が著しく低下しています ↘↘↘ **山田のコメント：** me, too
- 徹夜って，するもんじゃないですね．(13 日の 1 限はほぼ全部寝てしまいました) **山田のコメント：** それは困った．山田の歳だともう徹夜は不可能．
- 今回も良い授業でした． **山田のコメント：** そう?
- 証明の仕方は少し理解しにくいところもあったけれど，授業，復習を通して学べて面白かったです． **山田のコメント：** よかったです．
- 具体例から雑談に内容がそれるのはかまいませんが，実際に何が言いたいのかいまいち分からないときがあります． **山田のコメント：** わかってくれると嬉しいです．
- むずかしいよ．
  山田のコメント： それはよかった．易しいことばかりやっていては退屈ですものね．
- 授業を頑張ってください!! **山田のコメント：** いやです．
- 書くことがない．ただの白紙のようだ． **山田のコメント：** そうは見えません．
- 最近コメントが思い浮かばないので，無難に問題問いていますφ（..）
- 後期も独特のふいんき（原文ママ）(山田注：“原文ママ” までこめて原文ママ) が出てますね． **山田のコメント：** めんどくさいことさせて...
- 東工大生として，ガンダムシリーズの知識は常識として知っておかなければいけないのでしょうか？私はガンダムシリーズも全く見たことがなく，先日放送されたガンダム AGE を見て面白そうだと感じてしまった口なのですがやっていけるのでしょうか．
  山田のコメント： 私もです．今回口にしたのは “∀” を「日常に」使う例が他になかったからです．

質問と回答

質問： 羊かんの 3 等分と同じ考え方で $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{k-1}$ $(k > 1, k \in \boldsymbol{N})$ であってますか．

お答え： どうでしょう．高等学校の範囲ですよね．

質問： 収束しなければ発散，発散しなければ収束で良いですか? **お答え：** よいです．

質問： 授業で「振動する」は「発散する」の「一種」だと分かったのですが，「一種」ということは，他にも発散するものの中から特別な呼び名のものがあるのですか？もし，あったらどんな関数（原文ママ）ですか?

お答え： “関数” はたぶん “数列”．正 (負) の無限大に発散する，というやつがあります．

質問： 「ある番号 N」は何故「値」でなく「番号」という表現にするのですか?

お答え： 正の整数であることをはっきりさせるためです．

質問： 例 2.4 の $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[1/\varepsilon]+1} \leqq \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$ でガウス記号を導入したのは何故でしょうか．$N = \frac{1}{\varepsilon} + 1$ として $\frac{1}{N} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}+1} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$ で十分だと思うのですが.

お答え： 一般に $1/\varepsilon$ は整数になりません．N を “番号” としてしまったので (そうでなくても良いと思いますが) 整数にするためにガウス記号をとりました．

質問： 講義資料 2，例 2.4 で，$|\frac{1}{n} - 0|$ のように -0 のような形をとっている理由が分からないです．

お答え： 極限の定義の形 (の $\alpha = 0$ の場合) に合わせた．

質問： 講義資料 6 ページの例 2.4 で ε が「任意の」正の数で，$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ とおくことができるのは，どれだけ大きな ε をとっても，それより大きい N が必ず存在することが保証されているからですか?

お答え： そうです．この件は，次回に言及します．キーワードは “アルキメデスの公理”．

質問： 講義資料 7 ページ，定義 2.10, 注意 2.11 について，数列 $\{a_n\}$ が有界であるための必要十分条件は「任意の番号 N に対して $|a_n| \leqq M$ を満たす実数 M が存在する」だそうですが，これだと「数列 $\{a_n\}$ が下に有界である」すなわち「任意の番号 N に対して $a_n \geqq M$ を満たす実数 M が存在する」ということにならない気がするのですが，どうなんでしょうか.

お答え： $|a_n| \leqq M$ なら $a_n \geqq -M$ です.

質問： p 7 での例 2.7 で $|a_n - \alpha| = |1-\alpha| = \varepsilon \geqq \varepsilon$ となるところで $\varepsilon \geqq \varepsilon$ となっているのは何故ですか? 上に書いてある "$|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となるものが存在する" からきたものですか?

お答え： "…" 内のようなことを示すのですから，その形に合わせたのです.

質問： 講義資料 p.8 の 2 行目で $\{S_n\}$ が有界でないことを $|S_n| \geqq \log(n+1)$ として証明していますが，「$\geqq$」でなく「$>$」として証明しなければならないのでは?

お答え： 定義からするとそうですね．ただ，有界性の議論では "等号つき" と "等号なし" はあまり違いがありません．実際，上の議論でも $|S_n| > \frac{1}{2}\log(n+1)$ ですね.

質問： "有界である" って定義 2.10 からだと $a_n = M$ をみたす n がなくてもよいのですか? ($a_n < M$ であれば $a_n \leqq M$ を満たしています) だから問 2-3 の後半を満たすような例はないような気がするのですが.

お答え： 前半：よいです．たとえば，ヨウカンの例で扱った S_n は上に有界で $S_n \leqq \frac{1}{3}$ ですが $S_n = \frac{1}{3}$ となる n は存在しません．後半：なぜ "だから" とくるのかわかりませんが，$1, -1, 2, -2, 3, -3\ldots$ という数列は条件を満たしていませんか?

質問： 講義資料の $\sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1}\frac{1}{j}dx \geqq \sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1}\frac{1}{x}dx$ が何故なり立つかわかりません.

お答え： 区間 $[j, j+1]$ で $\frac{1}{j} \geqq \frac{1}{x}$.

質問： プリント 2-1 (2) について．N について $1^N = 1$ である．任意の正の実数に対して $n > N$ のとき $|1^n - 1| = |1^N - 1| = 0 < \varepsilon$ がすべての N で成立する．よって $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$ である (証終) は証明として適当でしょうか．それとも $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ とでも定義しなければならないでしょうか.

お答え： 最後の質問については不要．"すべての N で" は極限の定義に含まれていないフレーズなので気になりますね．こうすればよいでしょうか：正の数 ε を任意にとる．このとき $n > 0$ を満たすすべての番号 n に対して $|1^n - 1| = 0 < \varepsilon$.

質問： 2-1 (3) が難しかったです．[1] $r = -1$ のとき略 (講義資料より)．[2] $r > 1$ のとき定理「$a_n > 0$ のとき $\lim_{n\to 0} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \infty$」(証明は逆数を取れば楽）を使って発散を示す．[3] $r < -1$ のとき…(以下略) とやったのですが，もっと良い方法はあるのでしょうか.

お答え： [2] の「…」の部分はちゃんと示せますか? (そんなに難しくないですよね) [2], [3] は命題 2.12 (の対偶) を用いれば容易．すなわち，数列 $\{r^n\}$ が有界でないことを示せば結論が得られます．非有界性は次により示すことができます：$|r| > 1$ のとき $|r| = 1 + h$ $(h > 0)$ とおくと，

$$|r^n| = |r|^n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}n^2h^2 + \ldots h^n \geqq 1 + nh.$$

質問： 問題 2-2; 実数を成分とする数列 $\{a_n\}$ が負の無限大に発散する，とは任意の実数 M に対してある番号 N で次を満たすものが存在すること：任意の番号 n が $n > N$ を満たすならば $a_n < M$．良いでしょうか.

お答え： よいです.

質問： 2-3 発散する数列で有界なものの例：$\{\sin\frac{n\pi}{4};, n = 1, 2, \ldots\}$, 有界でない数列で正の無限大にも負の無限大にも発散しないものの例：$\{n\cos\frac{n\pi}{4}; n = 1, 2, \ldots\}$．判定お願いします.

お答え： OK です.

質問： 問題 2-5 の証明は下のようであっていますか.
[証明] 注意 2.16 $\varepsilon = \varepsilon = -\frac{f(a)}{2}$ として，ある正の数 δ で $|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2}$ となるものが存在する．そこで $I = (a-\delta, a+\delta)$ とすると，$x \in I$ ならば $|x-a| < \delta$ だから $f(x) = f(a) + f(x) - f(a) \leqq f(a) + |f(x) - f(a)| < f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} < 0 \therefore f(x) < 0$.

お答え： ok です．もう少しいえば，最初の ε が 正であることの確認が必要．最後の $\therefore$ 以下は "I 上で $f(x) < 0$" としたほうがよいでしょう.

質問： 命題 2.17 を持ち出した理由はなんですか．雰囲気としては，定義 2.14 と定義 2.15 を理解させる（使わせる）ためのものなのかなとも思ったんですが，イマイチ釈然としません.

お答え： 前回の講義でこの事実を用いた (微分の符号と増加減少の関係)．それを今回証明した（と申し上げたはず).

質問： 前回の講義資料 7 (原文ママ）について，

$$F(x)=\log|x|,\qquad G(x)=\begin{cases}\log x & (x>0)\\ \log(-x)+7 & (x<0).\end{cases}$$

$x>0$ のとき $F(x)-G(x)=\log x-\log x=0$, $x<0$ のとき $F(x)-G(x)=\cdots=-7$ であるから，差は定数であると思うのですが，定義域 I が区間でなければならないとはどういうことなのでしょうか.

お答え： 次の関数は定数関数ではありません：

$$h(x)=\begin{cases}0 & (x>0)\\ -7 & (x<0)\end{cases}.$$

質問： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束することの証明方法がわかりません.

お答え： 今回までの内容では証明できない，ということを申し上げたはず.

質問： 「$\{a_n\}$ が上に有界であり，任意の n で $a_{n+1}>a_n$ である」という条件で $\{a_n\}$ が収束すると証明をしてはいけないと高校のときに言われた気がするのですが，なぜでしょうか.

お答え： いけなくありません．今回か次回のテーマになります.

質問： イプシロンを用いた極限の定義では，結論の方から持ってきて証明をしているような気がして，どこか腑に落ちないのですが，どうしたらすっきりと理解できますか？（話の道筋がよく見えないのです）

お答え： 何遍も唱える.

質問： 先生が「基本的に高校の直観的な極限操作は合っている」ようなことをおっしゃっていましたが，そうでない場合はどのようなものがありますか.

お答え： 直観的に扱えないものは追い追いでてくると思います.

質問： $S_n=\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{4^t}$ で $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$ なのに n を任意の実数とすると $S_n<\frac{1}{3}$ になるのは何か不思議ですね.

お答え： n を任意の実数にするんですか? $S_{\sqrt{2}}$ とか?

質問： 羊かんの黒板のかんとプリントのかんの字が違うのですが，どっちが合ってますか.

お答え： プリントです.

質問： 任意の否定があると考えていたのですが，このような考え方でいいのですか.

お答え： どういう考え方か，読み取れません.

質問： 授業中に出てくる様々な定義は，万国共通のものですか？

お答え： 概ねそうです.

質問： $\lim_{x\to 1}x^2=1$ の証明について，δ を先に定めてしまったのを「逆算みたいに」とおっしゃっていたような気がしたのですが，つまりこれは証明をするためのやり方ということですか？

お答え： 質問の意味がわかりません．証明しているんですけど.

質問： 数学は他の科学とは一線をかいている気がしますが他の科学の発展によって「厳密な」証明がより細密化する可能性があるのでしょうか.

お答え： 質問の意味がわかりません．具体的に書いて下さい.

質問： 教科書に「この無限と有限という差が $\sim$ 途轍もなく大きい」とありますが，身近な具体例としてどんなものがありますか?

お答え： 教科書のどこでしょう.

質問： $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p^i}=?$ (p^i は i 番目の素数) この問題が全く解けないです．先生教えておねがい!!!

お答え： どのような文脈ででてきたのでしょう.

質問：

$$\frac{(\text{“全ての素数の積”})}{(\text{“全ての「素数 }-1\text{」の積”})}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^k}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

となるから左辺は発散するという証明は正しいですか?

お答え： 素数であることをどこで使いましたか?

3　連続関数の性質

■連続性 (復習)　区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された関数 f が $a \in I$ で**連続である** とは,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつことである．さらに f が区間 I の各点で連続であるとき f は**区間 I で連続**であるという．区間 I で連続な関数 f を “I 上の連続関数” ということがある．

関数 f が区間 I で連続であるための必要十分条件は，各 $a \in I$ に対して,

(3.1)　任意に正の数 ε を与えると，以下を満たす正の数 δ が存在する：$|x-a| < \delta$, $x \in I$ を満たす任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ がなりたつ.

が成り立つことである.

また (3.1) の否定をすることで，f が a で**連続でない**ための必要十分条件は

(3.2)　以下を満たす正の数 ε が存在する：任意の正の数 δ に対して，$|x-a| < \delta$, $x \in I$ を満たす x で $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$ を満たすものが存在する.

補題 3.1. 区間 I で定義された関数 f が $a \in I$ で連続であるための必要十分条件は，I の点からなり a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$$

が成り立つことである.

証明： 必要性：f が a で連続であるとし，a に収束する I の数列 $\{a_n\}$ をとる．正の数 ε を任意にとると，それに対して $|x-a| < \delta$ かつ $x \in I$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ が存在する (f の連続性)．この δ に対して，番号 N で $n > N$ を満たす任意の n に対して $|a_n - a| < \delta$ となるようなものが存在する．この状況で,

$$n > N \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$$

なので，$f(a_n)$ は $f(a)$ に収束する.
十分性：対偶を示す (証明は概略にとどめる)．すなわち f が a で連続でないならば，a に収束する数列 $\{a_n\}$ で $\{f(a_n)\}$ が $f(a)$ に収束しないものをとることができることを示す．いま (3.2) のような ε をとる．すると，任意の番号 n に対して $|a_n - a| < \frac{1}{n}$, $a_n \in I$ かつ $|f(a_n) - f(a)| \geqq \varepsilon$ となるような a_n をとることができる．このようにして得られた数列 $\{a_n\}$ は a に収束するが，$\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない.

例 3.2. 関数

$$g(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0). \end{cases}$$

は $x = 0$ で連続でない．実際，$a_n = \frac{1}{(2n\pi)}$ とすると $\{a_n\}$ は 0 に収束するが，$g(a_n) = -1/2$ は $g(0) = 1/2$ に収束しない.

補題 3.3. 関数 f，g が区間 I で連続であるとき,

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \qquad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

で定まる関数 $f+g$, $f-g$, fg はそれぞれ I で連続である．さらに $g(x) \neq 0$ ($x \in I$) が成り立つならば f/g も I で連続である．ただし $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

2011 年 10 月 19 日 (2011 年 10 月 26 日訂正)

証明： ここでは $f+g$, f/g の連続性を示し，残りは演習とする：
点 $a\in I$ を一つ固定しておき， 任意に正の数 ε をとる．このとき f, g の連続性から，次を満たす正の数 δ_1, δ_2 が存在する：

$$|x-a|<\delta_1 \quad \text{かつ} \quad x\in I \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |x-a|<\delta_2 \quad \text{かつ} \quad x\in I \quad \Rightarrow \quad |g(x)-g(a)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

そこで $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすると，$\delta>0$ で，$|x-a|<\delta$ ならば $|x-a|<\delta_j$ $(j=1,2)$ が成り立つから，$|x-a|<\delta$ かつ $x\in I$ ならば

$$|(f+g)(x)-(f+g)(a)|=\bigl|\bigl(f(x)-f(a)\bigr)+\bigl(g(x)-g(a)\bigr)\bigr|\leqq|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

したがって $f+g$ は a で連続．a は任意だったから $f+g$ は連続．
次に f/g の連続性を示す：$g(a)\neq 0$ だが，$g(a)>0$ の場合を考えよう．すると，ある正の数 δ_0 で $|x-a|<\delta_0$ ならば $g(x)>\frac{g(a)}{2}$ となるようなものが存在する[*1]．いま $\varepsilon>0$ に対して

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon|g(a)|^2}{2(|g(a)|+|f(a)|)}$$

とおくと，これも正の数で，f, g の連続性から正の数 δ_1, δ_2 で

$$|x-a|<\delta_1 \quad \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon', \qquad |x-a|<\delta_2 \quad \Rightarrow |g(x)-g(a)|<\varepsilon'$$

を満たすものが存在する．そこで $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$ とすると，これは正の数で $|x-a|<\delta$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right|&=\frac{|f(x)g(a)-f(a)g(x)|}{|g(x)|\,|g(a)|}\leqq\frac{|f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)|}{|g(x)|\,|g(a)|}\\&\leqq\frac{|g(a)|\,|f(x)-f(a)|+|f(a)|\,|g(x)-g(a)|}{|g(x)|\,|g(a)|}<\frac{\varepsilon'(|g(a)|+|f(a)|}{\frac{1}{2}|g(a)|^2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

したがって f/g は a で連続である．$g(a)<0$ の場合も同様.

さらに前期で学んだように,

補題 3.4. 関数 f が区間 I で微分可能なら I で連続である．

■実数の連続性　実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は (1) 加減乗除が (0 でわることを除いて) 定義されていて，然るべき性質を満たしている (2) 大小関係が定義され，然るべき性質を満たしている[*2]．このような性質をもつ数の集合を “順序体” という．

実は $\boldsymbol{R}$ を考えなくても，有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ も順序体である．$\boldsymbol{Q}$ になく $\boldsymbol{R}$ がもっている重要な性質が**実数の連続性**である．それを述べよう．

定義 3.5. 空集合でない集合 $A\subset\boldsymbol{R}$ が**上に有界** (**下に有界**) とは次を満たす実数 M が存在することである：任意の $x\in A$ に対して $x\leqq M$ $(x\geqq M)$．この条件を満たす M のことを A の**上界** (**下界**) という．

定義 3.6. 上 (下) に有界な集合 $A\subset\boldsymbol{R}$ の上界 (下界) のうち最小 (最大) のものを A の**上限** (**下限**) といって $\sup A$ $(\inf A)$ で表す.

例 3.7. 区間 $I=(0,1)$, $I'=(0,1]$, $I''=[0,1]$ に対して

$$\sup I=\sup I'=\sup I''=1, \qquad \inf I=\inf I'=\inf I''=0.$$

[*1] 前回の講義資料を参考にして証明せよ．なお，“$x\in I$” は面倒くさいので省略している．
[*2] ここでは深入りしないが，“然るべき性質” とは，小学校，中学校，高等学校で学んだ数の演算の性質，不等式の性質などである．

実数の性質として，次のことを認めよう：

公理 3.8 (実数の連続性)**.** $\boldsymbol{R}$ の上 (下) に有界な部分集合 A は上限 (下限) をもつ．

注意 3.9. 有理数の集合にも有界性，上界，上限などの言葉を定義することができるが，上限の存在は保証されない．実際，$\{x \in \boldsymbol{Q}\,;\, x^2 < 2\}$ は上に有界な有理数の集合だが，有理数の範囲で上限は存在しない．

注意 3.10. 上に有界な集合 $A \subset \boldsymbol{R}$ に対して，α が A の上限であるための必要十分条件は

(1) 任意の $x \in A$ に対して $x \leqq \alpha$,
(2) 任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < x \leqq \alpha$ を満たす $x \in A$ が存在する．

(1) は α が A の上界であることを，(2) は α より小さい数が A の上界でないことを表している．

■中間値の定理

定理 3.11. 閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ を満たしているならば $f(c) = 0$, $a < c < b$ を満たす c が少なくとも一つ存在する．

証明：[証明の概略] 次の集合を考える：

$$A = \{x \in [a, b]\,;\, f(x) < 0\} \subset [a, b]$$

すると $a \in A$ だから $A \neq \emptyset$. さらに b は A の上界だから A は上に有界．したがって公理 3.8 より A の上限 c が存在する．とくに $a \in A$ だから $a \leqq c$. 一方，$c > b$ とすると $d = (b + c)/2$ は $b < d < c$ を満たしている．とくに d は A の上界になっているので，$c = \sup A$ であることに矛盾する．したがって $c \leqq b$. 以上より $c \in [a, b]$ が言えた．
さて $c = \sup A$ であるから，任意の正の整数 n に対して $c - \frac{1}{n} < x_n \leqq c$ を満たす $x_n \in A$ が存在する．このようにして数列 $\{x_n\}$ が得られるが，これは c に収束する．したがって f の連続性から

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

が成り立つ．ここで $x_n \in A$ だから $f(x_n) < 0$. したがって $f(c) \leqq 0$ が成り立つ．もし $f(c) < 0$ なら f の連続性から c を含む区間で $f(x) < 0$ となるが，それは $c = \sup A$ となることに矛盾する．したがって $f(c) = 0$.

■最大・最小値の定理　区間 I で定義された関数 f が $c \in I$ で**最大値** (**最小値**) をとる，とは任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(c)$ $(f(x) \geqq f(c))$ を満たすことである．

定理 3.12. 閉区間 $I = [a, b]$ 上で定義された連続関数 f は，I 上で最大値・最小値をとる．

証明：[証明の概略] 集合

$$B = \{f(x)\,;\, x \in [a, b]\} = \{y\,;\, f(x) = y \text{ となるような } x \in [a, b] \text{ が存在する }\}$$

を考える．
このとき，(1) B は上に有界である．(2) $\beta = \sup B$ とすると $\beta \in B$. (3) $f(c) = \beta$ となる c をとればそれが求めるものである．

もうすこし詳しい証明は次回紹介する．

問題

3-1 補題 3.3 の残りを示しなさい．

3-2 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束するならば $\{a_n + b_n\}$ は $\alpha + \beta$ に収束することを，補題 3.3 に倣って示しなさい．差，積，商の場合はどうか．

3-3 x の多項式で与えられる関数は $\boldsymbol{R}$ で連続である．

3-4 任意の正の数 a に対して $x^n = a$ を満たす正の実数 x がただ一つ存在することを示しなさい．この x のことを $\sqrt[n]{a}$ と書く．

3-5 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数 f に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \qquad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する．

3-6 平均値の定理の証明では，実数の連続性がどのような形で使われているか．