2011 年 11 月 2 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 5

お知らせ

- 今回は都合により提出物の受付を中止させていただきます．ご容赦ください．

前回の補足

- 講義資料 4, 7 ページ 3 行目で $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leqq 1 + |a_N|$ の $\leqq$ は $<$ ではないか, というご指摘がありました．もちろん $<$ で正しいですが, $\leqq$ でも正しく，どちらでも結論を導くことができますので，こういうのはあまり気にしなくてよいです.
- $\sum(1/n^2)$ の収束の証明の式変形がわからないというご質問がありました．高等学校程度を超えることは何もやっていないのですが：任意の定数 c と n に対して

$$\int_{n-1}^{n} c\,dx = c \qquad \text{とくに } c = \frac{1}{n^2} \text{ とおくと} \qquad \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^2}\,dx = \frac{1}{n^2}.$$

  また，実数 x が区間 $[n-1, n]$ 上にあるとき，$x \leqq n$ だから

$$\frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{x^2} \qquad \text{なので} \qquad \frac{1}{n^2} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^2}\,dx \leqq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

  最後の不等式は，区間 $[a, b]$ で $f(x) \leqq g(x)$ なら

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

  であることから従う．この関係式は前期にやった積分の (ちゃんとした) 定義から容易に導かれる.
- 上記の問題について，次のような別解をいただきました：$n \geqq 2$ に対して

$$\frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

  したがって

$$a_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) = 2 - \frac{1}{N} \leqq 2.$$

  このことから $\{a_N\}$ は上に有界．さらに $\{a_N\}$ は単調増加だから，収束する.
- $0.999\cdots = 1$ について，$0.333\cdots = \frac{1}{3}$ を 3 倍する，ということでよいか? という質問を複数いただきました．まず $0.333\cdots = \frac{1}{3}$ はなぜでしょうか．やはり，無限小数が “数を表す” ことの意味が必要だと思います．それから $3 \times (0.333\ldots)$ が $0.999\ldots$ になるのはどうしてでしょうか．無限桁の掛け算の方法はならったことがないと思うのですが．もちろん，素朴にはこういう説明でもよいのでしょうけど，数学を少しでも勉強した人はこのような説明で納得してはいけないと思うのです.
- 自然数の Peano の公理系をちゃんと書いたかどうか記憶が定かでないので：集合 $\boldsymbol{N}$ の各要素 x に対して $x' \in N$ を対応させる規則 $x \mapsto x'$ が定められていて，次を満たす．(1) $0 \in \boldsymbol{N}$, (2) $x' = y'$ ならば $x = y$, (3) $x' = 0$ となる $x \in \boldsymbol{N}$ は存在しない．(4) 数学的帰納法の原理.

前回までの訂正

- 黒板に「加減乗徐」と書いてあったそうです．もちろん「加減乗除」です．
- 講義資料 4, 2 ページ一番下：でｋない $\Rightarrow$ できない
- 講義資料 4, 3 ページ 11 行目：fg とう $\Rightarrow$ fg という
- 講義資料 4, 5 ページ下から 8 行目：$\alpha-\varepsilon/2<x<\alpha \Rightarrow \alpha-\varepsilon/2<x\leqq\alpha$.
  注：最後の不等号に等号がつくのは，上限の定義から必須．$\alpha-\varepsilon/2$ は $\alpha-\varepsilon$ でも問題ないが，少しだけ余裕をとって $\varepsilon/2$ とした．
- 講義資料 4, 5 ページ下から 7 行目：$\alpha+\varepsilon \Rightarrow \alpha+\varepsilon/2$
- 講義資料 4, 5 ページ下から 5 行目：すべの項を $\Rightarrow$ すべての項を
- 講義資料 4, 6 ページ 2 行目：$n\geqq N \Rightarrow n>N$
  注：N のとり方を一つぐらいずらせば，$\geqq$ と $>$ のどちらを定義に採用しても問題ないことはすぐにわかるが，第 2 回講義では "$n>N$" にしていたので，それに合わせた．コーシー列の定義でも $m,n>N$ とした方がよいのかも知れないが，今回は訂正していません．
- 講義資料 4, 6 ページ定理 4.7: 実数の有界な $\ldots\Rightarrow$ 実数の上に有界な...
  注：定義から有界な数列は上に有界．逆に 上に有界な単調非減少数列は有界になるので，"上に" は必要ないといえばないのですが，定理の仮定をチェックするには "上に" をつけた方がよいですね．
- 講義資料 4, 6 ページ 17 行目：$\frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\leqq 1 \Rightarrow \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1$
- 講義資料 4, 6 ページ下から 8 行目：$I_1\supset I_2\supset \Rightarrow I_1\supset I_2\supset\ldots$

授業に関する御意見

- がんばってみます． **山田のコメント：** そろそろ飽きた．
- 実数の連続性について，前よりは分かったような気がします． **山田のコメント：** そうですか．
- 何となく理解できるけど，何をどう理解したのかと言われると説明できる気がしません (汗
  山田のコメント： そういうことってありますよね．そういうときは，やはり理解できてないんです．
- むずかしいよ! **山田のコメント：** やっぱりね!
- 最近１限がすごく眠い．「秋眠暁を覚えず」だっけ．
  山田のコメント： いいえ．ちなみに午前 9 時では暁はとっくに過ぎてます．
- 勉強したくな〜い orz... **山田のコメント：** 授業したくな〜い
- 本館トイレにデデキント切断の紙が貼られている理由とは？ (大喜利的解答でも可)
  山田のコメント： 「デデキント切断」の紙は貼られていませんので，理由はありません．貼られているのは「デデキントせつでん」(仮名の使い方注意).
- 先生はコンピュータについてもお詳しいのですね．数学の研究をするときでもコンピュータのお世話になったりするんですか?
  山田のコメント： それほど詳しくありません/普通に使います．
- 数学は，言語を論理的に使う能力を見につけるという意味で，万人にとって日常生活でじゅうぶんに役立つものだと思うんですよ．
  山田のコメント： 同感．すなわち「役に立たない」と思う人は「役に立てる能力がない」ということですよね．あるいは「役に立てられるほど勉強しなかった」

質問と回答

質問： 区間 I で定義された関数 f が $a\in I$ で連続であるための必要十分条件は，I の点からなり a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(a)$．この方法は連続でないということを証明するのは簡単ですが，連続であることは，任意という条件があるのでどうやって使うんですか？

お答え： もちろん「任意の数列に対して」条件が成り立つことを示さなければなりません．結局，定義を確かめるのと同じくらいの手間がかかることが多いので，現段階では「連続性を示す」ときはそれほど用いられない，と考えていただいて結構です．

質問： 講義資料において，公理 4.3 と定理 4.15 が何故同値と言えるのでしょうか．$A\cup B=\boldsymbol{R}$, $A\cap B=\emptyset$ を満たすように A, B を定義すると A の最大値と B の最小値の何れかしか存在しないということが，連続性を表しているということでしょうか．

お答え： ここでの「連続性」とは何のことを言っているのかわかりませんが，単純に「公理 4.3 を認めずに (公理と考えずに) 定理 4.15 の内容を認める (公理と考える) と公理 4.3 のステートメントが証明できる」ということです．このことから，実数の連続性公理として「上限の存在」の代わりに「定理 4.15 のステートメント」をおいてもよい，ということがわかります．

質問： 実数の切断にはデデキント切断以外の切断法もあるのですか．

お答え： 切断，デデキント切断という語をどういう意味で用いていますか?

質問： コーシー列について $m,\,n\geqq N$ の $m,\,n$ は任意の $m,\,n$ ですか．

お答え： そうです．明示していないかも知れませんが，明示していなければ条件がついていないと思ってください．

質問： 資料 7 頁に出てくる「$\emptyset$」は何ですか? ひょっとして空集合 ϕ のことですか?

質問： そうです．ギリシア文字のファイ (ϕ) とは異なる文字で，ϕ を使うのは正しくないようです．TEX では `\emptyset` でこの文字がでます．

質問： PEANO の公理系で $x' - x = y' - y\ (= 1)$ も自然数の性質にはいらないのですか?

お答え： 引き算は自然数が最初から持っている性質とはしないのです．

質問： プリント 7 ページでの “コーシー列は有界である” の証明で $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leqq 1 + |a_N|$ のところは $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leqq |a_n - a_N| + |a_N|$, $|a_n - a_N| < 1$ より $|a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$ ということなのですか?

お答え： そうです．

質問： $0.999\cdots = 1$ は中学校式に「$0.999\cdots = \alpha$ とすると $10\alpha - \alpha = 9$ よって $\alpha = 1$」で示せますが，この方法が通用するのは循環小数だけですね．

お答え： “$0.999\cdots = \alpha$ とすると” とありますがそうできるのはなぜでしょう．“$0.999\dots$ が実数を表さない” という可能性が排除されてないのでは?

質問： $0.p_1p_2p_3\dots$ が収束するとなんで実数になるんですか?

お答え： ここでは「数列が収束する」とは「ある実数に収束する」と定めています．

質問： なぜ注意 4.2 では上限は $\boldsymbol{Q}$ には存在しないのですか? 2 だと思ったのですが...

お答え： $Y = \{x \in \boldsymbol{Q}\,;\, x^2 \leqq 2\}$ ですね．もちろん 2 も Y の上界の一つですが，1.5 も Y の上界になっています．すなわち 2 は上界の最小数 (上限) ではないことがわかります．それでは上界の最小値はいくつでしょう?

質問： 講義資料 5 ページに，有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ に対しても有界性，上限，下限が定義されるとありますが，上限，下限というのは連続性ゆえに定義されうるような気がするのですが，気の所為でしょうか...前回の授業では有理数にはないとあったような...

お答え： 気のせいです．“$\boldsymbol{Q}$ の部分集合 A に対して $\alpha \in \boldsymbol{Q}$ が A の上限であるとは，α が A の上界であり，α より小さい任意の有理数が A の上界でないものである” のように定義はできます．実数の連続性とは $\boldsymbol{R}$ の有界部分集合に上限が存在することで，上限の概念が定義できる，ということではありません．

質問： 補題 4.12 と定理 4.13 から，コーシー列と収束するというのは同値関係ですか?

お答え： いいえ，同値です．「同値関係」という数学用語がありますが，それを使う場面ではないので．

質問： 問題 4-2 について，単調非減少というのは $a_{n+1} \geqq a_n$ ということですよね．上界を α としているのに $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ($\leftarrow \alpha$ に収束する) という形にもっていくのはおかしい気がします．

お答え： どこがどうおかしいのでしょうか．

質問： 収束する数列 $\underset{rightarrow}{\leftarrow}$ コーシー列なので，数列 a_n (原文ママ：$\{a_n\}$ のことか．が単調非減少数列で上に有界のとき，数列 a_n はコーシー列である．よって「問題 4-3」の解は「問題 4-1」で考えられうるすべての解を含む，と考えて間違っていないでしょうか．例えば 4-1 の解を $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ とするならこれは 4-3 の解であるなど．

お答え： もちろん．

質問： 問 4-5 について，例えば $x = 0$ で切断すると A は負，B は正の有理数全体の集合になりますが，そうすると A の最大値, B の最小値は存在しませんね?

お答え： いいえ．“0 で切断する” という語の低議が分かりませんが，切断の定義 (定義 4.14 の $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{Q}$ に変えたもの) 条件から $A \cup B = \boldsymbol{Q}$ とならなければならないので 0 は A か B かいずれかに含まれなければなりません．

質問： ε-δ 論法で $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ を証明するときに，$|x^2 - 1| = \cdots < \delta(\delta + 2)$ となり，これを満たす (原文ママ：“これが ε 以下になる” のことか) δ を設定しますが，$\delta(\delta + 2) = \varepsilon$ として，この δ の 2 次方程式の解 $\delta = 1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon}$ の $\varepsilon \to 0$ としたときに $\delta \to 0$ になる $1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon}$ を δ の値としてもいいのですか．

お答え： その値は負ではないでしょうか．だから，いけません．

質問： 実数とは何かにおける Naive な答えとして「数直線上にめもれる数」とありましたが，数直線がどのようなものかという説明は必要ないのでしょうか．結局実数をめもれるような数直線上に実数をメモっているので，実数が先か，数直線が先かという謎が残ります．

お答え： それが説明できないので “naive な答え” なのです．実際，“直線とは何か” は公理的に答えるべきものと思います．具体的に直線を構成してみせるには実数を使わなければならないでしょうね．というわけですが，そういう

ところはあまり気にせずに進む，というのが実用上は正しいと思います．

質問： 複素数を大小で並べることはできないとおっしゃっていたのですが，複素数を用いた関数のグラフ ($y = ix$ とか) は書けないということですか?

お答え： 大小があるということとグラフが書けるということの関係は? 関数 (とくに前期にやった多変数関数) のグラフはどのように定義されましたか? グラフを描くとはどういうことですか?

質問： $(fg)(x) = f(x)g(x)$ の連続性はどう示されるのですか?

お答え： 仮定がなければ示されません．f と g は連続，と仮定するのですか?

質問： 0 は偶数ですか?

お答え： 偶数の定義は?

5　テイラーの定理

■高階の導関数　区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が微分可能であるとき，f は 2 階 (2 回) 微分可能である，といい，f' の導関数 f'' を f の **2 次導関数**という．一般に正の整数 $k \geqq 2$ に対して，k 階微分可能性，k 次導関数が次のように帰納的に定義される：

> 区間 I で定義された関数 f が $(k-1)$ 階微分可能であり，$(k-1)$ 次導関数が微分可能であるとき，f は k 階微分可能であるといい，$(k-1)$ 次導関数の導関数を k 次導関数とよぶ.

関数 f の k 次導関数を

$$f^{(k)}(x), \qquad \frac{d^k}{dx^k}f(x), \qquad \frac{d^k y}{dx^k}$$

などと書く．最後の表記は $y = f(x)$ のように従属変数を y と表した時に用いられる.

■C^k-級関数

事実 5.1. 区間 I で微分可能な関数は連続である.

定義 5.2 ((復習)).
- 区間 I で定義された関数 f が I で連続であるとき f は C^0-級であるという.
- 区間 I で定義された微分可能な関数 f の導関数が連続であるとき f は **1 階連続微分可能**または C^1-級であるという.
- 区間 I で定義された k 階微分可能な関数 f の k 次導関数が連続であるとき f は k **階連続微分可能**または C^k-級であるという.
- 任意の正の整数 k に対して C^k-級であるような関数を C^∞-級という.

■テイラーの定理

定理 5.3 (テイラーの定理)**.** 関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 階微分可能ならば，$a+h \in I$ となる h に対して

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(n)}(a)h^k + R_{n+1}(h) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j + R_{n+1}(h), \qquad R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0<\theta<1
\end{aligned}
$$

を満たす θ が少なくともひとつ存在する.

証明： テキスト 51 ページ.

2011 年 11 月 2 日

問題

5-1 2 階微分可能な関数 f, g に対して，合成関数 $f \circ g$ の導関数，2 次導関数を f, g の導関数を用いて表しなさい．(合成関数の微分公式)．さらに，f の逆関数が存在するとき f^{-1} の 2 次導関数を f の導関数を用いて表しなさい．

5-2 微分可能であるが C^1-級でない関数の例をひとつ挙げなさい．

5-3 次の場合に，式 (5.1) を具体的に書きなさい．
- $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $n = 2$.
- $f(x) = e^x$, $a = 0$, $n = 2$; n は一般の自然数.
- $f(x) = e^x$, a は一般の実数, n は一般の自然数.
- $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $n = 2$; $n = 2k - 1$ (k は正の整数).
- $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $n = 3$; $n = 2k$ (k は正の整数).
- $f(x) = \tan x$, $a = 0$, $n = 3$.
- $f(x) = \tan^{-1} x$, $a = 0$, $n = 4$; n は一般の自然数.
- $f(x) = \log(1 + x)$, $a = 0$, $n = 3$; n は一般の自然数.
- $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $a = 0$, $n = 3$; n は一般の自然数．ただし α は実数.

5-4 $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよう．
- 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ に $a = 1$, $h = 0.1$, $n = 2$ としてテイラーの定理 5.3 を書きなさい．
- このとき，$R_3(h)$ 以外の項の総和はいくつか．
- $R_3(h)$ の大きさを不等式で評価することによって，$\sqrt{1.1}$ の値を求めなさい．
- 同じことを $n = 3$ として試みなさい．

5-5 $\sqrt{5}$ の近似値を小数第 3 位まで求めなさい．（テイラーの定理を $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $h = 1$ として適用しなさい．n はいくつにすれば十分か．

5-6 正の数 ε に対して，$0 < |x| < \varepsilon$ ならば

$$1 - \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 0.01$$

が成り立つという．そのような ε をひとつ求めなさい．

5-7 e が無理数であることを証明しなさい．

5-8 地球 (半径 $R = 6.4 \times 10^6$ メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き，その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき，ゴムひもの伸びは

$$2\left(\sqrt{2R+1} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right)$$

で与えられる．この値の近似値を手計算で求めなさい．

これらの問題における「近似値」は，十進小数で確定する桁まで答えなさい．たとえば，近似値 3.14 とは無限小数で表したとき 3.14... となること，すなわち小数第 2 位は 4 と確定していることを表すことにする．