2011 年 12 月 7 日 (2011 年 12 月 7 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 9

お知らせ

- 12 月 21 日 (水) 授業時間に「中間試験」を実施します．詳細は，本日配布する「試験予告」をご覧ください．試験予告は，この科目の web ページおよび OCW でもダウンロードできます．

9 冪級数

■数列の上極限，下極限 数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるとき，各番号 n に対して

$$b_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = \sup\{a_k \mid k \geqq n\} \tag{9.1}$$

は単調非増加数列である．もし，$\{b_n\}$ が下に有界なら，実数の連続性からその極限値が存在する．そうでなければ $b_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ である．

定義 9.1. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界なとき，(9.1) で与えられる数列 $\{b_n\}$ の極限値 β を数列 $\{a_n\}$ の**上極限**といって

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

とかく．とくに $\{b_n\}$ が下に有界でないときは $\beta = \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ である．また，数列 $\{a_n\}$ が上に有界でないときは $\beta = \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と定める．

例 9.2.
- 数列 $\{a_n\}$ が β に収束するならば $\limsup_{n\to\infty} a_n = \beta$ である．
- 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

とする．$\{a_n\}$ は発散するが，$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ である．

補題 9.3. $\limsup_{n\to\infty} a_n = d$ が正の無限大でなければ，$d \leqq a_n$ となる番号 n が無限個存在する．

証明: 数列 $\{b_n\}$ を (9.1) のようにとれば，b_n は d に単調非増加で収束するのだから，$d \leqq b_n$ が成り立つ．ここで b_n の定義より任意の正の数 ε に対して $b_n \leqq a_m < b_n + \varepsilon$ となる a_m $(m \geqq n)$ が存在する．したがって $d \leqq b_n \leqq a_m$．そこで，この b_m に対して同じ議論を行えば，さらに m より大きい番号 m' で $d \leqq a_{m'}$ となるものをみつけることができる．この操作は無限に続けることができるので結論をえる．

補題 9.4. (1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(2) 数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

2011 年 12 月 7 日 (2011 年 12 月 7 日訂正)

■冪級数の収束半径　冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9.2}$$

の収束半径 r を求める方法を与えよう．

定理 9.5.
- 級数 (9.2) の収束半径 r は
$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$
で与えられる．ここで，右辺の上極限が 0, $+\infty$ の場合はそれぞれ $r=+\infty$, $r=0$ とする．(Cauchy の公式)
- もし，
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$
が存在するならば，それが (9.2) の収束半径である．(d'Alembert の判定法)

証明: 第一の公式：まず $d := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が正の値であるとき，$r = 1/d$ が収束半径であることを示す：上極限の定義から，
$$b_n = \sup\{\sqrt[k]{a_k}\,;\, k \geqq n\}$$
は単調非増加で，d に収束する．したがって，任意の正の数 ε に対して，次を満たす番号 N が存在する：

$$n \geqq N \text{ ならば } d \leqq b_n \leqq d+\varepsilon. \tag{9.3}$$

- 9.3 の N に対して，$n \geqq N$ ならば $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq d+\varepsilon$ が成り立つ (b_n の定義式よりすぐわかる)．いま $|x| < r = 1/d$ を満たす x に対して，$|x| < 1/(d+\varepsilon)$ となる正の数 ε をとり，それに対して 9.3 のように N をとれば
$$|a_n x^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|}|x|\right)^n \leqq ((d+\varepsilon)|x|)^n = \rho^n \qquad (\rho = (d+\varepsilon)|x| < 1)$$
となる．ここで $0<\rho<1$ だから $\sum \rho^n$ は収束する．したがって前回の命題 8.7 よりあたえらえた級数は絶対収束する．
- 補題 9.3 より $\sqrt[n]{|a_n|} \geqq d$ となる番号 n は無限個存在する．そのような n と $|x| > r = 1/d$ となるような x に対して，
$$|a_n x^n| = (\sqrt[n]{|a_n|}|x|)^n > 1.$$
したがって $|x| > r$ のときは，数列 $|a_n x^n|$ は 0 に収束しない．したがって与えられた級数は発散する．

$r = 0$, $+\infty$ の場合は省略する (演習問題)．
第二の条件も，同様に“等比級数”と比較することで示すことができる (演習問題)．

例 9.6.
- 前回のテイラー級数の具体例の収束半径は容易にわかる．
- n の多項式 $p(n)$ に対して，級数 $\sum p(n)x^n$ の収束半径は 1 である．
- $\sum a_n x^n$ の収束半径が r ならば $\sum n a_n x^n$ の収束半径も r である．

■冪級数の項別微積分　冪級数 (9.2) の収束半径が $r\ (>0)$ であるとする．このとき，区間 $(-r, r)$ で定義された関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-r < x < r) \tag{9.4}$$

が定義される[*1].

以下，関数 $f(x)$ の性質を列挙する．詳細は次回に扱う：

定理 9.7. (9.4) で与えられた関数は区間 $(-r, r)$ で連続である．

定理 9.8 (項別積分)**.** 関数 (9.4) に対して

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n \qquad (-r < x < r)$$

が成り立つ．とくに右辺の冪級数の収束半径も r である．

定理 9.9 (項別微分)**.** 関数 (9.4) は $(-r, r)$ で微分可能で，

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \qquad (-r < x < r) \tag{9.5}$$

が成り立つ．とくに右辺の冪級数の収束半径も r である．

系 9.10. 収束半径 r が正であるような冪級数により式 (9.4) で与えられる関数は開区間 $(-r, r)$ で C^{∞}-級で，

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

である．

証明: 項別微分定理から，f は微分可能．さらに f' も収束半径 r の冪級数で書かれているので，とくに連続．したがって f は C^1-級．以下，帰納的に f は任意の n に対して C^n-級となることがわかる．
さらに (9.5) より $f'(0) = a_1$ となる．(9.5) を微分して $f''(0) = 2a_2 \ldots$ と帰納的に a_n を求めることができる．

定理 9.11 (Abel の連続定理)**.** 冪級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径が r $(0 < r < +\infty)$，かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

が収束するならば，

$$\lim_{x \to r-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

が成り立つ．

注意 9.12. 定理 9.11 は自明ではない．実際，左辺の極限が存在しても，右辺が収束するとは限らない．この講義では証明は与えず，事実として認めてもらうことにする．

■例題　級数

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \tag{9.6}$$

を考える．

[*1] 前回も例に挙げたように $x = r$ や $x = -r$ で定義されるかどうかは場合による．

- 定理 9.5 からこの級数の収束半径は 1 である．
- この級数が表す関数は

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

である．これは，等比級数の和の公式から得られる．

- 項別積分定理 9.8 から

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{dx}{1+t} = \log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad (-1 < x < 1) \tag{9.7}$$

がわかる．

- 式 (9.7) の右辺の級数は $x = -1$ のとき

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)$$

となり，発散する．

- 一方，$x = 1$ のとき，式 (9.7) の右辺の級数は

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

は命題 8.8 から収束する．

- したがって，Abel の定理より

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots &= \lim_{x \to 1-0}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) = \lim_{x \to 1-0} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \\ &= \lim_{x \to 1-0} \log(1+x) = \log 2. \end{aligned}$$

以上より，公式

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

が得られた[*2]．

[*2] もちろん，この公式は，等比級数の (有限) 和の公式を用いて示すことができる (以前示した)．またテイラーの定理の剰余項 (積分を用いたもの) の評価をすることによっても得られる．

問題

9-1
- 等式 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を次を用いて示しなさい：
  任意の正の数 ε に対して $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(1+\varepsilon)^n}{n}=+\infty$ が成り立つ（二項定理を用いれば良い）．したがって，十分大きい n に対して $n<(1+\varepsilon)^n$.
- 数列 $\{a_n\}$ に対して $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ であることを次のようにして示しなさい：
  前の問いより，任意の正の数 ε に対して，“$n\geqq N$ ならば $1\leqq\sqrt[n]{n}\leqq 1+\varepsilon$” が成り立つような番号が存在する．この N に対して $n\geqq N$ ならば

9-2 上の問題 1 (a) の極限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を次のようにして求めた：

$a_n=\sqrt[n]{n}$ に対して $b_n=\log a_n$ とおけば，$b_n=\dfrac{\log n}{n}$ である．ここで，x の関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ を考えると，$x\to+\infty$ のときこれは ∞/∞ の形の不定形であり，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \text{だから} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0.$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$$

となるので $\lim_{n\to\infty}a_n=e^0=1$.

この議論を正当化しなさい．

9-3 収束半径が $r>0$ であるようなべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ が定める関数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (-r<x<r)$$

を考える．

(1) $0<s<r$ なる実数 s をひとつとって固定しておく．このとき，任意の ε に対してある番号 N で

$$n\geqq N \quad\Rightarrow\quad |x|\leqq s \text{ をみたす任意の } x \text{ に対して} \quad \left|f(x)-\sum_{n=0}^{n}a_nx^n\right|<\varepsilon$$

をみたすものが存在することを示しなさい．

(2) 上の結果を用いて f が $(-r,r)$ で連続であることを示しなさい．

(3) さらに，べき級数の項別積分の公式を示しなさい．

9-4 自然数でない実数 α をひとつとる．

(1) 負でない整数 n に対して二項係数

$$\binom{\alpha}{n}=\left({}_{\alpha}\mathrm{C}_n\right)=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!},\qquad \binom{\alpha}{0}=1$$

と定める．このとき，べき級数

$$(**)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

の収束半径は 1 である．

(2) 区間 $-1 < x < 1$ で級数 $(**)$ が表す関数は $(1+x)^\alpha$ である.

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$ を $x = 0$ のまわりでべき級数に展開しなさい.

(4) $0 < k < 1$ をみたす実数 k に対して

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx$$

であたえられる k の関数 $E(k)$ を $k = 0$ のまわりでべき級数に展開しなさい.

9-5 (1) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} x^{3n+2}$ の収束半径は 1 である.

(2) (a) の級数が表す関数を $f(x)$ $(-1 < x < 1)$ とするとき $f'(x)$ を求めなさい.

(3) アーベルの定理を用いて級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ の和を求めなさい.

9-6 上の問題の類題を作りなさい.

9-7 つぎの関数を $x = 0$ のまわりでテイラー級数に展開しなさい：

$$f(x) = \frac{1}{1 - 4x + 5x^2 - 4x^3 + 4x^4}.$$

9-8 べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ が定める関数を $f(x)$ とおく.

(1) このべき級数の収束半径 r を求めなさい.

(2) $f(x)/x$ は $-r < x < r$ で連続な関数である.

(3) 項別積分により

$$\int_0^X \frac{f(x)}{x}\, dx$$

のべき級数展開を求めなさい.

(4) $f(x)$ の具体的表示を求めなさい.

9-9 (1) 双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ を $x = 0$ を中心とするテイラー級数に展開しなさい.（収束半径も求めること）.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$ の和を求めなさい.