2012 年 1 月 11 日 (2012 年 1 月 18 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 11

お知らせ

- あけましておめでとうございます．中間試験の答案を本日までに受け取っていない方は，数学事務室 (本館 3 階 332B) にて受け取ってください．定期試験のころまで残っていた答案は処分いたします．
- 数学相談室も適宜ご利用ください．なお，いわゆる「過去問」が数学相談室においてありますが，山田の試験の過去問はありません（本学で微分積分学を担当するのは今年度が最初です）．ご了承ください．

授業に関する御意見

中間試験問題 D の回答です：

- 後期になってテストの難易度下げましたね．　**山田のコメント：** そう思っていない人もたくさんいるようですね．
- 計算大変でした．　**山田のコメント：** そう?
- 6 回微分が合っているか，. . . あと，中間なので，授業 9 回分は多かったです．
  山田のコメント： 何回分くらいならよい?
- むずかしかった．　**山田のコメント：** あなたにとって?
- 寒い　**山田のコメント：** 冬ですから．
- 試験室寒いです．
- 寒くて手がかじかんでます!!
  山田のコメント： そうでしたか．気が付きませんでした．そう言う時は申し出てください．
- ∼ 分ちょうどになると秒針がとまってますが，なんあんすかね∼　**山田のコメント：** swisswatch の仕様です．
- 予備試験では持ち込み用紙をわすれないように気をつけます．
  山田のコメント： そうした方がよいと思います．
- 予備試験頑張ります．　**山田のコメント：** 今回は頑張ったの?
- 期末ぐらいは頑張りたい．　**山田のコメント：** ご自由に．
- あんまりこつこつ勉強できなかった．もっと勉強しないといけないと思いました．
  山田のコメント： そうでしょう，そうでしょう
- 単位ください．　**山田のコメント：** 勝手に取って行ってください．
- 授業で例題をもう少しやってほしいです．来年もよろしくお願いします．　**山田のコメント：** 今回の試験問題はほとんど授業でやった例題ですが．
- 後期の残りの授業でも，ギリシア文字の ξ を使わないでください．来年度も微積を担当することがありましたら，前期からでも ξ を使わない方が良いと思います．
  山田のコメント： なぜ? 字があるんだから，ギリシア文字を使うことが通常な環境ではつかってもいいんじゃない? ひょっとして**君がかけないから?** それなら**練習しなさい**．
- きまつはかんたんに ♡　**山田のコメント：** だれにとって?
- あ゛ー　**山田のコメント：** ぐ゜
- オワコン　**山田のコメント：** なにが? ひょっとして微積分が?

11　テイラーの定理と極値問題

■1 変数関数の極値問題

定義 11.1. 一変数関数 f が a で**最大値** (**最小値**) をとるとは，定義域内のすべての x に対して $f(x) \leqq f(a)$ $(f(x) \geqq f(a))$ が成り立つことである．

定義 11.2. 一変数関数 f が a で**極大値** (**極小値**) をとるとは，次を満たす正の実数 ε が存在することである：f の定義域に含まれ，かつ $|x-a|<\varepsilon$ を満たす任意の x に対して，$f(x)<f(a)$ $(f(x)>f(a))$ が成り立つことである．

定義 11.2 は “a に十分近い x に対して $f(x)<f(a)$ $(f(x)>f(a))$ が成り立つ” ということを定量的に述べたものである．

■極値の判定条件

定理 11.3. (簡単のため) 関数 f は $x=a$ を含む開区間で何回でも微分可能であるとする．

- **A.** $f(x)$ が $x=a$ で極値（極大値または極小値）をとるならば，$f'(a)=0$ である．
- **B.** (**A** の対偶) $f'(a)\neq 0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極大値も極小値もとらない．
- **C.** $f'(a)=0$, $f''(a)>0$ $(f''(a)<0)$ が成り立つならば $f(x)$ は $x=a$ で極小値（極大値）をとる．

■定理 11.3 の B が成り立つ理由（いい加減バージョン）

$m=f'(a)$ とおいて，$m>0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理より ($m=f'(a)$ に注意して)

$$(*)\qquad f(a+h)=f(a)+mh+R_2(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_2(h)}{h}=0$$

となる．この $R_2(h)$ は h が十分小さければ mh よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h)-f(a)\fallingdotseq mh \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

である[*1]が，$m>0$ だから，この式の右辺は $h>0$ のとき正，$h<0$ のとき負になる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h)>f(a) \qquad \big(h>0 \text{ のとき}\big); \qquad f(a+h)<f(a) \qquad \big(h<0 \text{ のとき}\big)$$

となるので，どんな小さい ε をとっても “$0<|h|<\varepsilon$ ならば $f(a+h)>f(a)$”, “$0<|h|<\varepsilon$ ならば $f(a+h)<f(a)$” のいずれも成り立たせることはできない．すなわち f は $x=a$ で極値をとらない．

$m<0$ の場合も同様である．

■定理 11.3 の B が成り立つ理由（ちょっと正確バージョン）

2012 年 1 月 11 日 (2012 年 1 月 18 日訂正)

*1 “$\fallingdotseq$” は「およそ等しい」

$m>0$ のとき，$(*)$ までは同様．いま $|R_2(h)/(mh)|$ は h を 0 に近づけると 0 に近づくのだから，正の数 δ をうまくとれば

$$(**) \qquad |h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad \left|\frac{R_2(h)}{mh}\right|<\frac{1}{2}$$

が成り立つようにできる．$m>0$ だから $(**)$ は

$$|h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad -\frac{1}{2}m|h|<R_2(h)<\frac{1}{2}m|h|$$

と書き換えられる．したがって $(*)$ より

$$|h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad mh-\frac{1}{2}m|h|<f(a+h)-f(a)<mh+\frac{1}{2}m|h|$$

となる．ここで，$0<h<\delta$ ならば，$|h|=h$ だから，

$$f(a+h)-f(a)>mh-\frac{1}{2}mh=\frac{1}{2}mh>0,$$

$0>h>-\delta$ なら $|h|=-h$ だから

$$f(a+h)-f(a)<mh+\frac{1}{2}m|h|=\frac{1}{2}mh<0$$

となり，どんな小さい ε をとっても $|h|<\varepsilon$ の範囲で $f(a+h)-f(a)$ は符号を変える．したがって（いいかげんバージョンと同じ）．

■定理 11.3 の C が成り立つ理由（いい加減バージョン）

$m=f''(a)$ とおいて，$m>0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理より（$f'(a)=0, f''(a)=m$ に注意して）

$$f(a+h)=f(a)+\frac{1}{2}mh^2+R_3(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_3(h)}{h^2}=0$$

となる．この $R_3(h)$ は h が十分小さければ $\frac{1}{2}mh^2$ よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h)-f(a)\fallingdotseq\frac{1}{2}mh^2 \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

であるが，$m>0$ だから，この式の右辺は $h\neq 0$ であるかぎり常に正の値をとる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h)>f(a)$$

となるので，$f(x)$ は $x=a$ で極小値をとる．$m<0$ の場合も同様である．

問題

11-1 関数 $f(x) = x^4$ が $x = 0$ で最小値をとることを証明しなさい.

11-2 関数 f が何回でも微分可能であるとき，f の $x = a$ における (1 次，2 次 ...) 微分係数を用いて f が $x = a$ で最大値・最小値をとるかどうかを判定するような必要十分条件はあり得ない．そのことの理由を述べなさい.

11-3 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で極小値をとる（実は最小値をとる）ことを示しなさい.

11-4 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ のグラフを描き，どこで極値 (極大値・極小値) をとるかを指摘しなさい．それらの点で f は最大値・最小値をとるか.

11-5 定理 11.3 の **A** (**B**) の逆は成立するか.

11-6 定理 11.3 の **C** の逆は成立するか.

11-7 関数 $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2$ (p, q は定数) の極値を調べなさい．（ヒント：3 次方程式 $f'(x) = 0$ が一つの実数解しか持たない場合，3 つの異なる実数解を持つ場合，1 組の重根とそれ以外の一つの解を持つ場合，3 重根を持つ場合に分けて考える）

11-8 定理 11.3 の **B** が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」を完成させなさい.

11-9 定理 11.3 の **C** が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」をつくりなさい.

11-10 定理 11.3 の状況で $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ のときはなにが起きているか.