2012 年 1 月 18 日 (2012 年 1 月 25 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 12

お知らせ

- 定期試験の予告および持ち込み用紙は，中間試験の返却答案に添付しています．まだ受け取っていない方は至急数学事務室 (本館 3 階 332B) にて受け取ってください．定期試験の頃までに残っている答案は処分いたします．

前回の補足

- e^π, π^e の大小について何人かの方が考えてくださいました．答えの概要：$f(x) = x^{1/x}$ $(x > 0)$ を考えると，$f'(x) = x^{1/x}\frac{1}{x^2}(1 - \log x)$．したがって $0 < x < e$ で $f'(x) > 0$, $e < x$ で $f'(x) < 0$ となり，f は $x = e$ で最大値をとることがわかる．ゆえに $e^{1/e} = f(e) > f(\pi) = \pi^{1/\pi}$ となるが，この両辺を πe 乗すれば $e^\pi > \pi^e$．実際 $e^\pi = 23.1407$, $\pi^e = 22.4592$ くらいです．
- 講義資料 11，2 から 4 ページにかけて極値の判定法の説明があります．そこの「ちょっと正確バージョン」について「正確バージョンはないのか」というご質問を複数いただきました．そこに書かれていることがだいたい「正確バージョン」です．最後の方が省略されていたりするので「正確バージョン」と書きにくかっただけです．

前回までの訂正

- テイラーの定理の証明（らしきもの）の板書で
$$f(a+h) - f(a) \geqq mh - |R_2(h)| \boxed{=} \left(m - \frac{m}{2}\right) h = \frac{m}{2}h$$
と書いていたようです．枠で囲った等号は $\geqq$ です．
- 講義の最後の方，2 変数関数のテイラーの定理が成り立つ理由の説明について，$F(0)$ と書くべき所が $F(1)$ となっていたそうです．
- 講義資料 11, 2 ページ下から 8 行目; 2 ページ脚注; 3 ページ下から 5 行目：$\simeq$ ⇒ $\fallingdotseq$．(どちらでもよいのですが，以前同じ意味で $\fallingdotseq$ を用いたきがしますので．)
- 講義資料 11, 3 ページ 6 行目：したがって，だから，⇒ したがって

授業に関する御意見

- 試験は計算問題ばかりです．論理的な問題は面白くないのか．
  山田のコメント： 問題のなかにずいぶん潜んでいるんですけどね．
- 以前から $y = x^3$ など，一次導関数が 0 となる x の値のとき極値になるとは限らないということがあって，極値の定義について気になっていたので， 今回知ることができて良かったです．
  山田のコメント： それはよかった，高校の教科書にも書いてあるよね．
- e^π と π^e の大小関係知りませんでした． **山田のコメント：** そう？ 以外とポピュラーだと思ったんだけど．
- 3 次関数の解の公式って 2 次関数と比べてだいぶ複雑なんですね．
  山田のコメント： 3 次 方程式 の解の公式ですね．たしかに複雑ですね．
- 今年の目標は「微積のできる，何事もあきらめない人になる」こと!! **山田のコメント：** 変わった目標ですね
- アルゴリズム体操おわり!! **山田のコメント：** 次はアルゴリズム行進でしょうか．
- $3! = 6$ **山田のコメント：** ですね．
- 中間の点には安心したが，今日の 2 変数の Taylor を見て，前期の悪夢が蘇った．
  山田のコメント： たかが偏微分くらいで悪夢を見てはいけません．
- 期末がんばります． **山田のコメント：** 何を？
- 「孤独のグルメ」のドラマのエンドロールで，原作が原作者と作画が別々の人であることを知り地味に驚いた． **山田のコメント：** 普通じゃないの？

質問と回答

質問： 定理 11.3 の C が成り立つ理由 (ちょっと正確バージョン)：$m = f''(a)$ とおいて $m > 0$ の場合を考える．このとき, テイラーの定理より ($f'(a) = 0$, $f''(a) = m$ に注意して) $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}mh^2 + R_3(h)$ とおける．いま $\left|\frac{R_3(h)}{\frac{1}{2}mh^2}\right|$ は $\underline{h\text{ を }0\text{ に近づけると }0\text{ に近づく}}$ のだから正の数 δ をうまく取れば $|h| < \delta$ ならば $\left|\frac{R_3(h)}{\frac{1}{2}mh^2}\right| < \frac{1}{2}$ $(*)$ が成り立つようにできる (山田注：原文では $(*)$ のかわりに怪しい記号が使われていましたが再現できませんでした)．これを変形して，$|h| < \delta$ ならば $-\frac{1}{4}mh^2 < R^3(h) < \frac{1}{4}mh^2$; $|h| < \delta$ ならば $\frac{1}{4}mh^2 < f(a+h) - f(a) < \frac{3}{4}mh^2$. ゆえに $f(a+h) - f(a)$ は $h \neq 0$ であるかぎり常に正の値をとる．したがって h が十分小さいとき (δ 以下のとき) は $f(a+h) > f(a)$ となるので $f(x)$ は $x = a$ で極小値をとる． $m < 0$ のときも同様である．

こうですか．それと $(*)$ の右の式の右辺の定数はプリントの「B が成り立つ理由」にならって $\frac{1}{2}$ にしましたが，これは 0 より大きくて 1 より小さい実数なら何でも良いですか.

お答え： だいたい ok．下線部分はテイラーの定理の結論の一部ですね．それから，最後の方の “h が δ 以下” は “$|h| < \delta$” としないといけません．後半は yes です.

質問： 3 ページ 3 行目の $|h| < \delta$ ならば $\left|\frac{R_2(h)|}{mh}\right| < \frac{1}{2}$ について，なんで右辺が $\frac{1}{2}$ になるんですか?

質問： 講義資料 11, P3 の $(**)$ のところ，$|h| < \delta$ ならば $\left|\frac{R_2(h)|}{mh}\right| < \frac{1}{2}$ はなぜですか?

お答え： 文章をよく読むと $\frac{1}{2}$ になる，なんてどこにも書いていないことがわかるはず．これは “$\frac{1}{2}$ にする” んです．もう少し正確にいいます．簡単のため $F(h) = R_2(h)/(mh)$ とおくと $\lim_{h\to 0} F(h) = 0$ が成り立っています．このことを “ε-δ 式” に表すと,

任意の正の数 ε に対して，ある正の数 δ で次を満たすものが存在する：$0 < |h| < \delta$ ならば $|F(h)| < \varepsilon$.

ここで述べたことが “なりたっている” わけです．すなわち，各々の正の数 ε に対して “$0 < |h| < \delta$ ならば $|F(h)| < \varepsilon$ となる正の数 δ が存在する” ことが言えています．これは無限個の命題

- $0 < |h| < \delta$ ならば $|F(h)| < \underline{1}$ となる正の数 δ が存在する,
- $0 < |h| < \delta$ ならば $|F(h)| < \underline{0.1}$ となる正の数 δ が存在する,
- $0 < |h| < \delta$ ならば $|F(h)| < \underline{0.01}$ となる正の数 δ が存在する,
- $\dots$

がすべて成り立っていることを意味しています．そのなかのどれを選んでも成り立っているのだから，ひとつ “$0 < |h| < \delta$ ならば $|F(h)| < \underline{\frac{1}{2}}$ となる正の数 δ が存在する” を選ぶと，これは成り立っているわけです．これが，講義資料で書いてあることです.

質問： 「$\lim_{h\to 0} \frac{R_2(h)}{h} = 0$」$\Rightarrow$ 「どんな ε に対しても $|h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{R_2(h)}{h}\right| < \varepsilon$ を満たす $\delta > 0$ が存在する」は逆も成り立ちますか.

お答え： これが極限の定義ですよね．極限値が 0 である，ということの言い換えですよね.

質問： 極値の定義自体は，微分可能性とは関係ない，ということですが，極値を求めるには微分か推測して定義 11.2 を満たすか調べるくらいしか思いつきまんが，他に極値を求める方法というのはあるんでしょうか.

お答え： 微分可能でない場合は，各論ですね.

質問： 定理 11.3 の B についてですが，a の近くで h の正負によって $f(a+h)$ と $f(a)$ の大小関係が入れ替わるから極値でないということでいいんですよね?

お答え： そうです.

質問： 定理 11.3 の C では $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$) $\Rightarrow x = a$ で極小値 (極大値) をとる．$f''(a) = 0$ の場合はどうですか.

質問： 定理 11.3 の状況で，$f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ のときは何が起こっていますか?

お答え： その場合は，これだけのデータでは判定できない．実際，$f(x) = x^3$ ($f'(0) = f''(0) = 0$，原点で極値をとらない)，$f(x) = x^4$ ($f'(0) = f''(0) = 0$，原点で極小値をとる)，というようにどちらの場合も起きえます.

質問： $x = a$ で極小値を取る $\Rightarrow f'(a) = 0$, $f''(a) \geqq 0$ なら成立しますか?

お答え： 成立する，って言いませんでしたっけ．$f''(a) < 0$ なら極大値をとってしまうので.

質問： $f(x)$ が $x = a$ の近傍で C^n-級で,

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \qquad \text{かつ} \qquad f^{(n)}(a) \neq 0$$

のときについて．(i) n が偶数のとき，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとって，$f^{(n)}(a)>0$ ならば極小，$f^{(n)}(a)<0$ ならば極大．(ii) n が奇数のとき，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない．感覚的にはこんな風なのですが，この真偽をテイラーの定理で証明できるのでしょうか．

お答え： できます（簡単のため C^{n+1}-級くらい仮定しましょうか）今回のを真似てみてください．真似るのは大事です．ヒント：仮定のもと，$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)$.

質問： $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_3(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}^2}=0$ という式が出てきましたが，ランダウの記号でこれを書くことはできないのでしょうか．$R_3(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2}^2)$ のように書くのは 2 変数関数では間違いでしょうか．

お答え： これでよいです．普通に使います．

質問： 授業で $0<h<\delta\Rightarrow f(a+h)>f(a)$, $-\delta<h<0\Rightarrow f(a+h)>f(a)$: 極値をもたない，と書いてありましたが，これはこんとき $f(a)$ では増加していると見ればいいのですか?

お答え： “f は $(a-\delta,a+\delta)$ で増加” ですね．そうです．

質問： 問題 11-2 について，「$x=a$ など，ある 1 点またはその領域の極大，極小が判別できたとしても，関数 $f(x)$ の全域が把握できなければ最大，最小の議論ができないため必要十分ではないと考えましたが，自信がありません．実際の理由はなんなのでしょか？お教えください．

お答え： そのとおりです．

質問： 問題 11-7: [1] $9p^2-32q<0$ のとき $f'(x)=0$ の解は $x=0$ のみ．$32q>9p^2\geqq 0$ よりだから $f''(0)=2q>0$．ゆえに $f(x)$ は $x=0$ で極小値をとる．[2] $9p^2-32q=0$ のとき $f'(x)=0$ とすると $x=0,-\frac{3}{8}p$. $f''(x)=0$ とすると，$32q>9p^2\geqq 0$ よりだから $f''(0)=2q>0$．ゆえに $f(x)$ は $x=0$ で極小値をとる．[3] $9p^2-32q<0$ のとき $f'(x)=0$ とすると $x=0$, (略，2 次方程式の根の公式から)，$f''(x)=0$ とすると (略)．ここで詰まってしまいました．もう少しヒントをお願いします．

お答え： $f'(x)=0$ の根は見つけなければなりませんが，$f''(x)=0$ を解く必要はないのでは? $f'(x)=0$ の根に対して $f''(x)$ の符号さえわかればよいのです．

質問： 問題 11-10 は，テイラーの定理できえない最初の項の次数が偶数か奇数かをみればいいのですよね．なにもおこっていませんよね．

お答え： そうです．

質問： $f(a+h,b+k)=f(a,b)+\boxed{1}+\boxed{2}+R_3(h,k)$ と $f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+\dots$ の違いはなんですか．

お答え： $x=a+h$, $y=b+k$ とおけば同じもの．1 変数の場合にも同じようなことをやりましたね．

質問： 講義資料 10 の例 10.3 の証明で，数列 $f_n(x)$ は $n\geqq N$ なる番号に対して恒等的に 0 と証明した．この証明は，一様収束の定義のどこが満たされていないのですか．

お答え： すべての x に対して共通な番号 N をとることができない．

質問： 中間試験についてなんですが，$\frac{1}{1+x^3}$ の積分で

$$\int\frac{1}{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x-2}{1-x+x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\log(1+x)-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

まではできたのですが，$(x-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}\tan^2\theta$ とおいた場合，$x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ となって符号が決定できなくてもうお手上げです．続きを教えてください．

お答え： $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおいてしまえばよい．

質問： 曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式はどうして $z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$ とかけますか．

お答え： 接平面の定義は何ですか? テキスト 37 ページ参照．

質問： テイラーの定理と極値問題との関係はどのようなものですか．

お答え： 講義で述べたような関係です．

質問： 2 (多) 変数関数においては「極値」はどうなるのですか． **お答え：**どうなるとは?

質問： 2 変数関数のテイラー展開の公式の求め方を教えてください．

お答え： 講義の最後あたりで outline を述べた．次回やる．

質問： $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ だから複素平面にかくと図のようになるんですか!!??? (図省略) **お答え：**そうです．

12　多変数関数の極値問題

■2 変数関数の極大値・極小値

- 以下の記号は前期に用いた：

$$\boldsymbol{R} = (\text{実数全体の集合})$$
$$\boldsymbol{R}^2 = \{(x,y)\,|\,x,\ y\ \text{は実数}\ \} = \{(x,y)\,|\,x,y\in\boldsymbol{R}\} = \text{「座標平面」}.$$

- 点 $(a,b)\in\boldsymbol{R}^2$ と正の数 ε に対して

$$U_\varepsilon(a,b) = \{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2\}$$

　を (a,b) の ε-近傍という．
- $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 A が**開集合**であるとは，任意の $(a,b)\in A$ に対してうまく正の数 ε を選べば $U_\varepsilon(a,b)\subset A$ とできることである．
- $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 A が**連結**であるとは，任意の $P,Q\in A$ を A 内の連続曲線で結ぶことができることである．
- $\boldsymbol{R}^2$ の連結な開集合のことを **領域** という．
- $\boldsymbol{R}^2$ の領域 A で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in A$ で**極大値** (**極小値**) をとるとは，うまく正の数 ε をとれば，任意の $(x,y)\in U_\varepsilon(a,b)$ $((x,y)\neq(a,b))$ に対して $f(x,y)<f(a,b)$ $(f(x,y)>f(a,b))$ が成り立つことである．

■2 変数関数のテイラーの定理

定理 12.1 (1 変数関数のテイラーの定理（復習）)**.** 1 変数関数 F が a を含む開区間で C^∞-級であるとする．このとき，

$$F(a+h) = F(a)+F'(a)h+\frac{1}{2}F''(a)h^2+R_3(h),\qquad R_3(h)=\frac{1}{3!}F^{(3)}(a+\theta h)h^3,\quad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する．

定理 12.2 (2 変数関数のテイラーの定理)**.** 2 変数関数 f が $(x,y)=(a,b)$ を含む領域で C^∞-級であるとする．このとき

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k) &= f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right)+R_3(h,k)\end{aligned}\tag{12.1}$$

とかくと

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2}=0$$

が成り立つ．

2012 年 1 月 18 日 (2012 年 1 月 25 日訂正)

証明: あたえられた (a,b) および (h,k) に対して，一変数関数 $F(t)=f(a+th,b+tk)$ を考えると，F は $[0,1]$ で C^∞-級であるから，F にテイラーの定理 12.1 を適用すると，

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(0)+\frac{1}{3!}F'''(\theta)\qquad(0<\theta=\theta(h,k)<1)$$

となるような θ が存在する．ここで，合成関数の微分公式 (Chain rule) を用いれば，

$$\begin{aligned}
F(0)&=f(a+0h,b+0k)=f(a,b)\\
F'(0)&=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\\
F''(0)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\\
F'''(\theta)&=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3
\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の式の右辺の偏微分は $(a+\theta h,b+\theta k)$ での値である．とくに f は C^∞-級なので

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h,b+\theta k)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b),\dots$$

が成り立つので，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{F'''(\theta)}{h^2+k^2}=0$$

を得る．

注意 12.3. テイラーの公式 (12.1) の右辺のうち，h, k の 1 次の項は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=df(a,b)\boldsymbol{h}\qquad\left(\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\right)$$

と表される．ただし $df(a,b)$ は (a,b) における f の**全微分**である．

さらに h, k の 2 次の項の 2 倍は，

$$(h,k)\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b)&f_{xy}(a,b)\\f_{yx}(a,b)&f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\,f(a,b)\boldsymbol{h},\qquad \mathrm{Hess}\,f(a,b)=\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b)&f_{xy}(a,b)\\f_{yx}(a,b)&f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$$

と表される．ただし ${}^t\boldsymbol{h}$ は列ベクトル $\boldsymbol{h}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．ここで，偏微分の順序交換定理から，$\mathrm{Hess}\,f(a,b)$ は 2 次の**対称行列**となる．この行列を f の (a,b) における**ヘッセ行列** Hessian matrix とよぶ．

■2 変数関数の極値判定

定理 12.4. $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b)\in D$ で極値をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0\qquad かつ\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

が成り立つ．

証明:

定理 12.5. $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b)\in D$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0\qquad かつ\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

をみたしているとする．このとき，

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2, \qquad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$

とおくと，

- $\Delta > 0$ かつ $A > 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極小値をとる．
- $\Delta > 0$ かつ $A < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極大値をとる．
- $\Delta < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極値をとらない．（注：極値をとるかどうか判定できない，ではなく極値をとらないことが結論できる）

（注：$\Delta = 0$ の場合は（2 次偏微分係数がすべて 0 とならなくても）ここまでの情報では極値の判定ができない）

これを示すために次の補題を用いる：

補題 12.6. p と q の斉次 2 次式

$$\varphi := Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 \qquad (A,\ B,\ C \text{ は定数}) \tag{$**$}$$

に対して

- 任意の $(p,q) \neq (0,0)$ に対して $\varphi > 0$ となるための必要十分条件は $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- 任意の $(p,q) \neq (0,0)$ に対して $\varphi < 0$ となるための必要十分条件は $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- φ が正の値も負の値もいずれもとるための必要十分条件は $AC - B^2 < 0$ となることである．
- それ以外の場合は，φ は符号を変えないが，$\varphi = 0$ となるような $(p,q) \neq (0,0)$ が存在する

■3 変数以上の場合　一般に $\boldsymbol{R}^n$ の領域 D で定義された C^∞ 関数 f をベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ に実数 $f(\boldsymbol{x})$ を対応させているとみなしておく．この時，$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in D$ におけるテイラーの定理は，

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + {}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + R_3(\boldsymbol{h}), \qquad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{R_3(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} = 0. \tag{12.2}$$

とかける．ただし

$$df(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right), \qquad \mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

このとき，

事実 12.7.
- f が $\boldsymbol{a}$ で極値をとるならば $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ である．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})$ の固有値がすべて正 (負) ならば f は $\boldsymbol{a}$ で極小値（極大値）をとる．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\,f(\boldsymbol{a})$ の固有値が符号を変えるならば f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない．

この事実の後半の 2 つは，次に述べる 2 次形式の性質からわかる．

■2 **次形式**　実数の変数 $(x_1,\dots,x_n)$ の斉次 2 次式を (n 変数の) **2 次形式**という:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

の形で表される．とくに $x_ix_j=x_jx_i$ であるから，a_{ij} と a_{ji} が等しくなるように係数を按分することができる．すなわち 2 次形式の一般形は

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\qquad (a_{ij}=a_{ji}).$$

これを，列ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\dots,x_n)$ と対称行列 $A=(a_{ij})$ を用いて

(12.3) $$\varphi(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}\qquad (A \text{ は実対称行列})$$

と表すことができる．行列 A を 2 次形式 φ の**表現行列**という．

事実 12.8 (線形代数の復習)**.**
- 実対称行列の固有値は実数である．
- 実対称行列 A は直交行列により対角化できる．

すなわち，実対称行列 A に対して，直交行列 P が存在して

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mu_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mu_n\end{pmatrix}\qquad ({}^tPP=E)$$

とできる．ただし $\mu_1,\dots,\mu_n$ は A の固有値である．

このことを用い，変数変換

$${}^tP\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}={}^t(X_1,\dots,X_n)$$

を行うと，2 次形式 (12.3) は

$$\varphi=\mu_1X_1^2+\dots+\mu_nX_N^2$$

と書くことができる．とくに

- $\mu_1,\dots,\mu_n$ がすべて正ならば，$\varphi(\boldsymbol{x})>0$ が任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成立する．このとき 2 次形式 (12.3) は**正値**または**正定値**という．
- $\mu_1,\dots,\mu_n$ がすべて負ならば，$\varphi(\boldsymbol{x})<0$ が任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成立する．このとき 2 次形式 (12.3) は**負値**または**負定値**という．
- $\mu_1,\dots,\mu_n$ の中に正のものも負のものも含まれているならば，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は正，負いずれの値もとる．

問題

12-1 次の集合は $\boldsymbol{R}^2$ の領域か.

$$\boldsymbol{R}^2,\quad \{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,y>0\},\quad \{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,y\geqq 0\},$$
$$\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+y^2\neq 1\},\quad \{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+y^2<1\}$$

12-2 補題 12.6 を 2 次式の平方完成を用いて示しなさい．

12-3 $f(x,y) = x^3 - xy + y^3$ に対して

- $f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めなさい．（ここで虚数解は考えない．なぜか）
- 上で求めた (x,y) に対して定理 B を適用することにより，次のことを確かめなさい：「$f(x,y)$ は $(x,y) = (1/3, 1/3)$ で極小値 $-1/27$ をとり，それ以外の点では極値をとらない．」

12-4 テキスト 74 ページ問題 8

12-5 $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された**調和関数** f の 2 次偏導関数 f_{xx} が D 上で 0 にならなければ f は D 上で極値をとらない．