2012 年 2 月 1 日/2012 年 2 月 4 日訂正
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 予備試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- この試験で合格した方は定期試験を受験しないでください. 詳細は 2 月 3 日迄に掲示します.
- 答案は 2 月 3 日以降に**数学事務室 (本館 3 階 332B)** で受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 2012 年 2 月 8 日までに山田まで電子メイルでお申し出ください. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**.

指定用紙のみ持込可

定理群:

定理 A 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^{n+1}-級ならば

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する. とくに $h\to 0$ のとき $R_{n+1}(h)=o(h^n)$ である.

定理 B 冪級数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は $1/\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ である.

定理 C 絶対収束する級数は収束する.

定理 D 上に有界な単調非減少数列は収束する.

定理 E 定理 B の冪級数の収束半径 r が正ならば, それが定める関数 f は開区間 $(-r,r)$ で連続である.

定理 F 定理 E の状況で, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ が成り立つ. とくに右辺の冪級数の収束半径は r である.

定理 G 定理 E の状況で f は $(-r,r)$ で微分可能で $\dfrac{d}{dx}f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ が成り立つ. 右辺の収束半径は r である.

定理 H 定理 E の状況で, とくに $r\neq+\infty$ であるとき, 定理 B の冪級数の右辺 に $x=r$ $(x=-r)$ を代入した級数が収束するならば

$$\lim_{x\to r-0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\ \left(\lim_{x\to -r+0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-r)^n\right)$$ が成り立つ.

定理 I 点 a を含む開区間で C^∞-級であるような関数 f が $k=0,1,\dots,n-1$ に対して $f^{(k)}(a)=0$ を満たし, さらに $f^{(n)}(a)>0$ が成り立っているとする. ただし n は正の整数である. このとき (1) n が奇数なら f は a で極値をとらない. (2) n が偶数なら f は a で極小値をとる.

定理 J 点 (a,b) を含む $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で C^∞-級であるような関数 f に対して $\Delta=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\bigl(f_{xy}(a,b)\bigr)^2$ とおくとき, (1) f が (a,b) で極値をとるならば $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$. (2) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ のとき, (2a) $\Delta<0$ なら f は (a,b) で極値をとらない; (2b) $\Delta>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$ なら f は (a,b) で極小値をとる.

問題 A 文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{6}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れ, 下線 **a** の理由を述べなさい. なお, 該当する対象がない場合は, 解答欄に × を記しなさい. [30 点]

$\boldsymbol{R}^2$ 全体で定義された関数

$$f(x,y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}x^2y^2-2x^2+y^2$$

の偏導関数は $\boxed{1}$, 2 次偏導関数は $\boxed{2}$ である. とくに, f の偏微分係数がすべて 0 となるような点をすべて挙げると $(x,y)=\boxed{3}$ となる. とくに, $\boxed{3}$ で挙げた点のうち, 点 $\boxed{4}$ では f は極小値をとり, 点 $\boxed{5}$ では f は極大値をとる. さらに, 点 $\boxed{6}$ では, 定理 J により極値をとらない. $\boxed{3}$ に挙げた点で $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 以外の点では **a** <u>f は極値をとらない</u>ことがわかる.

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$〜$\boxed{19}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [30 点]

二つの関数

$$f(x) = \tan x - x - ax^3, \qquad g(x) = \tanh x - x + ax^3 \qquad (a \text{ は定数})$$

に $x = 0$ のまわりでテイラーの定理を適用すると，

$$f(x) = \boxed{1} + \boxed{2}x + \boxed{3}x^2 + \boxed{4}x^3 + \boxed{5}x^4 + \boxed{6}x^5 + \boxed{7}x^6 + o(x^{\boxed{8}}) \quad (x \to 0)$$

$$g(x) = \boxed{9} + \boxed{10}x + \boxed{11}x^2 + \boxed{12}x^3 + \boxed{13}x^4 + \boxed{14}x^5 + \boxed{15}x^6 + o(x^{\boxed{16}}) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ．ただし o はランダウの記号である．したがって，

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \boxed{17} & (a \neq \boxed{19} \text{ のとき}) \\ \boxed{18} & (a = \boxed{19} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

問題 C 次の文中の $\boxed{1}$〜$\boxed{8}$ にもっともよく充てはまる数・式・定理 (この問題用紙の冒頭の定理群の記号 A〜J) を入れなさい．さらに，下線 **a** の部分の理由を述べなさい． [30 点]

等式

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\infty} \frac{u}{e^u - 1} \, du$$

であることを示そう．いま，

$$(**) \qquad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

とおくと，右辺の級数の収束半径 r は $r = \boxed{1}$ である．したがって，定理 $\boxed{2}$ から，区間 $\boxed{3}$ で $f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x) = \boxed{4}$ と冪級数表示できる．とくに $xf'(x) = \boxed{5}$ と，対数関数を用いて表すことができる．ここで， $x = r$ のとき，$(**)$ の右辺の級数は$_{\mathbf{a}}$ <u>収束する</u> ので，定理 $\boxed{6}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = f(1) = \lim_{x \to 1-0} \int_0^x \boxed{7} \, dt$$

となる．とくに右辺の積分で $u = \boxed{8}$ とおけば，$(*)$ が成り立つことがわかる．

問題 D 次から 1 つを選択して解答しなさい． [10 点]

(1) 冒頭の定理群の，定理 I (2) が成り立つ理由を (講義で扱った “ちょっと正確バージョン” 程度の厳密さで) 述べなさい．

(2) 冒頭の定理群の，定理 J の (2a) が成り立つ理由を述べなさい．

(3) 変数 t の一変数関数 $x(t)$ で，$\ddot{x} + x = \cos mt$ を満たすものをすべて求めなさい．ただし $\dot{} = d/dt$, m は正の定数である ($m \neq 1$ とは限らない)．問題に typo あり．それなりにやった方には 5 点以上ついているはず

問題 E [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡♡♡

2012 年 2 月 1 日/2012 年 2 月 4 日訂正
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 予備試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–2: 5 点；以下各 5 点

1

$$f_x = x^3 - 4x + xy^2, \qquad f_y = y^2 + 2y + x^2 y.$$

2

$$f_{xx} = 3x^2 - 4 + y^2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 2xy, \qquad f_{yy} = 2y + 2 + x^2$$

3

$$(0,0),\ (0,-2),\ (2,0),\ (-2,0)$$

4

$$(2,0),\ (-2,0)$$

5

×

6

$$(0,0)$$

問題 a

$f(0,y) = \frac{y^3}{3} + y^2$ は $y = 2$ で極大値をとる．一方，$f(x,-2) = \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}$ は $x = 0$ で極小値をとる．したがって，点 $(0,-2)$ のいくらでも近くに $f(x,y) > f(0,-2)$ を満たす点も $f(x,y) < f(0,-2)$ を満たす点もある．

- 偏微分の記号が書けなかった方 (1 名)， この問題を 0 点にしています．

学籍番号	氏　名

2012 年 2 月 1 日/2012 年 2 月 4 日訂正
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 予備試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–8:10 点, 9–16:10 点, 17–19:10 点

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	$\dfrac{1}{3}-a$	0	$\dfrac{2}{15}$	0	6

9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	$-\dfrac{1}{3}+a$	0	$\dfrac{2}{15}$	0	6

17	18	19
-1	1	$\dfrac{1}{3}$

問題 C の解答欄 配点：1–4: 10 点; 5: 5 点; 6–8: 10 点; 問題 a,: 5 点

1	2	3	4	5	6
1	G	$(-1,1)$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$	$-\log(1-x)$	H

7	8
$\dfrac{-\log(1-t)}{t}$	$\log(1-t)$

問題 a

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ とおくと $\{S_n\}$ は単調非減少．さらに

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{(k+1)^2}\leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}=1+\int_1^n\frac{dx}{x^2}=2-\frac{1}{n}\leqq 2$$

なので $\{S_n\}$ は上に有界．したがって定理 D より $\{S_n\}$ は収束する．

- D-3: $[-1,1]$ ではない．
- D-a: 存在するかどうかわからないもの (それが存在することを示したい) を直接比較しているのは不正解．たとえば，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\dots$ なんていう式があったら不正解/ 収束半径が 1 だから，という議論は無効/ $1/n^2$ が単調で有界だから，というのはもちろん間違い．そんな議論ができるなら $\sum(1/n)$ が収束してしまう/ $\sum(1/n^s)$ の収束判定条件は今回は不正解にしている (ちゃんと示せる？ 示せてほしいので)

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 予備試験 〔解答用紙 3〕

問題 D の解答欄 配点：10 点

□← 選択した問題番号を記入する．

(1) $f^{(n)}(a)=b>0$ として，テイラーの定理 A を適用すると，仮定から

$$f(a+h)-f(a)=\frac{b}{n!}h^n+R_{n+1}(h) \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0$$

が成り立つ．したがって，ある正の数 δ で，$|h|<\delta$ ならば $(R_{n+1}(h))/h^n \leqq \frac{b}{2\cdot n!}$ となるようなものが存在する．このとき，$0<|h|<\delta$ を満たす h に対して

$$f(a+h)-f(a)=\frac{b}{n!}h^n+R_{n+1}(h)\geqq\frac{b}{n!}h^n-|R_{n+1}(h)|\geqq\frac{b}{n!}h^n-\frac{b}{2\cdot n!}h^n\geqq\frac{b}{2\cdot n!}h^n.$$

ここで $b>0$ かつ n が偶数なので右辺は正．すなわち $a-\delta<x<a+\delta$, $x\neq a$ なる x に対して $f(x)>f(a)$ となるので，f は a で極小値をとる．

(2) $p=f_{xx}(a,b)$, $q=f_{xy}(a,b)$, $r=f_{yy}(a,b)$ とおいてテイラーの定理を適用すると，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ なので

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}(ph^2+2qhk+rk^2)+o(h^2+k^2) \qquad (h,k)\to(0,0)$$

が成り立つ．(h,k) が $(0,0)$ に近いときは，最後の項は，最初の項に比べて十分に小さいので左辺の符号は $\varphi(h,k):=ph^2+2qhk+rk^2$ の符号と一致する．いま $p>0$ なら

$$\varphi(h,k)=p\left(\left(h+\frac{q}{p}k\right)^2+\frac{pr-q^2}{p^2}k^2\right)=p\left(\left(h+\frac{q}{p}k\right)^2+\frac{\Delta}{p^2}k^2\right)$$

なので $\varphi(h,0)>0$, $\varphi(-\frac{q}{p}k,k)<0$．すなわち $(h,k)=(0,0)$ にいくらでも近い (h,k) で $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ が正になるものも負になるものも取れるので f は (a,b) で極値をとらない．$p<0$ の時も同様．
$p=0$ のときは，$\varphi(h,k)=k(2qh+rk)$ で，これは原点の近くで正負いずれの値もとることから同様に極値を取らないことがわかる．

(3)

$$x(t)=\frac{1}{1-m^2}\cos mt+a\cos t+b\sin t \qquad (m\neq 1 \text{ のとき})$$
$$x(t)=\frac{t}{2}\sin t+a\cos t+b\sin t \qquad (m=1 \text{ のとき}).$$

ただし a, b は定数．問題に typo あり．それなりにやった方には 5 点以上ついているはず

学籍番号	氏　名

2012 年 2 月 1 日/2012 年 2 月 4 日訂正
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 予備試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面の座席表に従って着席してください．**座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．4 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名