2011 年 12 月 14 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 10

お知らせ

- 次回，12 月 21 日は中間試験を実施します．単位が必要な方は必ず出席してください．「中間試験予告」の用紙は，この講義の web ページ，東工大 OCW (12 月 7 日の授業のあたり) におきます．
- 今回は質問用紙の受付はいたしません．ご了承ください．

前回までの訂正

- 黒板の 3 枚目：“$\{\alpha_n\}$ の上極限” の説明で，“$\limsup_{n\to\infty} a_n$” と書いていたそうです．“$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n$” に訂正です．
- $\tan^{-1} x$ の冪級数表示についてですが，
$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad \beta_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$
とおいて，$\beta_0 = 0$ としましたが，$\beta_0 = 1$ が正しいとご指摘いただきました．(結局，極限をとるので最初の方ないくつでもいいのですが...) さらに $\beta_2 = 1/\sqrt{3}$ は $\beta_2 = 1/\sqrt[3]{3}$ の誤りです．
- 講義資料 9, 2 ページ 9 行目 (講義の際に指摘しました)：
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$
- 講義資料 9, 2 ページ 13 行目: $b_n = \sup\{\sqrt[k]{a_k}\,;\,k \geqq n\} \Rightarrow b_n = \sup\{\sqrt[k]{|a_k|}\,;\,k \geqq n\}$
- 講義資料 9, 2 ページ 29 行目: $|a_n x^n| = (\sqrt[n]{|a_n|}|x|)^n \leqq 1 \Rightarrow |a_n x^n| = (\sqrt[n]{|a_n|}|x|)^n > 1$
- 講義資料 9, 3 ページ 5 行目 (講義の際に指摘しました)：「ご了承下さい」を削除
- 講義資料 9, 3 ページ，定理 9.8 の式：
$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n \quad \Rightarrow \quad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$
- 講義資料 9, 3 ページ，8 行目：$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$
- 講義資料 9, 4 ページ，6 行目：$\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+t} = \log x \Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x)$
- 講義資料 9, 4 ページ，9 行目：
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \qquad \Rightarrow \qquad -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)$$

授業に関する御意見

- 講義資料 p.1 に「数列の上極限，下極限」って書いてあるのに，下極限の説明がない．これいかに．
  山田のコメント： 上極限の定義をこのようにすれば，下極限の定義は自分で作り出すことができる (ことを期待している)．
- 演習でも似たようなことをしましたが，講義の最後の方の例の問題はなかなか面白いと思いました．
- 最後の「パズル」おもしろいですね．
  山田のコメント： でしょ．
- だんだん微積分に興味を持つようになった．　**山田のコメント：** よかったです．
- 中間試験頑張ります!　**山田のコメント：** そうしてね．
- どうして項別積分のところでご了承することになったのでしょうか...？　**山田のコメント：** コピペのミスです．
- とにかく寒いです．　**山田のコメント：** 出席率を上げたいですね．
- むずかしい!　**山田のコメント：** なんで？
- うーん，だんだん理解できなくなってきました．　**山田のコメント：** ざんねん!
- このプリントは人からもらいました．　**山田のコメント：** そうですか．

質問と回答

質問： 講義資料 9 の 1 ページ目にある上極限の定義ですが，$\{a_n\}$ が上に有界で $\{b_n\}$ が下に有界でない場合がよくわかりません．たとえばどんな例がありますか?

お答え： $a_n=-n$ とおくと，$b_n=-n$ となりますね．

質問： 講義資料の例 9.2 の $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ というのがよくわかりません．-1 ($\liminf$?) なら分かるのですが . . . それとも $n\to\infty$ のときだけを考えればいいのでしょうか．

お答え： 最後の文の意味がわからない．$a_n = (-1)^n + (1/n)$ ですから，$a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{5}{4}$ . . . なので，定義通り，$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ とおけば，$b_1 = 0$, $b_2 = \frac{3}{2}$, $b_3 = \frac{5}{4}$, $b_4 = \frac{5}{4}$, . . . なので $n \geqq 2$ のとき $b_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ 1+\frac{1}{n+1} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$. したがって $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

質問： 例 9.2 の (中略) $\limsup a_n = 1$ はどうやって得ますか?　**お答え：**上の質問の回答参照．

質問： $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} & (n : \text{odd}) \\ 0 & (n : \text{even}) \end{cases}$ $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n}$ のとき $=0$ ではないですか．どうして極限値は存在しない?

お答え： $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ は 1 ですよ．

質問： $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \beta$ ということが分かるが，もしも $\{a_n\}$ が発散しても，$\limsup_{n\to\infty} a_n$ が値をもつ (講義資料の例 9.2) という場合もある．これはなぜでしょうか．a_n は発散するが，$n=p$ のところで無限に近づいているから，その上限が収束する．これは正しいですか．

お答え： ただしくありません．発散する，といっても “正の無限大に発散する” のであれば $\limsup a_n = +\infty$ になってしまいます．例 9.2 の例のように有界な数列でないと $\limsup$ は存在しません．— ここでは，数列が “発散する” とは “収束しない” という意味だということを思い出してください．

質問： d'Alembert の判定法が成り立つのは，n が十分大きいとき，$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b$ とすると $\{a_n\}$ を公比 b の等比数列とみなし，$a_n x^n = b^n a_0 x^n = a_0(bx)^n$ が収束するのは $|bx| < 1$ のときなので，$r = \frac{1}{|b|}$ になると思って大丈夫ですか．

お答え： だいたい大丈夫．“等比数列とみなして” は “等比数列に近い” ということですね．念の為に証明を付けておきましょう：数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = r$ が存在したとする．このとき，$|x| < r$ を満たす x に対して $|x| + \varepsilon < r$ を満たす正の数 ε をとると，極限の定義から，“$n \geqq N$ ならば $r - \varepsilon < |a_n/a_{n+1}|$” を満たすものが存在する．すると，$|a_{n+1}| > |a_n|/(r-\varepsilon)$ なので，$M \geqq N$ を満たす任意の番号 M に対して

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{M} |a_n x^n| &= \sum_{n=0}^{N} |a_n x^n| + \sum_{n=N}^{M} |a_n x^n| \leqq \sum_{n=0}^{N} |a_n x^n| + \sum_{n=N+1}^{M} \left| \frac{a_N}{(r-\varepsilon)^{n-N}} x^n \right| \\ &= \sum_{n=0}^{N} |a_n x^n| + |x|^N \sum_{n=N+1}^{M} \left| \frac{a_N}{(r-\varepsilon)^{n-N}} x^{n-N} \right|.\end{aligned}$$

ここで $|x/(r-\varepsilon)| < 1$ なので，最後の級数は上に有界．したがって，$|x| < r$ のとき問題としている級数は絶対収束する．$|x| > r$ のときは同様の議論を行って，$|a_n x^n|$ が 0 に収束しないことを示せばよい．

質問： d'Alembert の判定法 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が $r > 1$ であればどんな x でも発散しそうな気がするのですが，$r > 1$ であっても収束半径は r なのですか．

お答え： たとえば $a_n = \rho^n$ とすると $\sum a_n \rho^n = \sum (\rho x)^n$ なので $|\rho x| < 1$ をみたす任意の x に対して収束する．

質問： 9.5 では $r = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ で r が決まり，収束半径の求め方では $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するなら $r = 1/\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ となっていますが，実際に r を求める場合はどちらの場合を使うのがよいのですか．

お答え： 前者はいつでも正しいが，後者は考えている数列が収束しない場合に判定ができない．

質問： 収束半径は $1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ と a_n/a_{n+1} のどちらのほうが求めるのに良く使いますか．　**お答え：**どちらも

質問： $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が $r = 1/\limsup$(略) となることが分かったのは何かに導かれたからですか?

お答え： 証明は講義資料にある．ラフな説明は講義でやった（等比級数と比較する)．

質問： 冪級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径が r $(0 < r < +\infty)$ で，$0 < R < r$ となるような R 考えたとき，

$\displaystyle\lim_{x\to R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ が成り立ちますか?

お答え： はい，それが “冪級数が定める関数の連続性” (講義資料 9，定理 9.7) です．

質問： パソコンで $\log x$ をテーラ展開を用いて計算するプログラムを作りたいのですが，$\log(1+x)$ は $(-1<x\leqq 1)$ の時しか展開できないが，テーラ展開でつくることができますか．このとき，1 は級数 $x-\frac{1}{2}x^2+\dots$ の収束半径というのですか．

お答え： 後半：そうです．前半：$\log ax=\log a+\log x$ などの関係を用いて $\log X$ の X を $(0,2)$ の間の値に帰着させる．実際には，収束半径に近い部分ではテイラー級数の収束が遅くなり，効率が悪いので，なるべく $\log(1+x)$ の $|x|$ は小さいものにしたほうがよい．関数 $1/x$ を数値積分する，というのももうひとつの計算のしかたです．

質問： $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ の収束半径が 1 となる証明の中で，$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha}{x+1}$ を導出するところまではわかりましたが，その先から分からなくなりました．

お答え： この部分では，すでに収束半径が 1 であることが示されています．さて，$f(x)$ (最初の冪級数で表される関数) は $f(0)=1$ なので，ご質問の式の両辺を積分すると，$|x|<1$ のとき

$$\int_0^x\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt=\log f(x)-\log f(0)=\log f(x),\qquad \int_0^x\frac{\alpha\,dx}{1+x}=\log(1+x)^{\alpha}.$$

したがって $f(x)=(1+x)^{\alpha}$．

質問： $(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ $(|x|<1)$ を示すときに

$$(1+x)f'(x)=\alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^{n+1}\right)=\alpha\left[\binom{\alpha}{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1}\right\}x^n\right]=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

この変形は何がどうなっているのですか?「パスカルの三角形」は実際にやってみたので良いのですが，2 行目の $\binom{\alpha-1}{n}$ がどこから来てどこに行ったのかがわかりません．

お答え： $\binom{\alpha-1}{0}$ の間違いです．

質問： $\sin x$ は C^{∞} class なのに $\sin x$ にテーラーの定理を使うと，$\sin(a+h)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}h^j+R_{n+1}(a+\theta h)^{n+1}$ だから有限回 h で微分すると右辺が 0 になってしまうのですが，これはなぜですか? そもそもテーラーの定理で表したものを項別微分や項別積分はできないのですか?

お答え： 剰余項の形が変ですね．授業で扱ったのは $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}$ $(0<\theta<1)$ の形です．この剰余項の θ は "h を決めるごとに決まる" ので h の関数になっていることに注意しましょう．

質問： $1-x^2+x^4-\dots=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$ を積分して，

$$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\dots=\tan^{-1}x-\int\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx=\tan^{-1}x$$

の積分は 0 の近くですか?

お答え： 最初の和は無限和でなく，有限和です．最後の等号は $\to$ $(n\to\infty)$ です．その上で，$|x|\leqq 1$ のとき，

$$\int_0^x\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx\to 0\qquad(n\to\infty)$$

であることが示せます．

質問： $\tan^{-1}x$ のテイラー展開は $x\in\boldsymbol{R}$ でできますか? **お答え：**いいえ $-1\leqq x\leqq 1$ です．

質問： なぜ項別積分は可能なのですか? **お答え：**証明の概略は次回やります (といいましたよね)．

質問： アーベルの定理を使う際に，これが自明ではないのに，なんの注意もせずに使っていいのですか?

お答え： 注意して使って下さい．

質問： $\sup\{a_n,a_{n+1},\dots\}$ と $\mathrm{Max}\{a_n,a_{n+1},\dots\}$ は同じ意味に思えてしまうのですが，どう異なりますか?

お答え： 「上限」を復習せよ．$\sup\left\{1-\frac{1}{n}\,|\,n=1,2,3,\dots\right\}=1$ だが $\max\left\{1-\frac{1}{n}\,|\,n=1,2,3,\dots\right\}$．は存在しない．

質問： 最後の問題で，$f(x)$ を微分して整理して積分して収束半径を x に代入するくらいなら，もとから $f(x)$ を整理して Abel の定理を使ってもとめればいいじゃないですか．

お答え： できますか? 言うだけではなく，やってごらんなさい．その上で，できたかできないか，教えてください．

質問： 普通に数列の級数の極限を求めるために，その級数を冪級数にして項別積分や項別微分を使って求められるようになるのでしょうか.（先生が最後に書いた例.）

お答え： 問題によります．具体的な級数の和を求めるのは一般論ではなく，いろいろなアイディアが必要です．

質問： なぜ $\int_0^{\infty}f(x)dx$ や $\frac{d}{dx}f(x)$ が r になるんですか． **お答え：**なりません．

質問： 「冪級数」の一文字目が読めません．読み方を教えてください．

お答え： 「べき」講義中何回も読んでいますし，11 月 30 日には，「巾級数」は嘘字，という話もしましたよね．

10　関数列の一様収束

■関数列の収束　各番号 n に対して数直線上の区間 I 上で定義された関数 f_n が与えられているとき，$\{f_n\}$ を区間 I 上の**関数列**という．このとき，各 $x \in I$ に対して $\{f_n(x)\}$ はひとつの数列を与えている．

定義 10.1. 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ が I で定義された関数 f に**収束する** または **各点収束する**とは,

$$\text{各 } x \in I \text{ に対して} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

が成り立つことである．

例 10.2. 正の整数 n に対して $[0,1]$ 上で $f_n(x) = x^n$ とすると $[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}$ が得られる．一方

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

とすると，$[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}$ は f に各点収束する．

この例のように，連続関数からなる関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束しているからといって f が連続になるとは限らない．

例 10.3. 2 以上の自然数 n に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \left(0 \leqq x < \frac{1}{n}\right) \\ -n^2x + 2n & \left(\frac{1}{n} \leqq x < \frac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{2}{n} \leqq x \leqq 1\right) \end{cases}$$

とおくと f_n は $[0,1]$ で連続である．このとき，関数列 $\{f_n\}$ は $f(x) = 0$ で定まる定数関数 f に収束する．

実際，$x = 0$ のとき $f_n(0) = 0$ だから $\lim f_n(0) = 0$．一方 $0 < x \leqq 1$ のときは，$x \geqq 2/N$ となる番号 N に対して $n \geqq N$ ならば $f_n(x) = 0$ である．すなわち，数列 $\{f_n(x)\}$ は $n \geqq N$ なる番号に対して恒等的に 0 であるから，$\lim f_n(x) = 0$.

さて，各番号 $n \geqq 2$ に対して f_n は $[0,1]$ で連続であるから積分可能で,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$$

である．(真面目に積分しなくても三角形の面積の公式からすぐにわかる．) 一方

$$\int_0^1 0\,dx = 0$$

であるから,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$$

である．すなわち，積分と極限の順序を交換することはできない．

2011 年 12 月 14 日

■一様収束　例 10.2 や 10.3 のような現象が起きるのは "f_n が f に収束する速さ" が x によって異なることにある．そこでもう少し強い収束の概念を導入する．

定義 10.4. 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ が I 上の関数に**一様収束**するとは，任意の正の数 ε に対して，次を満たす番号 N が存在することである：

$n \geqq N$ を満たすすべての番号 n と任意の $x \in I$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

注意 10.5. すべての $x \in I$ に対して $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ が成り立つということは, 区間 I 上での $|f_n(x)-f(x)|$ の上限が ε を超えないことと同値である．すなわち，

区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束するための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in I\} = 0$$

となることである．

この左辺の sup を

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

と書くこともある．

補題 10.6. 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に一様収束するならば，$\{f_n\}$ は f に各点収束する．

証明: 任意の $x \in I$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

である．

例 10.7. 正の整数 n に対して $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$ により，区間 $I = [0, \pi]$ 上の関数列を定義する．すると，この関数列は $f(x) = 0$ となる定数関数 f に一様収束する．実際

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n}\sin nx\right| \leqq \frac{1}{n}$$

だから

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{n} \to 0.$$

ところで，各 f_n は微分可能で $f_n'(x) = \cos nx$ である．一方 $f'(x) = 0$ であるから，関数列 $\{f_n'\}$ は f' に各点収束しない (したがって一様収束もしない).

定理 10.8. 区間 I 上の連続関数からなる関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に一様収束するならば，f は I で連続である．

証明: 関数 f が点 $a \in I$ で連続であるとは,

任意の正の数 ε に対して，次を満たす正の数 δ が存在することである：$|x - a| < \delta$ を満たすすべての $x \in I$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

このことを示したい.

正の数 ε を与えたとき，(一様収束の定義の ε を $\varepsilon/3$ と置き換えて)，ある番号 N で

(*)　　$n \geqq N$ を満たす各番号 n と任意の $y \in I$ に対して $|f_n(y) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ となる

ものが存在する．そのような N をとり $n \geqq N$ を満たす番号 n をひとつ固定する．すると f_n は $a \in I$ で連続だから，正の数 δ で (連続性の定義の ε を $\varepsilon/3$ と置き換えて)

$$(**)\qquad |x-a| < \delta \text{ を満たす任意の } x \in I \text{ に対して } |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ となる}$$

となるものが存在する．

このような δ をとると，$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $(*)$，$(**)$ から

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leqq |f(x) - f_n(x)| - |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって f は $a \in I$ で連続である．点 a のとり方は任意だったから，f は I で連続である．

定理 10.9. 閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数の列 $\{f_n\}$ が f に収束するならば f は I で積分可能で，

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．

証明: 閉区間で連続な関数はその区間で積分可能だから，f_n は $[a, b]$ で積分可能．さらに定理 10.8 から f は連続なので $[a, b]$ で積分可能である．ここで，$\sup_{x\in I}\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|$ は x によらない定数であることに注意すれば

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b \bigl(f_n(x) f(x)\bigr)\,dx\right| \leqq \int_a^b \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|\,dx \\ &\leqq \int_a^b \left\{\sup_{x\in I}\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|\right\} dx = \sup_{x\in I}\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| \times (b-a) \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となるので，結論が得られた．

■冪級数の一様収束性　ここでは簡単のため 0 を中心とする冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{10.1}$$

を考える．以下，級数 (10.1) の収束半径は $r \in (0, +\infty]$ とする*1．このとき，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-r < x < r) \tag{10.2}$$

は区間 $(-r, r)$ で定義された関数である．いま，番号 n に対して，冪級数 (10.1) の最初の $n+1$ 項の和

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{10.3}$$

は (実は $\boldsymbol{R}$ 全体で定義されるが) $(-r, r)$ で定義された連続関数である．このようにして得られた関数列 $\{f_n\}$ は，区間 $(-r, r)$ で (10.2) で定義された関数 f に各点収束する*2．

---

*1 厳密なことを言えば，区間 $(0, +\infty]$ というものは存在しないが，収束半径が $+\infty$ の場合も考える，という意味でこのような記法を用いた．とくに $r = +\infty$ のとき，“正の数 $R < r$” とは任意の正の数 R のことである．

*2 冪級数によっては $x = r$ や $x = -r$ で収束するものもあるが，以下の議論は，そのような “端点” では有効ではない．

定理 10.10. 収束半径 r が正である冪級数 (10.1) は，$(-r,r)$ に含まれる任意の閉区間上で一様収束する．

注意 10.11. 定理 10.10 の言葉の意味は以下の通り：$I=[a,b]\subset(-r,r)$ とすると，(10.3) は区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ を与えていると見なせる．このとき，関数列 $\{f_n\}$ は (10.2) の f に I 上で一様収束する．

区間 J 上の関数列 $\{f_n\}$ が，J に含まれる任意の閉区間 I で一様収束するとき，f は J で**広義一様収束する**ということがある．

定理 10.10 の証明：$I=[a,b]\subset(-r,r)$ を閉区間とする．このとき

$$R:=\max\{|a|,|b|\},\qquad R<T<r$$

となる正の実数 R, T をとることができる．とくに

$$(\star)\qquad \rho:=\frac{R}{T}\in(0,1)$$

である．

冪級数 (10.1) は $x=T$ で収束するから，数列 $\{|a_nT^n|\}$ は 0 に収束する．したがって $\{|a_nT^n|\}$ は有界．とくに

$$(\star\star)\qquad |a_nT^n|\leqq M\qquad(n=0,1,2,\dots)$$

を満たす正の数 M が存在する．

いま，$x\in[a,b]$ を任意にとると，$|x|\leqq R$ であるから，$(\star)$ と $(\star\star)$ を用いれば

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_nx^n\right|\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_n||x|^n\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_n||R|^n=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_nT^n|\left|\frac{R}{T}\right|^n\\&\leqq\sum_{k=n+1}^{\infty}M\rho^n=M\rho^{n+1}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n=M\rho^{n+1}\frac{1}{1-\rho}.\end{aligned}$$

右辺は x によらない数だから，$(\star)$ に再び注意すれば

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\leqq=M\rho^{n+1}\frac{1}{1-\rho}\to0\qquad(n\to\infty).$$

したがって，区間 $[a,b]$ 上で $\{f_n\}$ は f に一様収束する．

系 10.12. 冪級数 (10.1) の収束半径 r が $r>0$ を満たすならば，それが定める関数 f は区間 $(-r,r)$ で連続である．

証明: 点 $p\in(-r,r)$ に対して，p を含む閉区間 $[a,b]\subset(-r,r)$ を取ることができる．冪級数の部分和は $[a,b]$ で f に一様収束するから，定理 10.8 より f は p で連続である．

系 10.13. 冪級数 (10.1) の収束半径 r が $r>0$ を満たすとき，任意の $x\in(-r,r)$ に対して

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_{n+1}x^n\qquad\left(f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)$$

が成り立つ．とくに，右辺の級数の収束半径は r である．

証明: まず $x=0$ のときは結論の式の両辺は 0 で結論が成立する．

次に $x>0$ の場合を考える．定理 10.10 から閉区間 $[0,x]\subset(-r,r)$ 上で (10.3) で定義される関数列 $\{f_n\}$ は $[0,x]$ で f に一様収束する．したがって, 定理 10.9 から (有限個の関数の和に対する積分の線形性を用いれば)

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt&=\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{n}a_kt^k\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\int_0^x\left(a_kt^k\right)\,dt\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}a_kx^{k+1}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}\end{aligned}$$

で結論の式が得られた．
同様に，$x<0$ の場合も区間 $[x,0]$ を考えることにより結論が得られる．
最後に

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

であることから，

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n}}$$

が示せる (演習問題) ので，結論の式の右辺の収束半径は，もとの級数の収束半径に一致する．

系 10.14. 冪級数 (10.1) の収束半径 r が $r>0$ を満たすとき，その和が定める関数 f ((10.2) で定まる) は $(-r,r)$ で微分可能で，

$$\frac{d}{dx}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \qquad \left(f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$$

が成り立つ．とくに，右辺の級数の収束半径は r である．

証明: まず，

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

が成り立つので，右辺の級数の収束半径は r である．そこで，

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \qquad (-r<x<r)$$

と定めると，系 10.13 から

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

したがって，微積分の基本定理から $f'(x)=g(x)$ となる．

系 10.15. 冪級数 (10.1) の収束半径 r が $r>0$ を満たすとき，その和が定める関数 f ((10.2) で定まる) は $(-r,r)$ で C^∞-級で，

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}f(0)$$

が成り立つ．

証明: 系 10.14 より f' は収束半径 r の冪級数で表されているので，それに再び系 10.14 を適用すれば f が 2 回微分可能であることがわかる．以下，帰納的に系 10.14 を適用すれば f が何回でも微分可能であることがわかる．さらに系 10.14 を繰り返し適用すると，$f^{(n)}(x)$ の冪級数展開の初項の係数は $n!a_n$ となることがわかるので，結論が得られる．

以上の議論は区間 $(-r,r)$ の端点については何も言っていない．これについては次が有用である (証明は面倒くさい)：

定理 10.16 (Abel の定理)**.** 冪級数 (10.1) の収束半径が $r\in(0,+\infty)$，かつ $x=r$ で (10.1) が収束するならば，

$$\lim_{x\to r-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \qquad \left(f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$$

が成り立つ．