2011 年 10 月 26 日 (2011 年 11 月 2 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 4

お知らせ

- 受講者有志の方が解答作成委員会，というものを作ったそうです．http://blog.goo.ne.jp/love-kotaro/ だそうです．もちろん非公式です．
- 質問用紙 (A5 の紙) を A4 に拡大コピーして提出してくださった方がいらっしゃいます．提出物は一斉にスキャナにかけていますが，サイズが違うとそれだけ別にしてスキャンしなければならず，手間がかかります．やめてください，っていうか山田の仕事の邪魔をしないでください．

前回までの訂正

- 板書の因数分解がちがっていたようです．正しくは
$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \cdots + x_1x_2^{n-2} + x_2^{n-1})$$
です．
- 講義資料 2, 7 ページ，例 2.9: (前回の訂正でも不十分でした)
数列 $\{n^2; n = 1, 2, \dots\}$ は正の無限大に発散する．
実際，実数 M に対して $N = \max\{[M] + 1, 1\}$ とすると，$n > N$ を満たす番号 n に対して (1) $M \geqq 0$ のとき $N \geqq 1$ だから $a_n = n^2 > N^2 \geqq NM \geqq M$. (2) $M < 0$ のとき $a_n = n^2 > N^2 = 1 \geqq M$.
- 講義資料 3，2 ページ，下から 2 行目：とんばるから ⇒ となるから
- 講義資料 3，3 ページ，下から 4 行目：よいでしょう l. ⇒ よいでしょう.
- 講義資料 3，3 ページ，20 行目: だえる ⇒ である
- 講義資料 3，5 ページ，下から 9 行目: $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束する ⇒ $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない
- 講義資料 3，6 ページ，11 行目
$$\varepsilon' = \frac{|g(a)|^2}{2(|g(a)| + |f(a)|)} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon|g(a)|^2}{2(|g(a)| + |f(a)|)}$$
- 講義資料 3，7 ページ，下から 14 行目: 任意の n ⇒ 任意の正の整数 n
- 講義資料 3，7 ページ，14 行目: 上界 c ⇒ 上限 c
- 講義資料 3，7 ページ，下から 5 行目: $\{y\ f(x) = y\ \dots\}$ ⇒ $\{y\,;f(x) = y\ \dots\}$

授業に関する御意見

- 回答（原文ママ．山田注：解答のことか）作成委員会があったらいいなー　山田のコメント：http://blog.goo.ne.jp/love-kotaro を参照
  山田のコメント： だそうです．上記，全部“原文ママ”です．
- 今回の板書はちょっと見づらいですけど．　**山田のコメント：** Sorry!
- 黒板が「0」から始まると，その授業のテーマが明確になって若干分かり易いです．
  山田のコメント： 了解.
- 講義資料 p. 6 の「なお“$x \in I$”は面倒くさいので省略している」ってむしろ字数が増えて面倒になってる気が. . .
  山田のコメント： そうかも
- $\delta(\delta + 2) \leqq \frac{\varepsilon}{3}(1 + 2)$ がいまひとつしっくりこない.
  山田のコメント： 理屈はわかりますよね.
- 未だに，後期が何をやっているのかよく分からないままです.
  山田のコメント： そんなもんだと思います.
- がんばってみます.　**山田のコメント：** はいはい
- 実数の連続性について知れてよかったです.　**山田のコメント：** それはよかった.
- 難しい!
- むずかしい!　**山田のコメント：** それはよかった．せっかく大学にきたんだから，易しいことばっかじゃね.
- なぜかねむくなります.　**山田のコメント：** おやすみ
- 「次の数学何の話？」「愛の話」という言葉を友人から言われた直後に授業で複素数を初めて習いました．もう何年前だろうか. . .

山田のコメント： 地球をすくってくださいね.

- $\frac{355}{113}$ ネタを塾で使わせていただきました!　**山田のコメント：** よーございました.
- 工大祭の仕事が多すぎて忙しいけど頑張ります．前回の質問は妙なのが多かったみたいですね．おつかれさまです.
  山田のコメント： 今回も. . .
- デデキント節電 := 東工大の建物の集合 K について $K = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ になるように集合 A, B をとる．$a \in A$, $b \in B$ となるような建物 a, b を任意の選んだとき先月よりもどれだけ電力の使用を控えたかを表す関数 f を定めて $f(a) < f(b)$ が成立する.
  山田のコメント： そうですか
- どんどん人がいなくなっていますね.　**山田のコメント：** さむいね.
- 今日の先生はいつもより元気な気がします.　**山田のコメント：** そんなことはありません.

質問と回答

質問： 関数 f が連続でないことの証明で，$|x - \alpha| < \delta$ x I を満たす x は「ある」x でしょうか.

お答え： そうです.

質問： f が a で連続でないことを調べるときには，任意の数列 x_n において $\lim_{n\to\infty}(x_n) \neq f(a)$ を調べる方が楽ですか?

お答え： これは連続でないための条件になっていません.

質問： 補題 3.1 で，a に収束する任意の数列 $\{x_n\}$ という言いかえは前期でも不連続を示すのに利用しましたよね．今のところはただ収束の定義が改めてされて，それに合わせて説明も変わっているだけですよね.

お答え： そうです．証明もきちんとつけました，ということだと思ってください.

質問： 上界や下界の意味がよく分かりません.

お答え： そうですか.

質問： 上限 (下限) は最大値 (最小値) と違いますか? どんなとき上限 = 最大値ですか? 例をあげて教えて欲しいです.

お答え： 上限，下限の定義は講義資料参照．一方，実数の集合 $A \subset \boldsymbol{R}$ に対して α が A の最大値である，とは (1) $\alpha \in A$, かつ (2) 任意の $x \in A$ に対して $x \leqq \alpha$ となることです．(2) の条件は α が A の上界となることです.
一般に A の上界は A の要素とは限りませんが，とくにそれが A の要素であるとき最大値というのです．とくに A の最大値は A の上限です．実際，$\alpha \in A$ が A の最大値なら A の上界であり，α より小さいどんな数も (それより大きい A の要素をもつので) A の上界ではありません．すなわち α は上界の最小数だから，上限です.
たとえば $I = (0, 1)$ の上限は 1 ですが，$1 \notin I$ なので 1 は I の最大値ではありません．さらに I は最大値を持ちません．一方 $J = [0, 1]$ の上限も 1 で，$1 \in J$ だから 1 は J の最大値です.

質問： 例 3.7, $\sup I = 1$ は何で?

お答え： 示してみましょう．この例では $I = (0, 1)$ (開区間) でした．(1) $x \in I$ なら $x \leqq 1$ なので 1 は I の上界である．(2) 正の数 ε に対して $y = \max\{0, 1 - \varepsilon/2\}$ とおくと，$y \in I$ かつ $1 - \varepsilon < y$ なので $1 - \varepsilon$ は I の上界ではない．以上から 1 は I の上界の最小数，すなわち I の上限である.

質問： $\boldsymbol{Q}$ の範囲には上限が無い理由がよくわからなかった．教科書には “一般には存在しない” とあるが，存在する場合もあるのか?

お答え： 有理数だけを考えても，区間 $(0, 1)$ の上限は 1 です.

質問： 等比数列の和の公式ってどういう意味だったんですか? $1 + r + r^2 + \ldots r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ から $0 = x_2^n - x_1^n$ 両辺を x_1^n で割って $1 - (\frac{x_2}{x_1})^n$ として $r = x_2/x_1$ を代入して整理したってことですか?

お答え： そうです.

質問： 公理 3.8 以外の実数の定義の仕方というものはどんなものがあるのでしょうか.

お答え： それが今回のテーマ.

質問： 実数全体の連続性をどうやって証明するんですか．証明する必要はありますか.

お答え： あなたが考えている “実数全体の連続性” とはなんでしょう．“実数の連続性” という言葉を明確に定義できますか? この講義では公理 3.8 を “実数の連続性” といいます．公理という言葉は，講義で説明したとおり (1) このことを (証明することなしに) みとめ，(2) 実数全体の集合はこの性質を満たすものである，として議論する命題のことです.

質問： 「上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合は上限をもつ」というのは実数が連続であることと同じ意味ですか?

お答え： 「実数が連続である」とはどう言うことでしょう．ご質問の命題 (公理) のことをここでは「実数の連続性」とよんでいるのです.

質問： 授業で「上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合は上限をもつ」というのは公理で証明をしていませんでしたが，いままであたりまえと思えるようなことを厳密に証明してきたのに，今回はできないというのはなんか納得いかないです．証明

してください．

お答え： この命題を証明するには「実数」というものが別口に定義されている必要があります．「実数とは以下の性質をもつものである...」という言明が別にあって，それから上の命題を証明することはできますが，その言明も上と同じようなものです．どれを出発点にするか，ということで今回は上限の存在を出発点にしたわけです．

質問： 実数の連続性について，公理の説明が良く分かりません．そこからどう連続性とつながるんですか．

お答え： 公理 3.8 のことを「実数の連続性」という．

質問： 補題 3.3 の $|x-a|<\delta_1$ や $|x-a|<\delta_2$ の δ_1, δ_2 を定義する必要がわかりません．

お答え： ご質問の意味がよく分からないのですが，“必要ない” とするならばこれらを使わないで証明しているはずですが，いかがでしょうか．すぐ下の式の式変形の一つ一つの理由を考えれば必要性はわかると思いますが．

質問： $(fg)(x)=f(x)g(x)$ はどうやって証明しますか．

お答え： fg という関数はこのように定義する，ということです．証明すべきことではありません．ひょっとして fg の連続性をどうやって示すかということでしょうか．そうなら，そのように書いてください．

質問： f, g: 連続 $\Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(fg)(x)=f(x)g(x)$: 連続，と板書であったのですが，あまりにも自明だから証明せずに用いたのですか? 上の和の方は連続だと分かるのですが，下の積の方が分からなかったので説明お願いします．

お答え： “あまりにも自明” ではありません．講義資料の補題 3.3 です．“分かる” とおっしゃっている “和の方” はここで証明が与えてあります．これで分かりますか? 積の方は証明がかいてありません．商の連続性の証明の真似をして示してみましょう．

質問： 補題 3.3 について「関数 f, g が区間 I で連続であるとき $(f-g)(x):=f(x)-g(x)$ で定まる関数 $f-g$ は区間 I で連続である」の証明は，「$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$ で定まる関数 $f+g$ は区間 I で連続である」ことを用いて（これは証明済みとする）$h:=-g$ とすることで $(f+h)(x)=(\text{中略})=(f-g)(x)$ より $f-g$ は I で連続である，という感じでどうでしょうか?

お答え： 「$-g$ が連続である」ということが示されていれば ok ですね．

質問： 今後，数列の極限を求めよ，という問題がでたら ε, N を使って証明しなければいけないのですか?

お答え： 問題によります．“求める” には高等学校で学んだような方法がすべて使えます．“証明” には講義で扱っているような議論が必要な場合 “も” あります．

質問： 集合とか論理とかド・モルガンとか... というのは最初覚えてしまうものなんですか? $\langle P$ ならば $Q\rangle \equiv \langle \text{not } P$ or $Q\rangle \equiv P$ and $\langle \text{not } Q\rangle$ みたいなのはそれこそ前回の質問で答えてもらったように「唱える」しかないのでしょうか？（数学に暗記を用いることへの抵抗が大きいのですが）

お答え： 2 つめの $\equiv$ はちがっていますね．唱えているうちに納得してきます．納得すれば，普通に言語として使えます．唱えるためには覚えなければいけません．それだけです．

質問： 演習で ε-δ 論法と出てきて，それをレポートの問題でも使用する必要があるようなのですが，ε-δ 論法とはどういうものでどうやって使えばよいのでしょうか．レポート課題：$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ が $x=a$ で連続であることを ε-δ 論法を用いて厳密に証明せよ．

お答え： 講義資料 3, (3.1) 式のような連続性 (極限) の表示やその使い方のことを慣用的に ε-δ 論法 というようです．第 2 回講義で $f(x)=x^2$ が $x=1$ で連続であることを示してみたと思います．その “まね” をしてみてください．

質問： 先週の定義 2.3, 2.14 が実はあの ε-δ 論法だったのですね... うまく δ, N を見つけるためにはやはり慣れるしかありませんか?

お答え： そうだと思います．

質問： δ は任意の実数ですが，取り方によっては収束したりしなかったりすることがあるような気がします．何か決まりみたいなものはないのですか．

お答え： 極限の定義の δ は任意の実数ではありません．

質問： 先生は $\delta(\delta+2)\geqq\varepsilon$ のところから，$\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{3},1\}$ としました．「$\min\{a,b\}$ は a, b で小さい方」と説明されましたが，$\delta(\delta+2)$ の δ には $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, $\delta+2$ には $\delta=1$ と都合よく使い分けていいんですか．たとえば，$\frac{\varepsilon}{3}<1$ なら $\frac{\varepsilon}{3}(\frac{\varepsilon}{3}+2)$ とはならないのですか？ $\rightarrow \frac{\varepsilon}{3}(\frac{\varepsilon}{3}+2)<\frac{\varepsilon}{3}(1+2)<$ っていう作業が省略されてるんですか?

お答え： $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{3},1\}$ から (1) $\delta\leqq\varepsilon/3$, かつ (2) $\delta\leqq 1$ が成り立つ．“かつ” ですから (1) と (2) はどちらも成立します．このとき，(1) から $\delta\leqq\varepsilon/3$, (2) から $\delta+2\leqq 3$ なのでこの二つの不等式を掛けて $\delta(\delta+2)\leqq(\varepsilon/3)\times 3$. なお，「$\min\{a,b\}$ は a, b で小さい方」とは説明していません．「a と b のうち大きくない方」です．

質問： $\inf I$ はどうよむのですか? なんの略ですか?

お答え： 「I の下限」, infinimum.

質問： $\sup I$ て何と読むのですか? superior の略ですか?

お答え： 「I の上限」, superimum.

質問： ε-N 論法，ε-δ 論法という言葉を資料，授業中には使っていなかったかと思いますが，何か理由があるのでしょうか.

お答え： 使う必要がないからです．極限の定義は，講義資料にかかれているもの．それだけなので．内容を忘れて変なお題目だけ残っているのもいかがなものかと思いますし.

質問： p 6. まん中 $|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}| =\sim$ の証明が意味不明なんですが?

お答え： どこが不明ですか? どこまで理解できて，どこから分からなくなったかを明示していただかなければ答えようがありません.

質問： 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して $x \in U_\delta(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\} \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - b| < \varepsilon$ となる正数 $\delta < 0$ を選ぶことができる」の「$\setminus\{\boldsymbol{a}\}$」とはどういう意味ですか?

お答え： 集合 X, Y に対して $X \setminus Y = \{x \,|\, x \in X \text{ かつ } y \notin Y\}$, すなわち X の要素のうち Y の要素でないもの全体の集まりです．集合の "引き算" にあたる演算です.

質問： 3-4: $x^n = a$ をみたす $x(>0)$ についてすくなくとも $x = \sqrt[n]{a}$ が存在する．次に (略：一意性の証明).

お答え： 前半はこれじゃだめ．この問題では $\sqrt[n]{a}$ と書くべき実数が存在することを示して欲しいのだから．もちろん「$x^n = a$ となる正の数 x」以外の方法で $\sqrt[n]{a}$ を定義しているのなら別ですが.

質問： 3-5: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ の証明が分かりません.

お答え： 関数 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ に平均値の定理を適用せよ.

質問： 講義資料 p. 8 の問題 3-6 は，平均値の定理の証明には Rolle の定理を証明する必要があり，Rolle の定理を証明するには最大・最小値の定理が必要で，それの証明のために実数の連続性が必要 (「(2) $\beta = \sup B$ とすると $\beta \in B$」の $\beta = \sup B$ の存在を示すために必要) である，ということでいいですか.

お答え： よいです.

質問： 平均値の定理の証明のことなんですが，実数の連続性は，連続である関数が存在することの必要条件なのでしょうか.

質問： 平均値の定理の証明で，実数の連続性は，連続である関数が存在することの必要条件として使われているのでしょうか.

お答え： 違います．たとえば多項式で表される関数は有理数の範囲に限っても連続です.

4 実数の連続性

■実数

- $\boldsymbol{R}$ には加減乗除の演算が定義されており，しかるべき性質をみたしている[*1].
- 大小関係 "$\leqq$" という全順序が定義されている.
- 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の部分集合だが, 実数 $a, b \in \boldsymbol{R}$ が $a < b$ を満たすならば，$a < x < b$ を満たす有理数 x が存在する[*2]

ここに挙げた性質は有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ も満たしていることに注意する．$\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{Q}$ より真に大きい集合である，ということを述べているのが次の**実数の連続性**である.

■有界な部分集合と上限・下限の存在 (前回の復習)

定義 4.1. 実数の部分集合 $X \subset \boldsymbol{R}$ が**上に有界**であるとは，次の条件を満たす実数 m が存在することである：任意の $x \in X$ に対して $x \leqq m$．このような m を X の**上界**という.

一般に m が X の上界ならば，m 以上の実数は X の上界である．X の上界全体の集合が最小値をもつとき，その最小値 m_0 を X の**上限**といい，$\sup X$ と表す.

注意 4.2. 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ に対しても有界性, 上界, 上限が定義される．たとえば, $Y := \{x \in \boldsymbol{Q} \,|\, x^2 \leqq 2\}$ は上に有界な $\boldsymbol{Q}$ の部分集合である．実際，$Y \ni x$ に対して $x \geqq 1$ なら $x \leqq x^2 \leqq 2$ なので Y は上に有界で, 2 はその上界である．しかし，その上限は $\boldsymbol{Q}$ には存在しない.

ここで，実数の連続性として次を成り立つものとして話をすすめる：

公理 4.3 (実数の連続性)**.** $\boldsymbol{R}$ の上に有界な部分集合は上限をもつ.

定理 4.4 (アルキメデスの原理)**.** 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ は上に有界でない．さらに，任意の正の数 ε に対して $\{n\varepsilon\,;\, n \in \boldsymbol{N}\}$ は上に有界でない.

証明： 後半のみを示す．もし，$X := \{n\varepsilon\,;\, n \in \boldsymbol{N}\}$ が上に有界であるとすると，$\sup X = \alpha$ が一つ存在する．このとき，$\alpha - (\varepsilon/2) < x \leqq \alpha$ となる X の要素が存在するが，X の定義から，この x は $x = m\varepsilon$ (m は自然数) と書ける．いま $y = (m+1)\varepsilon$ とすると $y \in X$ であるが，$y = x + \varepsilon \geqq \alpha + \varepsilon/2 > \alpha$ となり α が X の上界であることに反する.

■単調列の収束 実数の数列 $\{a_n\}$ が上に有界である，とはそのすべての項を集めた $\boldsymbol{R}$ の部分集合が上に有界となることである.

また，数列 $\{a_n\}$ が**単調非減少**であるとは，任意の番号 $j = 1, 2, \dots$ に対して $a_j \leqq a_{j+1}$ が成り立つことである.

定義 4.5. 一方，数列 $\{a_n\}$ が実数 a に**収束する**とは，任意の正の数 ε に対して，次を満たす番号 N が存在

2011 年 10 月 26 日 (2011 年 11 月 2 日訂正)

[*1] それはなんですか，と訊かないこと．代数学の言葉では "体をなす" ということだが，小学校以来用いている算術の法則が成り立つということである.

[*2] このことを $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の**稠密** (ちょうみつ，またはちゅうみつ) な部分集合である，という.

することである：

$$n>N \qquad \text{ならば} \qquad |a_n - a| < \varepsilon.$$

このとき a は $\{a_n\}$ の**極限値**であるといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と書く．

注意 4.6. 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，その極限値はただひとつしかない．実際，$\{a_n\}$ が a と b に収束すると仮定すると，

$$|b-a| = |b - a_n + a_n - a| \leqq |b - a_n| + |a_n - a| = |a_n - b| + |a_n - a|.$$

ここで，任意の正の数 ε に対して $n \geqq N$ なら $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つような N をとることができるので，任意の ε に対して $|b-a| < \varepsilon$．したがって $b = a$．

次が成り立つ．

定理 4.7. 実数の上に有界な単調非減少数列は収束する．

注意 4.8. いま，$\{p_n\}$ を，0 から 9 までの自然数の列とする．

$$x_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{10^j} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

と定めると，$\{x_n\}$ は単調非減少数列である．一方，任意の n に対して

$$x_n \leqq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} \leqq \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

したがって $\{x_n\}$ は上に有界なので，極限をもつ．これが，無限小数

$$0.p_1p_2p_3\dots$$

が表す実数である．

系 4.9 (区間縮小法)**.** $\boldsymbol{R}$ の閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \dots)$ で $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ かつ $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ となるものに対して，I_n $(n = 1, 2, \dots)$ すべてに含まれる $c \in \boldsymbol{R}$ がただ一つ存在する．

> **証明：** (概略にとどめる) $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ であることから $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はそれぞれ上に有界 (下に有界) 単調非減少 (非増加) な数列である．そこで，それらの極限値を α, β とすると $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ であることから $\alpha = \beta$．その値を c とすると，これが求めるものである．

■コーシー列

定義 4.10. 数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列**であるとは，任意の正の数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである：

$$m, n \geqq N \qquad \text{ならば} \qquad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

補題 4.11. コーシー列は有界である．

証明: コーシー列 $\{a_n\}$ に対して, 番号 N を $|a_m-a_n|<1$ $(m,n \geqq N)$ となるようにとる. すると, $n \geqq N$ ならば $|a_n|=|a_n-a_N+a_N| \leqq 1+|a_N|$ である. したがって, 任意の n に対して $|a_n|$ は $\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{N-1}|,|a_N|+1\}$ の最大値を超えない.

補題 4.12. 収束する数列はコーシー列である.

証明: 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとする. このとき, 任意の正の数 ε に対して, 番号 N で $n>N$ ならば $|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$ となるようなものをとることができる. この番号 N に対して, $m,n>N$ ならば

$$|a_m-a_n|=|(a_m-\alpha)-(a_n-\alpha)| \leqq |a_m-\alpha|+|a_n-\alpha|<\varepsilon.$$

したがって $\{a_n\}$ はコーシー列である.

定理 4.7 を用いると次が示せる:

定理 4.13. コーシー列は収束する.

■切断

定義 4.14. 実数 $\boldsymbol{R}$ の切断とは $\boldsymbol{R}$ の 2 つの部分集合 A, B の組 (A,B) で次を満たすものである:

- $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
- $A \cup B = \boldsymbol{R}$, $A \cap B = \emptyset$,
- 任意の $a \in A$, $b \in B$ に対して $a<b$.

定理 4.15 (デデキント切断)**.** 組 (A,B) を $\boldsymbol{R}$ の切断とすると, A に最大値が存在するか, B に最小値が存在する.

注意 4.16. 上限の存在, 有界な単調列の収束, 区間縮小法, デデキント切断の性質, コーシー列の収束は, 互いに同値である. (いくつかの命題は, それに "アルキメデスの原理" を付け加える必要があるが). すなわち, これらの命題が実数の連続性を表しているといえる.

問題

4-1 上に有界な有理数の単調非減少数列で，有理数に収束しない例を挙げなさい.

4-2 定理 4.7 を次のようにして証明しなさい：
- 上に有界な単調非減少数列 $\{a_n\}$ の項全体からなる集合 A の上界を α とする.
- 任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < a_N < \alpha$ となる番号 N が存在する.
- $n \geqq N$ のとき $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

4-3 すべての項が有理数であるようなコーシー列で，有理数に収束しないものの例をあげなさい.

4-4 定理 4.13 を，次のようにして示しなさい：
- コーシー列 $\{a_n\}$ は有界であるから，任意の番号 m に対して $A_m = \{a_n \,|\, n \geqq m\}$ は有界である.
- とくに $b_m = \inf A_m$ とすると，b_m は上に有界な単調非減少数列．その極限値 β が $\{a_n\}$ の極限値である.

4-5 有理数 $\boldsymbol{Q}$ の切断 (A, B) で A の最大値も B の最小値も存在しない例を挙げなさい.

4-6 定理 4.15 を示しなさい.

4-7 級数
$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$
が収束するための正の実数 α の条件を求めなさい.

4-8 広義積分
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$
が収束することを示しなさい.