2011 年 12 月 21 日 09 時 00 分 ∼10 時 30 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 中間試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 12 月 26 日以降に**数学事務室 (本館 3 階 332B)** で受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 2012 年 1 月 10 日までに山田まで電子メイルでお申し出いただくか, 1 月 11 日の授業終了後にご連絡ください. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**.

指定用紙のみ持込可

定理群:

定理 A 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^{n+1}-級ならば

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する. とくに $h\to 0$ のとき $R_{n+1}(h)=o(h^n)$ である.

定理 B 次の冪級数 (♡) の収束半径 r は $1/\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ である:

$$(\heartsuit)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

定理 C 絶対収束する級数は収束する.

定理 D 数列 $\{a_n\,;\,n=0,1,2,\dots\}$ が単調非増加で $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ が成り立つならば $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n$ は収束する.

定理 E 冪級数 (♡) の収束半径 r が正ならば, 関数 f は開区間 $(-r,r)$ で連続である.

定理 F 定理 E の状況で, $\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ が成り立つ. とくに右辺の冪級数の収束半径は r である.

定理 G 定理 E の状況で f は $(-r,r)$ で微分可能で $\frac{d}{dx}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ が成り立つ. 右辺の収束半径は r である.

定理 H 定理 E の状況で, とくに $r\neq+\infty$ であるとき, (♡) の右辺 に $x=r$ $(x=-r)$ を代入した級数が収束するならば
$$\lim_{x\to r-0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\ \left(\lim_{x\to -r+0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-r)^n\right)$$ が成り立つ.

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{12}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れ, 下線 **a** について下の問題 **a** に答えなさい. [30 点]

関数 $f(x)=\cos x$ に対して $f(0.1)$ の近似値を求める: $f(x)$ に対して, $a=0$, $h=0.1$, $n=3$ として定理 A を適用すれば,

$$f(0.1)=\boxed{1}+R_4\qquad R_4=\boxed{2}\qquad(0<\theta<1)$$

を満たす θ が存在する[1]. ここで, $\boxed{2}$ は不等式 $\underbrace{\boxed{3}<R_4<\boxed{4}}_{\mathbf{a}}$ をみたす[1]. したがって, $f(0.1)=\boxed{5}.\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}\dots$[2]である.

問題 a 下線 **a** の不等式を導きなさい.

[1] $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ には小数を入れる. 10 の指数を用いた表示でもよい.
[2] $\boxed{5}$–$\boxed{12}$ には, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 または × を入れる. 上の推論から, その桁の数字が確定する場合は, その数字を, そうでない場合は × を入れよ.

問題 B 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 17\ }$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [30 点]

二つの関数

$$f(x) = 3\tan x - 3x - x^3, \qquad g(x) = 6\sinh x - 6x - x^3$$

に $x = 0$ のまわりでテイラーの定理を適用すると,

$$f(x) = \boxed{\ 1\ } + \boxed{\ 2\ }x + \boxed{\ 3\ }x^2 + \boxed{\ 4\ }x^3 + \boxed{\ 5\ }x^4 + \boxed{\ 6\ }x^5 + \boxed{\ 7\ }x^6 + o(x^{\boxed{8}}) \quad (x \to 0)$$

$$g(x) = \boxed{\ 9\ } + \boxed{\ 10\ }x + \boxed{\ 11\ }x^2 + \boxed{\ 12\ }x^3 + \boxed{\ 13\ }x^4 + \boxed{\ 14\ }x^5 + \boxed{\ 15\ }x^6 + o(x^{\boxed{16}}) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ．ただし o はランダウの記号である．したがって,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 3x - x^3}{6\sinh x - 6x - x^3} = \boxed{\ 17\ }$$

である．

問題 C 次の文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 11\ }$ にもっともよく充てはまる数・式・定理 (この問題用紙の冒頭の定理群の記号 A〜H) を入れなさい．さらに，下線 **a**, **b** を付した部分について，後の問題 **a**, **b** に答えなさい． [40 点]

級数

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$$

の和を求めよう．いま,

$$(**) \qquad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$$

とおくと，この右辺の級数の$_{\mathbf{a}}$<u>収束半径は $\boxed{\ 1\ }$</u> である．したがって定理$\boxed{\ 2\ }$ から，区間 $\boxed{\ 3\ }$ で

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \boxed{\ 4\ }$$

と冪級数表示できる．右辺の級数は等比級数だから，その和が具体的に $f'(x) = \boxed{\ 5\ }$ と表示されるが，$f(0) = \boxed{\ 6\ }$ だから，$\boxed{\ 5\ }$ を積分することによって $f(x) = \boxed{\ 7\ }$ が区間 $\boxed{\ 8\ }$ で成り立つ．

ここで，$_{\mathbf{b}}$<u>定理$\boxed{\ 9\ }$ と定理$\boxed{\ 10\ }$ を用いれば</u>，級数 $(*)$ の和は $\boxed{\ 11\ }$ となる．

問題 a 下線 **a** の部分の理由を述べなさい．

問題 b 下線 **b** の部分で二つの定理をどう用いて結論を得るかを述べなさい．

問題 D [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡♡♡

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–2:10 点,3–4:5 点, 5–12:10 点，問題 a: 5 点

1	2	3	4
0.995	$\frac{1}{24}\cos(0.1\theta)\cdot 10^{-4}$	0	5×10^{-6}

5	6	7	8	9	10	11	12
0	9	9	5	0	0	×	×

問題 a

$0<x<0.1$ で $\cos x$ は単調減少だから

$$R_4=\frac{1}{24}\cos(0.1\theta)\cdot 10^{-4}\leqq\frac{1}{24}\cos 0\cdot 10^{-4}=\frac{1}{24}10^{-4}\leqq\frac{1}{20}10^{-4}=\frac{5}{100}10^{-4}=0.5\times 10^{-6},$$
$$R_4\geqq\frac{1}{24}\cos(0.1\theta)\cdot 10^{-4}\geqq\frac{1}{24}\cos(0.1)\cdot 10^{-4}\geqq 0.$$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 3, 4 の評価に従って 5–12 の正解は変わります．3, 4 から結論できない値は，真の値に近くても不正解.
- 問題 a: “およそ等しい” ということから “不等号” は結論できません．この例よりもずっと高い精度で求めてくださった方が多いようです.
- 定理 A に誤りがありましたが，それに従った方は正解にさせていただいています.
- 1 で 1.005 と書いたり，5 に 1 が入ったりしている答案は他にどんなに正しいことが書いてあっても $-\infty$ 点を付けたい (願望)．高等学校でならった三角関数の基本性質が身にしみていないのね.

学籍番号	氏　名

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–7:5 点, 8: 5 点, 9–15:5 点, 16: 5 点, 17:10 点

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	$\frac{2}{5}$	0	6

9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	$\frac{1}{20}$	0	6

17
8

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 定理 A の誤りに従ってしまった方は，“f と g の両方の展開を同じように誤っている場合に限って得点をあたえています
- 8, 16 を 7 と書いた方が多く見られました．ランダウの “小文字のオー” ですよ．
- 17 は，1–16 までの結果から得られるものなら 5 点与えています．

学籍番号	氏　名

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄

配点：1: 5 点; 2–4: 5 点; 5–8: 10 点; 9–10: 5 点; 11: 5 点; 問題 a,b: 各 5 点

1: 1

2: G

3: $(-1,1)$

4: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$

5: $\dfrac{1}{1+x^3}$

6: 0

7: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{1}{3}\log(1+x)-\dfrac{1}{6}\log(1-x+x^2)+\dfrac{\sqrt{3}}{18}\pi$

8: $(-1,1)$

9: D

10: H

11: $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi+\dfrac{1}{3}\log 2$

問題 a

級数 $(*)$ の x^n の係数を a_n とおくと，$|a_{3n+1}|=1/(3n+1)$，それ以外の係数はすべて 0 なので

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/(3n+1)}=1.$$

収束半径はこの逆数である．

問題 b

式 $(**)$ にの右辺に $x=1$ を代入して得られる級数は $(\heartsuit)$ となり，定理 D より収束する．したがって，定理 H より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{3}\log(1+x)-\frac{1}{6}\log(1-x+x^2)+\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{18}\pi=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{18}\pi.$$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 積分の結果など，多少誤っていても点数を与えているかもしれません; $1/(1+x^3)$ の原始関数は $\log(1+x^3)$ ではありません．
- 無限級数の和 (5 番) に n が含まれているのはナンセンス; 収束半径に x が含まれているのも意味不明．
- 問題 a: このままの形では d'Alembert の判定法は使えません．実際，級数を $\sum a_n x^n$ と書くと，係数 3 つのうち 2 つは 0 になるので a_n/a_{n+1} が意味をもたないことがあります．次のような解答なら正解です：級数

  $$(\diamondsuit)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}t^n$$

  を考えると，d'Alembert の公式から $(\diamondsuit)$ の収束半径は 1．ここで $|x|<1$ なら $|x^3|<1$ なので，$(\diamondsuit)$ で $t=x^3$ とおけば級数 $\sum(1/(3n+1))x^{3n}$ は絶対収束する．したがって問題の級数の収束半径は 1 以上．一方 $x=1$ で問題の級数の収束は条件収束であるから，収束半径は 1 以下．

学籍番号	氏　名

2011 年 12 月 21 日 09 時 00 分 ~10 時 30 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 D への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 D [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2011 年度入学の方は，学籍番号のうち “11_” を除いた番号の席に着席してください．
- 2010 年度以前入学の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．4 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名