2011 年 11 月 9 日 (2011 年 11 月 16 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 6

前回までの訂正

- 講義資料 5，6 ページ下から 3 行目：

$$R_{n+1}(h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \qquad \Rightarrow \qquad R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

6　テイラーの定理 2

■テイラーの定理の証明と積分型剰余項　前回挙げたテイラーの定理

定理 6.1. 関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 階微分可能ならば，$a+h\in I$ となる h に対して

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),\quad 0<\theta<1
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

を満たす θ が少なくともひとつ存在する．

は，テキスト 51 ページにあるように平均値の定理 (Rolle の定理) を用いて証明される．ここでは，仮定を少し強くした (すなわち弱い) 版を，別の方法で示す：

定理 6.2 (テイラーの定理 $'$)**.** 関数 f が a を含む開区間 I で $\underline{C^{n+1}\text{-級ならば}}$，$a+h\in I$ となる h に対して

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)\\
&=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}\bigl(a+uh\bigr)\,du
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

が成り立つ．とくに，

$$R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

を満たす θ が少なくともひとつ存在する．

証明： $x=a+h$ とおいて，微積分の基本定理と部分積分の公式を用いると，

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(a) &= \int_a^x f'(t)\,dt=\int_a^x (t-x)'f'(t)\,dt\\
&=\bigl[(t-x)f'(t)\bigr]_{t=a}^{t=x}-\int_a^x(t-x)f''(t)\,dt=f'(a)(x-a)-\int_a^x\left(\frac{1}{2}(t-x)^2\right)'f''(t)\,dt\\
&=f'(a)(x-a)-\left[\frac{1}{2}(t-x)^2f''(t)\right]_{t=a}^{t=x}+\int_a^x\left(\frac{1}{6}(t-x)^3\right)'f'''(t)\,dt=\dots\\
&=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k\right)+\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x(t-x)^nf^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

ここで，$t=(1-u)a+ux$ とおくと，最後の項の積分は

$$R_{n+1}(h):=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x(t-x)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}\bigl((1-u)a+ux\bigr)\,du$$

となり，結論の前半を得る．ここで，仮定より $f^{(n+1)}$ は，区間 $[a,a+h]$ (または $[a+h,a]$) で連続だから，その区間で最大値 M, 最小値 m をとる．したがって，$S(h):=n!R_{n+1}(h)/h^{n+1}$ とおくと

$$S(h)=\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}\bigl((1-u)a+ux\bigr)\,dx\leqq\int_0^1(1-u)^nM\,du=\frac{M}{n+1},\qquad S(h)\geqq\frac{m}{n+1}$$

2011 年 11 月 9 日 (2011 年 11 月 16 日訂正)

が成り立つので，区間 $[0,1]$ で

$$F(\theta) := f^{(n+1)}(a+\theta h) - (n+1)S(h)$$

は非負の値と非正の値をともにとる．したがって，中間値の定理より $F(\theta)=0$ となる $\theta \in (0,1)$ が存在する．この θ が求めるものである．

定理 6.3 (テイラーの定理 $''$)**.** 関数 $f(x)$ は a を含む開区間で C^{n+1}-級とする．このとき，

(6.3) $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h) \qquad \text{とおくと} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0$$

が成り立つ．

■収束の次数とランダウの記号

記号． 点 a に十分近い任意の x に対して $|f(x)| \leqq C|g(x)|$ となるような定数 C が存在するとき，

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \qquad (x \to a)$$

と書く．とくに，

$$\text{極限値} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{が存在するならば} \quad f(x) = O\big(g(x)\big) \qquad (x\to a).$$

また，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \text{のとき} \qquad f(x) = o\big(g(x)\big) \qquad (x \to a)$$

と書く．この O, o を**ランダウの記号**という．

例 6.4. テイラーの定理 6.3 の結論は次のように表すことができる．

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + o(h^n).$$

■テイラー展開

- **[テイラー展開]** $f(x)$ は a を含む開区間で何回でも微分可能であるとする．このとき，(6.3) で $R_n(h)$ を定義したとき，ある区間の h に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(h) = 0$ が成り立つならば，

  (6.4) $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k$$

  となる．これを $f(x)$ の $x=a$ のまわりの**テイラー展開**という．
- とくに，$a=0$ のときは**マクローリン展開**ということがある．
- 「テイラーの定理」と「テイラー展開」は区別すること．
  「テイラーの定理」は $f(a+h)$ を h の有限次の多項式で近似したときの誤差を表現する定理である．
  一方「テイラー展開」は，$f(a+h)$ を無限級数で「正確に」表すものである．
- テイラーの定理は，適当な回数微分可能な関数に対していつでも成立するが，何回でも微分可能な関数であっても，テイラー展開が可能であるとは限らない．

例 6.5.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}x^n \qquad (-1 < x \leqq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

ただし，最後の式で，

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

のことである．これを**二項係数**という．とくに，α が正の整数なら，最後の式は任意の x に対して成り立ち，高等学校で学んだ「二項定理」そのものになる．

問題

6-1 次を確かめなさい

- $\sin x = O(x)$ $(x \to 0)$.
- $e^x = 1 + x + o(x)$ $(x \to 0)$.
- α を実数とするとき $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ $(x \to 0)$.
- $\cos x - 1 = O(x^2)$ $(x \to 0)$.

6-2 テイラーの定理を用いて次の極限値を求めなさい：

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 3x - x^3}{x^5}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 2x + x^2}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

6-3 次の値が有限になるように，定数 a, b の値を定めなさい：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x - a\sin x + bx}{x^5}.$$