

微分積分学第二 B 講義資料 7

お知らせ

- 一度に 2 枚の用紙を提出された方が 2 人いらっしゃいましたが、整理の手間が増えますので 1 枚でお願いします。

前回までの訂正

- 黒板に書いた $(0.1)^2$ がひと桁間違っていたそうです。
- 黒板にテイラーの定理を書いた際に、総和の範囲に誤りがあったそうです：

$$f(x) - f(a) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \right) + \dots \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(a) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \right) + \dots$$

- 講義の最後にやった極限の問題で、分子全体の符号がちがっていたようです。計算の最後は

$$\frac{\frac{2}{5}x^5 + \tilde{R}_6(x)}{(x + R_2(x))^5} \rightarrow \frac{2}{5} \quad (x \rightarrow 0)$$

です。

- 講義資料 6, 2 ページ (6.1) 式, (6.2) 式: $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)h^k \Rightarrow \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n$
- 講義資料 6, 2 ページ下から 6 行目:

$$\frac{1}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad \Rightarrow \quad \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

- 講義資料 6, 2 ページ下から 4 行目:

$$R_{n+1}(h) := \frac{1}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(x-a)^n}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}((1-u)a + ux) du$$
$$R_{n+1}(h) := \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}((1-u)a + ux) du$$

- 講義資料 6, 2 ページ下から 3 行目以下, 証明のおわりまで: つぎで差し替えてください:
ここで, 仮定より $f^{(n+1)}$ は, 区間 $[a, a+h]$ (または $[a+h, a]$) で連続だから, その区間で最大値 M , 最小値 m をとる. したがって, $S(h) := n!R_{n+1}(h)/h^{n+1}$ とおくと

$$S(h) = \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}((1-u)a + ux) dx \leq \int_0^1 (1-u)^n M du = \frac{M}{n+1}, \quad S(h) \geq \frac{m}{n+1}$$

が成り立つので, 区間 $[0, 1]$ で

$$F(\theta) := f^{(n+1)}(a + \theta h) - (n+1)S(h)$$

は非負の値と非正の値をとるとる. したがって, 中間値の定理より $F(\theta) = 0$ となる $\theta \in (0, 1)$ が存在する. この θ が求めるものである.

- 講義資料 6, 3 ページ 4 行目: テイラーの定理 (2) \Rightarrow テイラーの定理''

- 講義資料 6, 3 ページ下から 12 行目: $\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h \Rightarrow \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n$
- 講義資料 6, 3 ページ下から 9 行目: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(h) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(h) = 0$
- 講義資料 6, 4 ページ, 例 6.5: $\cos x, \sin x, \log(1+x), \tan^{-1}x$ の展開式の... の前の符号が “-” ではないか, というご指摘をいただきました. そのようにしてもよいですが, 一般の係数が $(-1)^n$ を含む形で表されているので, $+(-1)^* * * \dots$ という形だと思ってください.
- 講義資料 6, 4 ページ, 問題 6-1 の最後 ($x \rightarrow 0$) を追加する.

授業に関する御意見

- 最近つかれがたまってます. 山田のコメント: me, too
- 朝がづらい 山田のコメント: me, too
- ほしいもを買いました. 山田のコメント: 秋ですね.
- 前回先生が黒板を消すときあまりマスクをしていなかったような... 山田のコメント: そうかも
- 前々回の質問用紙が, 提出が遅れたためか返って来ないのですが...
山田のコメント: 一応, 遅れたものは無視というスタンスですが, 今回, 返却しています. 整理に手間がかかりますので, 遅れないようにして下さい.
- 上ずぎるところに書かれると, 黒板が上に乗ったときに影に隠れてしまっ見えなくなってしまいます... (指数のところとか)
山田のコメント: ごめんなさい. なるべく気をつけます.
- 授業 (原文ママ; 授業のことか) 終了が近づくにつれて板書のペースが上がると, 頭がついていかなくなります.
山田のコメント: sorry!
- 「 $2x$ と x が同じくらいの速さ」というのは少し不自然な気がします.
山田のコメント: ですから「速さ」というのは単なる「たとえ」言葉. ちゃんと “オーダー” という言葉を使えばよい.
- テイラーの定理はなかなか面白いと思いました. しっかり使えるようにしたいです.
山田のコメント: 使えろと便利だと思えますよ.
- 講義資料にテイラー展開の問をたくさんいれてください!
山田のコメント: 結構たくさんあるように思いますが, よかったら自分で問題を作ってください.
- テイラーの定理で極限もとめるのかよかったです. 山田のコメント: でしょ
- 外が寒くなってきたけど, 講義室の中は寒くないですね. これからどうなるかは知りませんが (人口密度的な意味でも)
山田のコメント: 多数のご来場をお待ちしております.
- コーヒーは人によって好みが違う. 僕はブラック派ですが, 先生はブラックと砂糖入りどちらがお好きですか? 山田のコメント: 黒
- やっぱ先生の授業がおもしろい. 山田のコメント: そう?

質問と回答

質問： テイラーの定理は、一番右側のカスみたいなものが、水準以上のはやさで小さくなれる、というのが保証されているところが売りなのですか？ ぴったりしたいのなら平均値の定理を使えばいいわけですし。

お答え： 前半：大体そう。後半の意味がわからない。平均値の定理もテイラーの定理の特別な場合と思えるわけで、前半のような解釈も可能。

質問： 積分型剰余項 (略) はどうやって計算できたのか。

お答え： 講義資料 6, 2 ページの下の方。ただし、今回の資料にある訂正がはいっています。

質問： ランダウの記号の表記について、 $f(x) = o(x^2)$ などというもの (原文ママ) があつたときに、 $\frac{o(x^2)}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$ 正しいのは後者ですか。

お答え： 後者です。

質問： ランダウの記号を使うのは、「どのくらいはやく 0 に近づくのか一目で分かる」とか「カッコイイ」等の理由ですか？ それともこの表し方はこの後ももっと別な使われ方をするのでですか？

お答え： 0 に近づくオーダーが分かりさえすれば余計な情報はいらぬ、というときに便利ですよ。

質問： ランダウの記号は“O”と“o”があるようですが、この二つは何が違うのでしょうか。また、これは何と読むのですか。ランダウでしょうか。

お答え： 前半：講義資料 6, 3 ページを読んでも違いがわからないでしょうか。後半：オーまたは order。

質問： ランダウの記号 O, o は order (次数) を意味するということですが、 $f(x) = o(g(x))$, $f(x) = O(g(x))$ の 2 式はどちらも“ $f(x)$ の次数は $g(x)$ の次数より大きい”ということになるのでしょうか？

お答え： いいえ。前者は“ $f(x)$ の次数は $g(x)$ の次数より大きい”，後者は“ $f(x)$ の次数は $g(x)$ 以上である”。

質問： ランダウの記号 O, o は何と呼ぶのですか？ また O と o はどう呼び分けるのですか？

お答え： オーまたは order。呼び分けるときは、“でっかいオー”，“ちっちゃいオー”あるいは“大文字のオー”，“小文字のオー”。あるいは、 $f(x) = O(x^2)$, $f(x) = o(x^2)$ をそれぞれ「 $f(x)$ は x^2 のオーダー」 「 $f(x)$ は x^2 より高いオーダー (高次)」などという。

質問： ランダウの記号の O と o は使い分けの方が良いですか。

お答え： 違う意味ですので、使い分けの方が良いのではなく使い分けなければ間違いです。

質問： コンピュータサイエンスの授業で、コンピュータの計算の手間の評価法で $O(n^2)$ (計算のオーダーが n^2 に比例する) という記号が出てきたんですが、これはランダウの記号ですか？

お答え： そうです。

質問： ランダウの記号を調べてみたら $T(n) = O(n^2)$ がでてきますが、これはどういう意味ですか。

お答え： 文脈から判断するに、 $n \rightarrow \infty$ のとき $T(n)/n^2$ が有界であること。

質問： e が無理数であることを証明するとき、

$$\frac{m}{n} = e = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^\theta \right)$$

から 整数 = 整数 + $\frac{e^\theta}{n+1}$ となるのは何で？

お答え： 両辺に $n!$ をかけます。すると、左辺は $m(n-1)!$ で整数となります。一方、右辺は

$$n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!} e^\theta$$

となり、最後の項を除いて整数となります。

質問： なぜ $\frac{5}{2} < e^x < 3$, $e = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + e^\theta n!$ の 2 つのことから e が無理数ということが成り立つのですか。

お答え： 一つ前の質問の回答を見てください。このことから $\frac{e^\theta}{n+1}$ は整数となることがわかります。ここで $0 < \theta < 1$ なので、 $1 < e^\theta < e < 3$ となります。したがって $\frac{e^\theta}{n+1}$ が整数になるには、 $e^\theta = 2$, $n = 1$ でなければなりません。とくに $e = m/n$ とおいていたので e は整数となりますが、 $\frac{5}{2} < e^x < 3$ からそれは不可能です。

質問： π の無理数であることは同じような方法でいえるのでしょうか。

お答え： ちょっとめんどうくさいんです。

質問： 講義資料 6 の 4 ページ、例 4.5 の「 $\tan^{-1} x = \dots$ 」の式で、 x の定義域は $(-\infty < x < \infty)$ ではないのですか？ それともここでは一例として定義域を適当に決めているだけですか？

お答え： どちらも違います。たしかに $\tan^{-1} x$ は R 全体で定義されている関数ですが、等式

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

は $-1 \leq x \leq 1$ に対してしか成り立たないのです。実際、 $|x| > 1$ なら右辺の級数は発散してしまいます。このような現象は次回以降、すこしだけ解説します。

質問： テイラーの定理とテイラー展開についてですが、テイラーの定理において n を無限にとばしたときの値がテイラー展開となるのですか？ それとも全く異なるものとして区別した方がいいのでしょうか？

お答え： 有限和で表されるテイラーの定理の $n \rightarrow \infty$ の極限が意味をもつとき、そこで得られる式をテイラー展開というのだと思います。

質問： 「テイラーの公式」は「テイラーの定理」、「テイラー展開」のどちらと同じですか。それともどちらとも異なるものですか。

お答え： 上のどちらかを表していますが、文脈依存です。

質問： テイラー展開での $a=0$ のときマクローリン展開になると書いてありますが、 $a=0$ って何が特別ですか？

お答え： べつに特別ではないのです。テイラー展開、といっても問題はないのですが、マクローリン展開という人もいて、言葉を通じさせる必要があるので、ここで紹介しました。ちなみに、講義資料の例はみなマクローリン展開になっていますね。

質問： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - 3x - x^3}{(\sin x)^5}$ を求める問題で、 $f(x) = \sin x$ にテイラーの定理を使うときに $a=0, h=x, n=1$ としましたが、なぜこのようにおくのでしょうか。定番のおき方なのでしょうか？

お答え： $a=0, h=x$ は、考えている極限を考えればそうおくべきですよ。 n については (慣れてくれば一目でわかるが) 何回か試行錯誤を試みるべきです。

質問： 授業最後の例題の中、

$$\frac{3 \tan x - 3x - x^3}{(\sin x)^5} = \frac{\frac{2}{5}x^5 + \tilde{R}_6(x)}{(x + R_2(x))^5} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{\tilde{R}_6(x)}{x^5}}{\left(1 + \frac{R_2(x)}{x}\right)^5}$$

の $\tilde{R}_6(x)/x^5, R_2(x)/x$ が 0 に近づくのはどうしてわかりますか。 $\tilde{R}_6(x)$ の \sim はどういう意味ですか。

お答え： 後半： $\sin x$ を展開したときの剰余項を R_2 と書いたので、 $\tan x$ の剰余項に同じ文字を使いたくなかったから \tilde{R}_6 と書いた。前半 (板書では全体にマイナスがついていましたが、訂正してあります)：テイラーの定理の剰余項の性質 (講義資料 6, 3 ページ, 定理 6.3) を用います。

質問： 問題 6-1: $e^x = 1 + x + o(x)$ 。 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x}$ について $f(x) = e^x$ とするとテイラーの定理から ($a=0, h=x, n=1$) $f(x) = 1 + x + R_2(x)$ で $R_2(x)/x < R_2(x)/x^2 = 0$ より $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0$ なので $e^x - 1 - x = o(x)$ 。

お答え： $x \rightarrow 0$ のとき $R_2(x)/x^2 \rightarrow 0$ とはなりません。 $R_2(x)/x \rightarrow 0$ は成り立ちます (それで十分)。

質問： 問題 6-2 (1) $e^x = 1 + x + R_2(x)$ とおくとテイラーの定理より $\lim_{x \rightarrow 0} R_2(x)/x^2 = 0$ 、すなわち $R_2(x) = o(x^2)$ ($x \rightarrow 0$)。(以下略)

お答え： 違います。2 次の剰余項は x^2 と “同じ程度の速さ” で 0 に近づきますが、一般に $R_2(x)/x^2$ は 0 に近づきません。ちなみに正解は $1/2$ です。

質問： 問題 6-3 について、 $\tan^{-1} x$ と $\sin x$ をマクローリン展開して代入したときに、分子にひとつでも x についての次数が 5 よりも小さい項があるとアウトということですね。 $\tan^{-1} x$ と $\sin x$ をマクローリン展開して代入したときに 5 次未満の項の係数が 0 になりさえすれば良さげですね。 そうすると 1 次： $1 - a + b = 0$ 、3 次： $-\frac{1}{3} + \frac{a}{3!} = 0$ 。これらの式を連立して、 $a = 2, b = 1$ ですね。

全ての項 x についての次数が正次数だということはテイラー展開を利用している事から明らかなので言わなくて良いですか。 また 1 文目も細かく書いた方が丁寧でしょうけど、簡単のため言わなくて良いですか。「良い」という言葉は「テストで点がとれる」という意味で使用しています。

お答え： 標準的ではない「良い」の使い方ですね。あなたが (他人として読んで) 書いてあることが理解できるかどうかを基準としてご覧下さい。正の次数については “テイラーの定理より” ... の後に式をきちんと書けば、項が正の次数であることは自明なわけで、式を書く事が大事かもしれませんね。

質問： ${}_n C_r$ について、 n の範囲が自然数に限らず定義されるように、 ${}_n C_r$ の r や $n!$ の n が 0 や自然数かによらずに ${}_n C_r, n!$ は定義されないのですか。

お答え： 定義されないことはありません。階乗については前期にやったガンマ関数が使えますね。

質問： 前々回質問した内容についてです。問題 4-6 の定理 4.15 の証明ですが、「 A と B の両方に最大値，最小値が存在する場合」を考えなくてもよいのはなぜですか。定理 4.15 を読む限り， A と B の両方にそれぞれ最大値，最小値が存在する場合はない，というように読めると思うので，この場合はありえないことを証明する必要があると思うのですが。

お答え： もちろん，切断 (A, B) に対して A の最大値， B の最小値がともに存在することがないことは証明する必要があります。が，容易に証明できると思いましたので，とくに説明しませんでした。一応，証明を与えておきましょう： A の最大値 a と B の最小値 b が存在したとする。このとき $a \in A, b \in B$ だから，切断の条件より $a < b$ 。ここで $c = (a + b)/2 \in \mathbb{R}$ とすると， $a < c$ だから， A の最大値が a であることに注意すれば $c \notin A$ 。一方， $b > c$ だから $c \notin B$ 。したがって c は A にも B にも含まれないので，切断の条件 $A \cup B = \mathbb{R}$ に矛盾する。

質問： 0.1 をテイラーの定理のときに先生がよく使いますが，0.5 は？ どれくらい小さいのがいいですか？

お答え： 考える問題によって，必要な小ささは違います。0.1 を出したのは「たとえ話」と思ってください。

質問： 前々回の質問ですが，近似を使うためには結局 x はどれくらい小さければよいのですか？

お答え： 問題によります。本当に，個々の問題に依存します。たぶん，前々回の問題を解いてもらえば経験として理解できるはずです。

質問： $R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h)$ ($0 < \theta < 1$) の部分なのですが， $[0, 1]$ の範囲で使われている中間値の定理が，グラフだとどの部分を動かしているのかが分かりません。簡単な例で良いので表してほしいです。

お答え： 質問が分かりません。“ $R_{n+1}(h) = \dots$ の部分”はこの講義ではたくさん出てきているので，どこの部分をさしているかわかりません。また，“グラフだと”というのはどういう意味なのかわかりません。“表して”というのは，“表す”は他動詞なので目的語が必要です。

質問： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の値をマクローリン展開を利用して元の関数に戻してから求めることはできますか。

お答え： そう単純にはいかないんです。

質問： Taylor 展開が素早くできないのですが，コツなどはありますか？

お答え： ありません，あるいは自分で見つけるものです。

質問： 講義資料 6，3 ページの 3 行目「非負の値と非正の値」という表現が気になります。わざわざこう表現する理由がありますか？「正の値と負の値」ではだめですか？

お答え： 0 を取りうるので「正の値...」じゃだめです。

質問： $a = 0$ のときはマクローリン展開ですけど， $a \neq 0$ のときは～展開という名前はなんというのですか。

質問： $a = 0$ のときはマクローリン展開ですけど， $a \neq 0$ のときは～展開という名前てありますか？

お答え： 一般にテイラー展開といいます。ところでお二人とも日本語が変ですね。

質問： 今日は質問ないので出しません！ ごめんなさい。

お答え： 残念です。ちなみに，日付は 10 日でなく 9 日です。

締切り遅れの質問と回答

提出期限に遅れた方のご質問です。なお，得点は加算されません。

質問： 虚部をもつか持たないかで (i の係数が 0 か否かで) 実数か否かを判別するのはよろしくないのでしょうか？

お答え： よろしく無いです。たとえば「人参」は虚部を持ちませんが実数ではありません。

7 テイラーの定理 3

テイラー展開 前回みたように以下が成り立つ.

例 7.1.

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n & (-\infty < x < \infty) \\
 \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} & (-\infty < x < \infty) \\
 \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} & (-\infty < x < \infty) \\
 \cosh x &= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} & (-\infty < x < \infty) \\
 \sinh x &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} & (-\infty < x < \infty) \\
 \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n & (-1 < x < 1) \\
 \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n & (-1 < x \leq 1) \\
 \tan^{-1} x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} & (-1 \leq x \leq 1) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n & (-1 < x < 1)
 \end{aligned}$$

ただし, 最後の式で,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

のことである. これを二項係数という. とくに, α が正の整数なら, 最後の式は任意の x に対して成り立ち, 高等学校で学んだ「二項定理」そのものになる.

実解析関数と C^∞ -級関数

定義 7.2. 関数 f が a で実解析的 real analytic であるとは, a を含むある開区間 I 上で

$$(7.1) \quad f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$$

と表されることである. ただし b_0, b_1, \dots は定数である.

例 7.3. 例 7.1 にある関数は 0 で実解析的である. 一般的に, これらの関数は定義域の各点で実解析的であることを示すことができる.

命題 7.4. 点 a で実解析的な関数が (7.1) を満たすならば,

$$b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

である. とくに実解析的な関数は C^∞ -級である.

この事実の証明 (らしきもの) は後日与える.

例 7.5. 関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は $x = 0$ で何回でも微分可能であり,

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. したがって f は C^∞ -級である.

一方 f は 0 で実解析的ではない. 実際

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

と表されているとすると, 命題 7.4 から $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = 0$ であるが, そうすると $f(x)$ は恒等的に 0 となり, 正の x に対して $f(x) > 0$ となることに矛盾する.

問題

7-1 次のようにして例 7.5 を確かめなさい.

- $f(x)$ の導関数を求めなさい. ヒント: 右極限 $\lim_{h \rightarrow +0} F(h)$ と左極限 $\lim_{h \rightarrow -0} F(h)$ が存在してその値が一致するならば, $\lim_{h \rightarrow 0} F(h)$ は存在し, その値は左右極限の値に一致する.
- 任意の x の多項式 $P(x)$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$$

であることを確かめなさい. ヒント: $P(x)$ の次数を m とし, e^x にテイラーの定理を $a = 0$, $h = x$, $n = m$ として適用する.

- $f(x)$ の n 次導関数は

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

の形に表されることを, 数学的帰納法を用いて証明しなさい. ただし $P_n(y)$ は y の多項式である.

- $f^{(n)}(x)$ は 0 で連続であることを確かめなさい.

7-2 任意の実数 x に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

が成り立つことを次のようにして示しなさい:

- テイラーの定理を適用して

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + R_{k+1}(x) \quad R_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

を満たす θ が存在することを確認なさい。

- 剰余項は

$$|R_{k+1}(x)| \leq \frac{1}{(k+1)!}|x|^{k+1}e^{|x|}$$

を満たすことを確認なさい。

- 任意の正の数 a と番号 N をとるとき, $n \geq N$ なる番号 n に対して

$$0 < \frac{1}{n!}a^n \leq \frac{a^N}{N!} \left(\frac{a}{N}\right)^{n-N}$$

であることを確認なさい。

- 上でとくに $N > a$ となる N を選ぶことにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}a^n = 0$$

であることを示しなさい。

- このことを用いて, 各 x ごとに

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{k+1}(x) = 0$$

となることを示しなさい。

7-3 等比級数の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^N t^{2N} = \frac{1 - (-1)^{N+1} t^{2N+2}}{1 + t^2} = \frac{1}{1 + t^2} + P_N(x)$$

の両辺を $t = 0$ から $t = x$ まで積分し, $N \rightarrow \infty$ とすることにより, $|x| \leq 1$ ならば

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

が成り立つことを示しなさい。 $|x| > 1$ のときはどうなっているか。

同様なことを $\log(1+x)$ についても試みなさい。級数はどの範囲で収束するか。