

2012 年 1 月 25 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 13

お知らせ

- 恒例の授業評価を行っています。お手数ですが、回答票に記入して、回収担当者 (さん) まで持参してください。一応、9 時 10 分を締切とします。なお、科目番号は 1066 です。
- 今回で講義は終了です。ご聴講ありがとうございました。
- 以前からお知らせしておりますように、次回、2 月 1 日に「定期試験予備試験」を行います。なお、試験予告などは返却された中間試験の答案に添付しております。

前回までの訂正

- 「 $F''(t)$ の途中計算が間違っていました。でも授業時にノートを直したので、どう間違ってたか正確にわかりません。チェインルールの x と y の偏微 の順番が間違って (原文ママ) ました。」だそうです。
- 講義資料、板書にて “Hess f ” と “Hess f ” が混用されていました。どちらでもいいですが、とりあえず Hess f としましょう。
- 講義資料 12, 3 ページ 14 行目: 理由な \Rightarrow 理由は
- 講義資料 12, 4 ページ定理 12.1, 3 行目: $f^{(3)} \Rightarrow F^{(3)}$
- 講義資料 12, 4 ページ定理 12.2, (12.1) 式 1 行目の最後: $\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$
- 講義資料 12, 5 ページ 1 行目: あたえらた \Rightarrow あたえられた
- 講義資料 12, 5 ページ 8 行目: $F''(\theta) \Rightarrow F'''(\theta)$
- 講義資料 12, 6 ページ 4, 5, 6, 8 行目: $D \Rightarrow \Delta$
- 講義資料 12, 6 ページ下から 9 行目: $a \in D \Rightarrow a = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in D$
- 講義資料 12, 6 ページ事実 12.7: $df(a) = 0 \Rightarrow df(a) = \mathbf{0}$ (3 箇所)
- 講義資料 12, 10 行目: 直交行列じより \Rightarrow 直交行列により

授業に関する御意見

- 東大が秋入学になりそうな事についてどうお考えですか? 山田のコメント: なにも考えていません。
- 東大が秋から入学になるという話は本当ですか? 山田のコメント: 検討する、ということですね。
- 予備試験は、用紙の持ち込みはありますか? 山田のコメント: 中間試験の返却答案を見よ
- 前記を思い出した (原文ママ; 思い出した、のことが)。Chain rule はなつかしかった。山田のコメント: まだ「懐かしい」にははだめ!
- 二変数関数の極値に関して、少し複雑だけど興味深いと思いました。山田のコメント: そうですか。そんなに複雑でないと思いますけど...
- 板書で $F'''(\theta)$ が噴火口に地図記号 (略) みたいに見たことがあったので気がついた方がいいと思います。山田のコメント: thanks
- むずい!! 山田のコメント: それは大変によいことだと思います。
- 良かったと思います。いよいよ最終回ですね。山田のコメント: そうですね。有終の美? 優秀の微?
- もう後期も残りわずか... 早し。山田のコメント: ね。そうして人は歳をとっていく。
- 最後の講義も集中して聴きます。山田のコメント: よろしく

質問と回答

質問: 授業の最後にやった (2) の問題で $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$ となったあとで、 t を使ってやったことの意味がよくわからなかったのですが。

お答え: 原点 $(0, 0)$ で質問の値が消えてしまうので、このままでは極値の判定ができないが、実はよく考えると極値をとらない、ということを示しています。もう少し具体的に述べましょう: $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

とすると $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ だが, $(0,0)$ で $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$ となっているので, 2次微分までの情報では極値の判定ができない. しかし, (1) $f(t,0) = t^2(t^2 - 2)$ なので t が十分小さければ $f(t,0) < 0$. したがって $(0,0)$ に好きなだけ近い点 (x,y) で $f(x,y) < f(0,0)$ となる点を見つけることができる. (2) 一方, $f(t,t) = 2t^4$ なので, $t f(t,t) > 0$ ($t \neq 0$). したがって $(0,0)$ に好きなだけ近い点 (x,y) で $f(x,y) > f(0,0)$ となる点を見つけることができる. これらから f は $(0,0)$ で極値をとらないことがわかる.

質問: 最後 $f(t,t)$ は $f(0,t)$ ではないでしょうか (計算してみたらそうだったのですが.)

お答え: なにをどう計算したらこうなったのでしょうか. 上の回答参照.

質問: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 < 0$ のとき, $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極値を取らないということでしたが, この場合, 具体的にどのようなになっているのでしょうか. 一変数関数でいう $y = x^3$ の $x = 0$ のように一次導関数と二次導関数が 0 になる x の値が一致するときのような場合はなんとなくわかりますが, 上式のような条件だとどのようなものになるかわかりません.

お答え: $f(x,y) = x^2 - y^2$ の原点の近くでの挙動が典型的なもの. $f(x,0) = x^2$ だから x 軸にそって原点を通過すると, f の値は原点を通過したときに最小となる. 一方 $f(0,y) = -y^2$ だから y 軸にそって原点を通過すると f の値は原点を通過したときに最第となる. グラフを描いてみよ.

質問: 2変数のテイラーの定理の証明で,

$$F(t) = f(a + th, b + tk), \quad F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2} F''(0) \cdot t^2 + \frac{1}{6} F'''(\theta) \cdot t^3 \quad (0 < \theta < 1)$$

を満たす θ がテイラーの定理により存在, という部分がありましたが, ここで下線部は何の為に登場しているのですか.

お答え: 下線部に, 最初の F の形を代入するために用意した. 代入すれば 2 変数関数のテイラーの定理が自動的に得られる.

質問: プリント 8 ページの 12-3 で, “虚数解は考えない” とありますが, これは $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ の値に虚数が入ってしまうからですか?

お答え: 虚数には大小が定義できないので, 最初から (x,y) が実数としているのです.

質問: $\varphi = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$ に対して $\varphi > 0$ または $\varphi < 0$ の判定条件はどうやって得ますか.

お答え: 平方完成を用いる:

$$\varphi = A \left(p + \frac{B}{A} q \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} q^2.$$

質問: 今回の講義で「領域」の定義が紹介されましたが, それに基づくと, 例えば問題 12-1 の集合 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は連結でないので「 \mathbf{R}^2 の領域」ではないということになります. しかし, 高校ではこの例も領域と呼んでいる気がしますが, これは誤りだったのでしょうか.

お答え: 文脈依存だと思います. 実は, 高等学校の教科書はどこを見ても領域の定義がありません. すなわち “日常語” として領域を使っているように思えます. ちなみに「 x,y の不等式を満たす xy -平面上の点の集合」を「不等式が表す領域」とよんでいます, 単独で「領域」とはしていないのではないのでしょうか. 「数学」の文脈では「連結な開集合」を領域ということが多いです.

質問: 事実 12.7 について Hess $f(\mathbf{a})$ の固有値がすべて非負で 0 を含む場合は, 3 次以降について考えれば良いですか?

お答え: 考える必要がありますが, 考えれば良いかどうかはわかりません.

質問: ∂_x と ∂_y が順序交換できない場合はどうしますか.

お答え: C^2 -級なら順序交換できます. ここでは C^∞ -級の仮定を置いているので, 自動的に順序交換できます. 微分の順序交換ができない関数は “変態” ですので, ここでは考えなくてよいと思います.

質問: 斉次 2 次式って何ですか.

お答え: すべての項が 2 次の項からなる多項式のことです. たとえば x, y の斉次 2 次式の一般型は $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (a, b, c は定数) です.

質問: n 変数関数における, 極値の判定条件を一般化したものはありますか?

お答え: 2 変数の判定条件を n 変数に一般化したもののことでしょうか. それとも n 変数関数の判定条件をさらに “何か” に対して一般化したもののことでしょうか. 前者なら, 講義の際にすこしだけコメントしました. ヘッセ行列の固有値問題です. 後者なら, “何か” を特定していただかなければ答えられません.

質問: $f(x,y)$ の極値は x, y, z 座標で考えると, z 方向の極値ということでしょうか.

お答え： z と x, y の関係が明示されていないので、お答えできません。前期にも申し上げたように、“関数” と “関数のグラフ” は別のもと考えましょう。

質問： $\int x \tan^{-1} x dx = ?$ の (友達の期末試験問題です)

お答え： $x \tan^{-1} x = \left(\frac{1}{x^2}\right)' \tan^{-1} x$ とみなして部分積分。

質問： $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2 = 0$ の場合は面 (山田注：判読不能) でも調べるしかないのですか。

お答え： 何を調べる、ということでしょう。

質問： 11-1: $f(x) = (x^2)^2, g(x) = x^2 \geq 0$ より $f(x) = \{g(x)\}^2 = x^4 \geq 0$ 。よって $f(x)$ は下に有界でその最小値は 0。等号が成立するのは $x = 0$ のとき、 $f(x) = x^4$ は最小値となる。きちんと題意に沿って示せていますでしょうか？

お答え： $f(x) = x^4$ が 0 で最小値をとる、という証明ですね。「きちんと題意にそって示している」とは具体的にどういことを述べているのでしょうか。授業で言ったことがあると思いますが、山田は「題意」という語の意味を知りませんので (広辞苑を引いてもよくわかりません) ご質問の意味がわかりません。解答も、わざわざ平方の平方にする理由がよくわかりません。“等号が成立するのは” の説明がないのも気になりますね。こんな感じでしょうか： $x \neq 0$ のとき、 $x^4 > 0$ だから $f(x) > 0 = f(0)$ 。

質問： $n = 1, 2, 3, \dots$ において、

- 点 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ と正の数 ε に対して

$$U_\varepsilon(a_1, \dots, a_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \varepsilon\}$$

を (a_1, \dots, a_n) の ε -近傍という。

- \mathbf{R}^n の領域 A で定義された関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が $(a_1, \dots, a_n) \in A$ で極大値 (極小値) をとるとは、うまく正の数 ε をとれば、任意の $(x_1, \dots, x_n) \in U_\varepsilon(a_1, \dots, a_n)$ ($(x_1, \dots, x_n) \neq (a_1, \dots, a_n)$) に対して $f(x_1, \dots, x_n) < f(a_1, \dots, a_n)$ ($f(x_1, \dots, x_n) > f(a_1, \dots, a_n)$) が成り立つことである

という風に n 変数関数の極大値、極小値を考えてもよいですか？

お答え： 考えて「も」よいのではなく、こう定義するんでしょうね。

13 微分方程式

一般論 ここでは、未知関数 $x = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ に関する常微分方程式の初期値問題

$$(13.1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = a \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

を考える。ここで f は \mathbf{R}^n に値をもつ $(n+1)$ -変数の関数である。成分を用いて $f = (f_1, \dots, f_n)$ と書けば、微分方程式 (13.1) は

$$\dot{x}_j(t) = f_j(t; x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad x_j(t_0) = a_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

と連立微分方程式の形で表すことができる。ただし $a = (a_1, \dots, a_n)$ である。

定理 13.1 (基本定理). 実数 t_0 を含む開区間 I と、点 $a \in \mathbf{R}^n$ を含む \mathbf{R}^n の領域上 D に対して、

$$I \times D = \{(t, x) \mid t \in I, x \in D\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

で定義された、 \mathbf{R}^n に値をとる関数 $f: I \times D \rightarrow \mathbf{R}^n$ が $I \times D$ 上で C^1 -級であるとする*1。このとき、 t_0 を含む開区間 I 上で定義された C^1 -級関数 $x: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ で (13.1) を満たすものただひとつ存在する。

注意 13.2. f の微分可能性はもう少し弱めることができるが、実用上はここであげたもので十分である。しかし「連続」まで弱めることはできない。実際、単独の微分方程式 $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$ (f が微分可能でないケース) の初期条件 $x(0) = 0$ を満たす解は無数に存在する。実際、任意の $a > 0$ に対して

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{1}{27}t^3 & (x \geq a) \end{cases}$$

は条件を満たす。

- $f(t, x)$ が任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して定義されている (t を陽に含まない場合を含む) としても方程式 (13.1) の解は \mathbf{R} 全体で定義されるとは限らない。実際、 $\dot{x} = 1 + x^2$, $x(0) = 0$ の解は $x(t) = \tan t$ であるが、この定義域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である。

線形微分方程式 区間 $I \subset \mathbf{R}$ で定義された n 次正方行列に値を持つ関数 $A: I \rightarrow M(n, \mathbf{R})$, \mathbf{R}^n に値を持つ関数 $b: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ に対して、微分方程式

$$(13.2) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad x(t_0) = a$$

を線形常微分方程式という。ただし $t_0 \in I$, $a \in \mathbf{R}^n$, $M(n, \mathbf{R})$ は実数を成分にもつ $n \times n$ 行列全体の集合を表している。

定理 13.3 (線形常微分方程式の基本定理). 行列値関数 $A: I \rightarrow M(n, \mathbf{R})$, $b: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ がともに C^∞ -級ならば、 I 上で定義された C^∞ -級関数 $x: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ で (13.2) を満たすものがただひとつ存在する。

2012年1月25日

*1 C^n -級なら結論として得られる関数も C^n -級である。

例 13.4. 区間 I 上で定義された C^∞ -級関数 $\alpha(t)$ と $\varphi(t)$ に対して, 微分方程式

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(t) = \varphi(t)$$

を考える. この方程式の解は

$$x(t) = \left(c + \int_0^t \frac{\varphi(s)}{x_0(s)} dt \right) x_0(t), \quad x_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \alpha(s) ds\right)$$

と表される. ただし $c = x(0)$ は定数である.

例 13.5. 定数 α, γ に対して, 微分方程式

$$(13.3) \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \alpha x = 0$$

を考える. これは, 定理 13.1, 13.3 の形をしていないが,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2\gamma \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

とかけるので, 定理 13.3 の意味で線形常微分方程式であることがわかる. とくに係数行列 $A(t)$ は t によらない定数だから, この方程式の解は R 全体で定義される.

ここでは, とくに $\gamma = 0$ の場合を考える:

- $\gamma = 0, \alpha = \omega^2 > 0$ のとき, (13.3) を満たす x は

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

とかける. ただし A, B は定数である.

- $\gamma = 0, \alpha = -\omega^2 < 0$ のとき, (13.3) を満たす x は

$$x(t) = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t$$

とかける. ただし A, B は定数である.

一般の場合は次のような解が得られる: 2 次方程式

$$(13.4) \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \alpha = 0$$

の 2 つの根を λ_1, λ_2 とする.

- λ_1, λ_2 が相異なる実数ならば, (13.3) を満たす x は

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

の形に表される. ただし A, B は定数.

- $\lambda_1 = -\gamma + i\omega, \lambda_2 = -\gamma - i\omega$ (ω は実数) とかけている場合, (13.3) を満たす x は

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

の形に表される. ただし A, B は定数.

- $\lambda_1 = \lambda_2$ (実数) の場合, (13.3) を満たす x は

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}(A + Bt)$$

の形に表される. ただし A, B は定数.

線形微分方程式の解の空間 方程式 (13.2) の $b = 0$ の場合を同次方程式 あるいは 斉次方程式という:

$$(13.5) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

もし, ベクトル値関数 $x_1(t), x_2(t)$ が (13.5) の解ならば, それらの線形結合

$$ax_1(t) + bx_2(t) \quad (a, b \text{ は定数})$$

もまた (13.5) の解である.

定理 13.6. R^n に値をとる未知関数 $x(t)$ に関する方程式 (13.5) の解全体の集合は n 次元線形空間 (ベクトル空間) となる.

証明: すぐ上に述べたように, 解全体の集合は線形結合に関して閉じているのでベクトル空間となる. 次元が n であることは, 初期値問題の解の一意性から従う.

いま, 方程式 (13.5) の解全体のなす線形空間を V_A とかく. すなわち $x \in V_A$ とは $x = x(t)$ が (13.5) を満たすことである.

定理 13.7. 線形微分方程式

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

の解 $x_0(t)$ をひとつとると, この方程式の任意の解は

$$x_0(t) + x(t) \quad x \in V_A$$

の形に表すことができる.

例 13.8. 正の定数 ω, m ($\omega \neq m$) に対して, 微分方程式

$$(13.6) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \sin mt$$

の解は

$$\frac{1}{\omega^2 - m^2} \sin mt + A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

の形に表す. ただし A, B は定数である.

問題

13-1 $m = \omega$ のとき (13.6) の解はどうなるか