2011 年 11 月 30 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 8

お知らせ

- 今回は，都合により提出物の受付をいたしません．ご容赦ください．
- 次回，12 月 7 日に，中間試験 (12 月 21 日) の予告をします．皆様お誘い合わせの上，おいでください．

前回の補足

- 二項係数について：正の整数 n に対して

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n} \qquad \text{と定めるが，とくに } n=0 \text{ のとき} \qquad \binom{\alpha}{0}=1$$

と定義する．念の為：一般の定義式の分子は n 個の数の積ですので，これらを “1” にかけたものだとみなせば，$n=0$ のときは 1 に 0 個の数をかけた，ということで，この定義は納得できるでしょう．あるいは，一般に (パスカルの三角形の原理を表す式)

$$\binom{\alpha}{n}=\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1}$$

が $n=1$ で成り立つようにした，と思っても良いです．

前回までの訂正

- 板書で $f(x)=\alpha_1+\alpha_2(x-a)+\dots$ と書いたようです．すると，$\alpha_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ は正しくなくなります (番号がずれる)．次数と係数の番号の関係を考えると $f(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-a)+\dots$ のように係数の番号を 0 から始めた方がよいですね．そうすると $\alpha_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ です．
- 板書 (0 ページ目)

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots==\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n}=\log(1+x) \quad\Rightarrow\quad x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots==\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=\log(1+x)$$

- 板書で，等比数列の和の公式

$$1-x+x^2-x^3+\dots(-1)^Nx^N=\frac{1+(-x)^{N+1}}{1+x} \quad\Rightarrow\quad 1-x+x^2-x^3+\dots(-1)^Nx^N=\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}$$

- 板書の 11 ページ目が 2 つあったそうです．
- 講義資料 5, 6 ページ問題 5-8:

$$2\left(\sqrt{2R+1}-\tan^{-1}\frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right) \quad\Rightarrow\quad 2\left(\sqrt{2R+1}-R\tan^{-1}\frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right)$$

- 講義資料 7, 3 ページ，23 行目：高次」」⇒ 高次」
- 講義資料 7, 4 ページ，14 行目：通じされる ⇒ 通じさせる
- 講義資料 7, 例 7.1 ($\log(1+x)$ の部分の最後：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$

授業に関する御意見

- 真面目な質問をないがしろにされると，とても悲しいです．
  山田のコメント： 気になって，前回の質問シートを確認しました．やはり，何を質問されているのか，意味を読み取ることができませんでした．真面目に質問してくださるのは結構ですが，読み取れないものには回答することができません．
- やはり先生にもっと多くの例題を出していただきたい．抽象的な理論はほんとに分らない．
  山田のコメント： おまたせ．今回は具体的な級数がたくさんです．
- 黒板の $\log\limits_{n\to\infty}$ (原文ママ：lim のことか) や x^n などのこういう添え字部分をもう少し大きく書いていただけると幸いです．
  山田のコメント： 申し訳ありません．善処します．
- 前から思ってたんですけど，変態な順番の黒板の使い方やめて．板書写しきれん．一体何のために番号を振ってるんだか．
  山田のコメント： どこが変態なんでしょう．0 番や -1 番は問題ないですよね．それ以降，単調増加に番号を振っているはず．
- 変態な関数を思いつかない自分は変態でないと思い，安心してしまいます． **山田のコメント：** me, too
- 最後に出てきた関数は $x=0$ でも微分可能なのはすこし驚きでした． **山田のコメント：** ですよね．
- むずいかも **山田のコメント：** よかった．
- 仮に，体温がたし算できるとしたら，$35\times 2+273\times 2=616\mathrm{K}=343^\circ\mathrm{C}$ というふうに絶対温度で考えるべきだと思う．まあ，そもそもナンセンスですが. . .
  山田のコメント： ところで，絶対温度でも足してはいけないのはなんででしょう．ヒント：温度は何を表す物理量でしたっけ．
- 議義室 (原文ママ：講義室のことか) の外も内も寒くなってきましたね. . .
  山田のコメント： はい．ギャグも
- いよきょ本格的に寒くなってきたように感じられます．
- 11 月 15 日の火曜日に 19 歳になりました．でも誰もプレゼントをくれませんでした．がっかり． **山田のコメント：** おめでとう ♡
- 誕生日だー (^^)!!! (11 月 30 日) **山田のコメント：** Felices su cumpleaños．誕生日が嬉しい年齢の人が羨ましいですね．
- 本当に人減りましたね． **山田のコメント：** ねぇ

質問と回答

質問： 分数形の関数の極限 (値) は，普通に解こうとロピタルを使おうとテイラー展開を使おうと，同じになるのですか?

お答え： 普通に，というのが何をするのかわかりませんが，違う答えになるとしたら極限の概念がおかしいのでは?

質問： テイラー級 (原文ママ：実解析的のことか) である判定するには，テイラー展開をし，$R_{n+1}(x)$ がどんな実数 x に対しても $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$ をみたすことを確認するのが確実で最もよい方法なのでしょうか．

お答え： 具体的な関数の性質を用いた様々な方法がある場合があります．一般論として良い方法はないと思います．

質問： プリントの (7.1) から $f(x)=1/x$ などは実解析的ではないのですね．また，開区間を閉区間にしたらなにか不都合はあるのですか？

お答え： 前半：そうでもないです．たとえば $f(x)=1/x$ は $x=1$ で実解析的です．実際，等比級数の和の公式から

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{-1}{1-(1-x)}=-\bigl(1+(1-x)+(1-x)^2+\dots\bigr)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n \qquad (|x-1|<1)$$

と表されます．後半：閉区間としても不都合はないですが，区間をぎりぎり大きくしようとすると開区間にしかできない場合があります (本日の講義，収束半径の性質参照．)

質問： 実解析的であることは，a をふくむある区間 I 上で $f(x)=b_0+b_1(x-a)+\dots$ と表されることでしたが，これはテイラー展開によってこのように表されるとき，解析的である，ということでしょか．指数関数や三角関数でこのように表されることがあるのでしょうか．

お答え： 前半：“テイラー展開によって” という言葉で何をさしているのかわかりませんが，このように表される，というのが実解析的の定義です．後半：たぶん，フーリエ級数なんてやつをならったりします（この科目ではありません)．

質問： 複素解析的とはどういうものですか．

お答え： 複素変数，複素数値の関数で，冪級数を用いて表されるもののことです．実は，実数の場合と違って，複素変数の関数は，一度でも微分可能ならば何回も微分可能，かつ冪級数での表示が可能になってしまいます．このように，複素変数と実変数ではずいぶん様子が違うので，とくに「実解析的」という言葉を使うのです．

質問： C^ω-級 $\Rightarrow$ C^∞-級ですか?

お答え： はい．次回，きちんと扱います．

質問： f は C^∞-級として，定義 7.2 の中の $b_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ ならば f は a で実解析的であると言えますか?

お答え： ちょっと変：$x=a$ を内部に含む区間で $f(x)=\sum b_k(x-a)^k$ と表されることができれば実解析的．もしそのように表されているなら，$b_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ が (自動的に) 成り立つ

質問： なんとなく実解析的は Taylor 級数と関係があるとお網が，関係があるでしょうか．

お答え： 関係があります．Taylor 級数 (無限級数) で表される関数が実解析的．

質問： 実解析的であるかないかの判別法はありますか? 受業 (原文ママ：授業のことか) で扱いますか?

お答え： 資料の例などをみてください．他にもいくつか実解析的であることが分かる例を挙げますが，一般的な判定法はとくにないと思います．

質問： 「実解析的である」というのは何を示しているのでしょう？ どのような活用をされるのでしょう？ たとえば「C^∞-級である」といわれれば，何回でも微分可能で，その導関数が連続なんだなーということがわかるのですが，

お答え： 実解析的なら，テイラー級数に展開できるんだなーということがわかりますが，答えとして何が欲しいですか?

質問： $\frac{1}{1+x} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n$ と表して $\frac{1}{1+x}$ をどんどん微分していけば，そのそれぞれに $x=0$ を代入していけば，$A_0 \sim A_n$ までが求められ，*** (山田注：判読不能) の x で成り立ちそうなのに，実際には $-1<x<1$ でしか成立しない．この違いはどうして生まれるのでしょうか．

お答え： まず，最初の前提が間違い．$1/(1+x)$ は (有限次数の) 多項式で表すことはできません．もし，右辺を無限級数にしてみたとしても，等号が成り立つようにできるかどうかは自明ではありません．“...と表す” というのは “表すことができる” ことが前提なんです．

質問： 例 7.5 は C^∞-級だけど $x=0$ で実解析でない変態関数の一例ということですね．(1) テイラー展開をしたときに，x の正整数次の項だけで表せないような区間があること．(2) 定義域のどこかで違う式になるように場合分けがされていること．この 2 つのうち，主にどちらが例 7.5 の関数の変態性に貢献 (山田注：原文ママでない．貢献の貢がなんだか変な (変態な) 字でした．上は 工，下が耳．) しているのか，(1), (2) のどちらかをみたし，かつ C^∞-級だけど実解析的でない関数を考えることで理解しようと思いましたが，そのような関数が全く思い浮かばず断念しました．果たして (1)，(2) のどちらかを満たし，かつ変態な関数は存在するのでしょうか．そもそも (1) と (2) は別モノではない気もするのですが，知識が混沌としていてわかりません．

お答え： (1): この例では $x \neq 0$ では実解析的です．(2): 場合訳があっても実解析的な関数の例があります．実解析的でない C^∞-級関数は非常にたくさん存在することを証明することができますが，それを具体的に表すことが必要なケースは限られています．そういうものがあるんだぞ，ということだけ知っていてください．

質問： $f(x) = \sin x$ と $f(x) = \ldots$ (略，例 7.5 の関数) で実解析的である，なしの違いがでるのは，関数が区間によって別に定義されているのが原因でしょうか?

お答え： そうともいえますが，そうでもないんです．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

は $x=0$ で実解析的です．

質問： $f(x) =$ (略，例 7.5 の関数) はへんたいだから Taylor 展開できないのですか．もしくは Taylor 展開できないからへんたいですか．

お答え： どっちでしょう．後者と思ったほうが良いと思います．

質問： $(1+x)^\alpha$ のテイラー展開の x の範囲が $-1<x<1$ になっているのがなぜなのかわかりません．

質問： $(1+x)^\alpha$ はどうやってテイラー展開で展開したのかわかりません．

お答え： テイラーの定理を用いて

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{n} x^n + R_{n+1}(x)$$

とおいたとき，$|x|<1$ なら $|R_{n+1}(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ が示せますが，$|x|>1$ のとき，剰余項は発散することが示せます.（実はちょっと面倒くさいです．たぶん積分剰余項を使うのがよいと思います.）

質問： $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ $(-1<x<1)$ の式は $(-1<x<1)$ の範囲でしか成り立たない．その範囲はどうやって求めるか．

お答え： いろいろな方法があります．次回，“収束半径の求め方” を紹介しますが，この問題の場合は，そもそも $|x| \geqq 1$ なら右辺級数は収束しません．

質問： $\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ $(-1<x \leqq 1)$ などの範囲はテイラー展開してみないとわからないのですか?

お答え： はい，概ねそうです．

質問： $x>1$ で $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots$ とならないのはわかりました．しかし，たしかに上の等式の両辺を積分すると，$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ $(-1<x \leqq 1)$ となりますが，$x>1$ で $\log(1+x) = \ldots$ が成り立たない理由がよくわかりません．

お答え： $-1<x<1$ でしか成り立たない式を積分しているのだから，その区間の外側では何も言えないので，成り立つかも，と思う理由はないですね．そのうえで $\log(1+x)$ を表す級数 (ご質問のやつ) は $|x|>1$ で発散します．

質問： テイラー展開 $\log(1-x) = -x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n$ は合ってますか． **お答え：**あってます．

質問： $\ln(x+1)$ のテイラー展開は $(-1 < x \leqq 1)$ で定義することがわかりましたが，x が十分大の場合はどうすれば計算できますか．また，剰余項の大きさはどれくらいがいいですか．

お答え： 後半：欲しい精度による．前半：たとえば x が十分大きいならば $x = e^p y$ (y は 1 に近い) くらいの p をとって $\log x = p + \log y$ として，$\log y$ に対してテイラーの定理を用いた近似を行なう．

質問： Taylor 展開するとき，どこまで積分すればいいですか．

お答え： “どこまで展開すれば” でしょうか．必要な精度，収束のオーダーによります．

質問： テイラー展開を求めよという問題があった時，たとえば

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

ではどちらも正解ですか．

お答え： この場合はどちらも正解．前者の場合，係数の一般式が想像できないようだと不完全ですね．

質問： $x = 0$ を中心とするテイラー展開とはどういうことですか．

お答え： 関数 $f(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ の形に表すこと．$x = a$ を中心とするテイラー展開とは，関数 $f(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-a)^n$ の形に表すこと．

質問： 多変数バージョンのテイラーの定理を考えるとしたら，1 変数だけを動かして，それ以外の変数を固定するというような感じで，ある 1 つの変数に対してその変数の多項式で表したときの誤差を表現する，といった感じになるのでしょうか．

お答え： あまりそういう感じは受けないですね．テキスト 58 ページです．

質問： テイラーの定理と平均値の定理，歴史的にはどちらが先に考え出されたものなんですか?

お答え： よく知らないのですが，テイラーの定理，あるいはテイラー級数の考え方は，微積分がきちんと理論的に整備されるより前から知られていたし，使われていたように思います．

質問： 講義資料の例 7.1 について，二項係数を $\binom{\alpha}{n}$ と表現するのは正式なのでしょうか? **お答え：**正式です．

質問： C^1-級の 1 は英語読みなのに，C^∞-級の ∞ は日本語読みであることに違和感を覚えるのですが，そういうものなんですかね?

お答え： ∞ を infinity と読んでもよいと思いますが，一応，気を使って日本語でよんでいます．C^1-級も “しーいちきゅう” と読むこともあります．

質問： 授業で「任意の k に対して C^k-級は C^∞-級」と言っていたのですが，一般的には C^∞-級という単語は存在しないのですか?

お答え： 存在しています．その語の意味 (定義) が，「任意の k に対して C^k-級であること」なのです．ちゃんと定義まであるんだから，なかったことにしないでください．

質問： 二項係数 $\binom{\alpha}{n}$ はベクトル $\binom{\alpha}{n}$ に見えるのですが，二項係数とベクトルを区別するのは文脈や等号の先で判断するしかないのですか．等号の先ですと，二項係数の絶対値 $\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ とベクトルの大きさ $\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ はともにスカラー値になってしまうと思うのですが．

お答え： 原理的に識別できない場合は，文章で断るのが普通です．(“ここで ... は二項係数を表す”) など．

質問： テイラー展開は一般には $\sum$ 記号や ... を用いなければ正確に表現できないのですか?

お答え： 無限級数ですが，他にどういう表現法が考えられますか?

質問： 問題 7-1 について，3 つ目の • までで，$n = 0, 1, 2 \dots$ に対して $f^(n)(x) = $ (略) がいえます．だから 4 つめの • はいらない気がします... また 4 つ目の • で確認したかったのは，例 7.5 の「f は C^∞-級である」ということだけですか?

お答え： もちろん f は $(n+1)$ 回微分可能であることがわかったのですから，$f^{(n)}$ の連続性は明らかですね．ということを確かめていただければ結構だと思います．

質問： 講義資料 7 の問題 7-1 の 3 つ目の • で，$P_n(\frac{1}{x})$ を x で微分したものは $\frac{1}{x}$ の多項式になるのでしょうか．

お答え： 合成関数の微分法ですね．$P_n(t)$ を (t の多項式だと思って) 微分したものを $P_n'(t)$ とかいておくと，これも多項式で，

$$\frac{d}{dx} P_n\left(\frac{1}{x}\right) = P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

ですよね．これは多項式 $-t^2 P_n'(t)$ の t に $1/x$ を代入したものです．

質問：

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases} \quad \to \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases} \quad \to \quad \dots$$

についてなのですが，$f'(x) = 0$ $(x \leqq 0)$ が成立したことと同様の過程で，$f^{(k)}(x) = 0$ $(x \leqq 0)$ まで導くことができるというのは実際に問題を解く場合は「i 階微分したときの式が. . . 」のような形式で上記の操作を論理的に表現する必要がありますか.

お答え： やはりご質問の意味を読み取れません.「上記の操作」とはどれをさしているのでしょう．ご質問の文の中に「操作」が含まれていないような気がするのですが.「i 階微分したときの式が. . . 」などと断片でなく，実際に問題をといて，これでどう? と言ってくれると楽なんですが.

質問： 講義資料 5，問題 5-8 について，(中略) どうにも精度のよい値をだすことができません．電卓の結果から考察するに小数点以下 4 桁目までは正確でなければ最終的な解を得るこおてゃできないようですが，どのようにテイラーの定理を用いて計算を単純化するのか考えが及びませんでした. （後略）

お答え： 訂正ありがとうございました．後日，講義資料に書きましょう（今回はちょっと勘弁).

質問： ふつう問題を解くとき (試験)，C^{n+1} または C^{∞} とかを証明する必要はありますか.

お答え： 通常は (変態でなさそうな関数を扱っている限りは) 気にしなくてよいです．(山田の試験では)，必要な場合は，明示的に (explicit に) 要求します.

質問： $f(x) = e^x$ のテイラー展開の $R_{n+1}(x) =$ (略) を黒板では評価しましたが，私達が証明問題でテイラーの定理を使うとき，$R_{n+1}(x)$ の評価は必要なのでしょうか.

お答え： 必要な問題と必要でない問題があります．一般論としてはなんとも言えません.

質問： ランダウの記号のように

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

のとき，$f(x)$ と $g(x)$ の関係を表すものってありますか?

お答え： 面倒くさいので，ここでは挙げませんでしたが，このときも Landau の O 記号を用いるようです：たとえば $x^2 + 1 = O(x^2)$ $(x \to \infty)$.

質問： ランダウの記号についてですが,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ が存在する } = g(a) \neq 0, \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad = \quad f(a) \neq 0 \quad (g(a) \neq 0)$$

という解釈でよろしいでしょうか.

お答え： よくありません．まず Landau の記号がどこにも見えません．それから $=$ の使い方が変です.

質問： $\log 2$ と $\frac{1}{2}$ はどっちが大きいですか? $\log 2 > \frac{1}{2}$ だと助かるのですが.（演習の点がかかってる）(以下略）

お答え： まずは電卓をたたいてみてから考えましょ.

質問： $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} x = 0$ となるような x の条件って何ですか? これが分かればテイラーの定理に出てくる式の剰余項を $R_{n+1}(h)$ として,

$$|R_{n+1}(h)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^k(a) h^k \right| \dots (\text{後略})$$

として $\lim_{h\to 0} \frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0$ と証明できそうなんですが. . .

お答え： ご質問の意味がわかりません．(1) まず

$$\sum_{k=0}^{\infty} x = \begin{cases} +\infty & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -\infty & (x < 0) \end{cases}$$

だと思うのですが. . . . (2) $|R_{n+1}(h)|$ の次の式の絶対値の中は無限級数になっていますが，これが収束することは保証されるのでしょうか? 実解析的であることを仮定しているのでしょうか?

8　級数

■級数　数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots\}$ に対して $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{8.1}$$

の形を**級数**または**無限級数**という．

定義 8.1. 級数 (8.1) に対して

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

として得られる数列 $\{S_n\}$ (部分和) が収束するとき，級数 (8.1) は**収束する**といい，その極限値 S を級数の**和**といって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

と書く．数列 $\{S_n\}$ が収束しないとき級数 (8.1) は**発散する** という．

例 8.2. 実数 r に対して，

$$1 + r + r^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

は $|r| < 1$ のとき収束，$|r| \geqq 1$ のとき発散する．

補題 8.3. 級数 $\sum a_n$ が収束するならば $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

証明: 級数の和を S と置けば，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ で定まる数列 $\{S_n\}$ は S に収束する．この番号をひとつだけずらした数列 $T_n = S_{n+1}$ も S に収束するから，

$$a_{n+1} = T_n - S_n \to S - S = 0 \qquad (n \to \infty)$$

である．

この補題の対偶を取れば

$\{a_n\}$ が 0 に収束しないならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

■絶対収束

定義 8.4. 級数 $\sum a_n$ の各項の絶対値をとって得られる級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が収束するとき，級数 $\sum a_n$ は**絶対収束する**という．収束するが，絶対収束しない級数は**条件収束する**という．

2011 年 11 月 30 日

例 8.5. 例 8.2 の等比級数は $|r| < 1$ のとき絶対収束している．一方，

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

は条件収束する．

定理 8.6. 絶対収束する級数は収束する．

証明: 級数 $\sum a_n$ に対して

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

とおくと，仮定から数列 $\{T_n\}$ はある実数 T に収束する．とくに，収束する数列はコーシー列だから $\{T_n\}$ はコーシー列．いま，任意の番号 m, n $(m > n)$ に対して

$$|S_m - S_n| = |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| \leqq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = T_m - T_n = |T_m - T_n|$$

が成り立つので，$\{S_n\}$ もコーシー列．したがって，実数の連続性により $\{S_n\}$ は収束する．

命題 8.7. 級数 $\sum a_n$ に対して，

(1) すべての番号 n に対して $|a_n| \leqq b_n$，

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する，

という条件を満たす級数 $\sum b_n$ が存在するならば $\sum a_n$ は絶対収束する．

証明: 級数 $\sum |a_n|$ の部分和 $\{S_n\}$ は単調非減少．さらに，$\sum b_n$ は収束するから

$$S_n \leqq \sum_{k=1}^{n} b_k \leqq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

したがって，$\{S_n\}$ は上に有界な単調非減少数列なので，実数の連続性より収束する．

■条件収束する級数

命題 8.8. すべての項が正であるような数列 $\{a_n; n = 0, 1, \dots\}$ が単調非増加，かつ 0 に収束しているとする[*1]．このとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束する．

証明: 2 つの数列 $\{p_m\}, \{q_m\}$ を

$$p_m := \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a_k, \qquad q_m := \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k a_k$$

により定める．すると，$\{a_n\}$ が単調非増加であるから

$$p_{m+1} = p_m - (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \leqq p_m, \qquad q_{m+1} = q_m + (a_{2m+2} - a_{2m+3}) \geqq q_m$$

なので $\{p_m\}$ は単調非増加，$\{q_m\}$ は単調非減少．一方，各 m に対して $q_m - p_m = -a_{2m+1} \leqq 0$ だから $p_m \geqq q_m$．したがって

$$p_m \geqq q_m \geqq q_{m-1} \geqq \dots \geqq q_1, \qquad q_m \leqq p_m \leqq p_{m-1} \leqq \dots \leqq p_1,$$

[*1] “$(-1)^n a_n$” という書き方で最初の項を正にしたかったので $n = 0$ から始めたが，本質的なことではない．

すなわち $\{p_m\}$ は下に有界，$\{q_m\}$ は上に有界．ゆえに実数の連続性から $\{p_m\}$, $\{q_m\}$ はそれぞれある実数 p, q に収束する．ここで

$$q-p=\Big(\lim_{m\to\infty} q_m\Big)-\Big(\lim_{m\to\infty} q_m\Big)=\lim_{m\to\infty}(q_m-p_m)=\lim_{m\to\infty}(-a_{2m+1})=0.$$

したがって $p=q$ となる．考えている級数は，この値に収束することを示そう．
いま，正の数 ε に対して，次のような番号 N を一つとることができる．

$$m\geqq N \text{ を満たす任意の } m \text{ に対して } |p_m-p|<\varepsilon \text{ かつ } |q_m-p|<\varepsilon.$$

そこで，

$$S_n:=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$

とおき，$N'=2N+1$ とすると，$n\geqq N'$ を満たす n に対して，$S_n=p_m$ または $S_n=q_m$ $(m\geqq N)$ と書ける．したがって，N のとり方によって $|S_n-p|<\varepsilon$.

■冪級数と収束半径　定数 a と変数 x に対して

(8.2) $$p_0+p_1(x-a)+p_2(x-a)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-a)^n$$

の形の級数を a を中心とする**べき級数** (冪級数，巾級数，整級数）という．ここでは，簡単のため，主に 0 を中心とする冪級数

(8.3) $$p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n$$

を扱う．

補題 8.9. 冪級数 (8.2) が $x=X$ に対して収束するならば，$|x-a|<|X-a|$ を満たす任意の x に対して (8.2) は絶対収束する．

証明: 簡単のため $a=0$ の場合（級数 (8.3) の場合) を証明する．いま，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_nX^n \qquad \text{が収束することから，} \qquad \lim_{n\to\infty}p_nX^n=0.$$

収束する数列は有界だから，

$$|p_nX^n|\leqq M \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

を満たす実数 M が存在する．いま $|x|<|X|$ を満たす実数 x に対して，$\rho=|x/X|$ とおけば $|\rho|<1$ で，

$$|p_nx^n|=|p_nX^n|\left|\frac{x}{X}\right|^n\leqq M\rho^n.$$

右辺を一般項とする級数は収束するので，$\sum|p_nx^n|$ は収束する．

定理 8.10 (収束半径の存在)**.** 与えられた冪級数 (8.2) に対して，次の何れかが成り立つ：

(1) ある負でない実数 r で，次を満たすものが存在する：
- $|x-a|<r$ を満たす x に対して級数 (8.2) は絶対収束する．
- $|x-a|>r$ を満たす x に対して級数 (8.2) は発散する．

(2) 任意の実数 x に対して (8.2) は絶対収束する．

証明: 簡単のため $a=0$ の場合（級数 (8.3) の場合) を証明する．集合

$$R=\{\rho\in\boldsymbol{R};\, x=\rho \text{ に対して級数 (8.3) は収束する }\}$$

を考える．$0\in R$ であるから R は空集合でない．

(1) R が上に有界である場合：実数の連続性より $r=\sup R$ が存在する．とくに $0\in R$ だから $r\geqq 0$ である．いま x が $|x|<r$ を満たしているとする．このとき，上限の性質から $|x|\leqq\rho<r$ を満たす $\rho\in R$ が存在するから，補題 8.9 から (8.3) は絶対収束する．一方 $|x|>r$ とする．もし，このような x に対して (8.3) が収束するならば，$|x|>\rho>r$ となる ρ をとれば $x=\rho$ に対して (8.3) は絶対収束する．これは $r=\sup R$ であることに矛盾する．したがって $|x|>r$ で (8.3) は発散する．

(2) R が上に有界でない場合：このとき，任意の x に対して $|x|<\rho$ となる $\rho\in R$ が存在する．したがって補題 8.9 より (8.3) は絶対収束する．

定義 8.11. 定理 8.10 の第一のケースの場合，r を冪級数 (8.2) の**収束半径**という．第二のケースの場合，(8.2) の**収束半径は無限大である**という．

例 8.12. (1) 冪級数

$$1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

の収束半径は 1 である．$x=1$, $x=-1$ のとき，この級数は発散する．

(2) 冪級数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

の収束半径は 1 である．実際，(1) $|x|<1$ のとき，$|(-1)^{n+1}x^n/n|\leqq|x|^n$ であるから，この冪級数は絶対収束する．したがって，収束半径は 1 以上である．(2) $x=-1$ のとき，この級数は発散する．したがって，収束半径は 1 以下である．

なお，この級数は $x=1$ のときは収束 (条件収束) し，その和は $\log 2$ になる (ことを次回確かめる).

(3) 冪級数

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

の収束半径は 1 である．さらに $x=\pm1$ のとき，この級数は条件収束する．

(4) 冪級数

$$x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

の収束半径は 1 である．さらに $x=\pm1$ のとき，この級数は絶対収束する．

(5) 冪級数

$$1+2x+3x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

の収束半径は 1 である．実際，$x=1$ のときにはこの級数は発散するので，収束半径は 1 以下．一方，$|x|<1$ のときは $|x|=1/(1+h)$ $(h>0)$ と書けるが，$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}|(n+1)x^n|&=\left|\frac{n+1}{(1+h)^n}\right|=\left|\frac{n+1}{1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2++\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)h^3+\cdots+h^n}\right|\\&\leqq\frac{6(n+1)}{n(n-1)(n-2)h^3}=\frac{6}{h^3}\frac{n}{n+1}\frac{1}{(n-1)(n-2)}\leqq\frac{6}{h^3}\frac{1}{\frac{1}{2}(n-2)^2}\leqq\frac{12}{h^3}\frac{1}{(n-2)^2}.\end{aligned}$$

右辺を一般項とする級数は収束するから，$|x| < 1$ なら問題としている冪級数は絶対収束する．

(6) 冪級数

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

の収束半径は 0 である．実際，$|x| \geqq 1$ のときは $|n!x^n|$ は正の無限大に発散するので，冪級数は収束しない．一方 $0 < |x| < 1$ のとき，$|x| > \frac{1}{N}$ を満たす N を一つとると，$n \geqq N$ のとき

$$n!|x|^n \geqq \frac{1 \cdot 2 \cdots N \cdot (N+1) \cdots n}{N^n} \geqq \frac{N!}{N^N}$$

となり $n!x^n$ は 0 に収束しない．したがって，任意の $x \neq 0$ に対してこの冪級数は収束しない．

(7) 冪級数

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

の収束半径は無限大である．実際，前回みたように，任意の x に対して，左辺の級数は e^x に収束する．

問題

8-1 次は正しいか．正しければ証明を，正しくなければ反例をあげなさい．

(1) 絶対収束する級数は収束する．

(2) 収束する級数は絶対収束する．

(3) 級数 $\sum a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば級数 $\sum a_n$ は収束する．

8-2 次の級数の和を求めなさい．ただし r は実数の定数である．

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n.$

8-3 次の級数の収束，発散を調べなさい．ただし α は実数の定数である．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$

8-4 例 8.12 を確かめなさい．