2012 年 2 月 8 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 2 月 10 日以降に**数学事務室 (本館 3 階 332B)** で受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 2012 年 2 月 14 日までに山田まで電子メイルでお申し出ください. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**.

指定用紙のみ持込可

定理群:

定理 A 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^{n+1}-級ならば

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h), \qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}, \qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する. とくに $h\to 0$ のとき $R_{n+1}(h)=o(h^n)$ である.

定理 B 冪級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は $1/\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ である.

定理 C 絶対収束する級数は収束する.

定理 D 上に有界な単調非減少数列は収束する.

定理 E 定理 B の冪級数の収束半径 r が正ならば, それが定める関数 f は開区間 $(-r,r)$ で連続である.

定理 F 定理 E の状況で, $\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ が成り立つ. とくに右辺の冪級数の収束半径は r である.

定理 G 定理 E の状況で f は $(-r,r)$ で微分可能で $\frac{d}{dx}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ が成り立つ. 右辺の収束半径は r である.

定理 H 定理 E の状況で, とくに $r\neq+\infty$ であるとき, 定理 B の冪級数の右辺 に $x=r$ $(x=-r)$ を代入した級数が収束するならば

$$\lim_{x\to r-0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n \quad \left(\lim_{x\to -r+0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-r)^n\right)$$ が成り立つ.

定理 I 点 a を含む開区間で C^∞-級であるような関数 f が $k=0,1,\dots,n-1$ に対して $f^{(k)}(a)=0$ を満たし, さらに $f^{(n)}(a)>0$ が成り立っているとする. ただし n は正の整数である. このとき (1) n が奇数なら f は a で極値をとらない. (2) n が偶数なら f は a で極小値をとる.

定理 J 点 (a,b) を含む $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で C^∞-級であるような関数 f に対して $\Delta=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left(f_{xy}(a,b)\right)^2$ とおくとき, (1) f が (a,b) で極値をとるならば $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$. (2) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ のとき, (2a) $\Delta<0$ なら f は (a,b) で極値をとらない; (2b) $\Delta>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$ (<0) なら f は (a,b) で極小値 (極大値) をとる.

問題 A 文中の $\boxed{1}$∼$\boxed{7}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れ, 下線 **a** の理由を述べなさい. なお, 該当する対象がない場合は, 解答欄に × を記しなさい. [35 点]

$\boldsymbol{R}^2$ 全体で定義された関数

$$f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4-x^3+y^3$$

の偏導関数は $\boxed{1}$, 2 次偏導関数は $\boxed{2}$ である. とくに, f の偏微分係数がすべて 0 となるような点をすべて挙げると $(x,y)=\boxed{3}$ となる. とくに, <u>定理 J を用いると</u>, $\boxed{3}$ で挙げた点のうち, 点 $\boxed{4}$ では f は極小値をとり, 点 $\boxed{5}$ では f は極大値をとり, 点 $\boxed{6}$ では, 極値をとらない. $\boxed{3}$ に挙げた点で $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 以外の点では, **a** <u>f は $\boxed{7}$</u>[注1].

[注1] 極大値を取る, 極小値を取る, 極値をとらない, のいずれかが入る.

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{11}$ にもっともよく充てはまる数・式・定理 (この問題用紙の冒頭の定理群の記号 A~J) を入れなさい．さらに，下線 **a**, **b** の部分の理由を述べなさい． [40 点]

無限級数

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$$

は，$_{\mathbf{a}}$ この問題用紙冒頭の定理 $\boxed{1}$ より収束する．この和を求めよう．いま，

$$(**) \qquad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} x^{2n+1}$$

とおくと，右辺の級数の収束半径 r は $r = \boxed{2}$ である．したがって，定理 $\boxed{3}$ から, 区間 $\boxed{4}$ で $f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x) = \boxed{5}$ と冪級数表示できる．とくに $f'(x)$ は，対数関数を用いて $f'(x) = \boxed{6}$ と表すことができる．このことと $f(0) = \boxed{7}$ であることに注意すると，$f(x) = \boxed{8}$ が区間 $\boxed{9}$ で成り立つことがわかる．さらに，$_{\mathbf{b}}$ 定理 $\boxed{10}$ より $(*)$ の値は $\boxed{11}$ であることがわかる．

問題 C 次から 1 つを選択して解答しなさい． [10 点]

(1) 次は正しいか，理由をつけて答えなさい．「点 a を含む開区間で微分可能な一変数関数 $f(x)$ が $f'(a) < 0$ を満たすならば，a を含む十分小さい開区間 I で，その区間 I 上で f が単調減少となるものが存在する」

(2) 自然対数の底 e が無理数であることを示しなさい．

(3) 冒頭の定理群の，定理 I (1) が成り立つ理由を (講義で扱った "ちょっと正確バージョン" 程度の厳密さで) 述べなさい．

(4) 変数 t の一変数関数 $x(t)$ で，$\ddot{x} + x = \sin mt$ および $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ となるものを求めなさい．ただし $\dot{} = d/dt$, m は正の定数である ($m \neq 1$ とは限らない)．

問題 D [0 点] どうしても言い残したいことがありましたらどうぞ．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡♡♡

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–2: 5 点；以下各 5 点

1

$$f_x = 4x^3 + 2xy^2 - 3x^2, \qquad f_y = 2x^2y + 4y^3 + 3y^2.$$

2

$$f_{xx} = 12x^2 + 2y^2 - 6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = 4xy, \quad f_{yy} = 2x^2 + 12y^2 + 6y$$

3

$$(0,0), \left(0, -\frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

4

$$\left(0, -\frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, 0\right)$$

5

×

6

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

7

極値をとらない

問題 a

$f(t,0) = -t^3 + t^4$ は，定理 I (1) より $t = 0$ で極値をとらない．したがって，点 $(0,0)$ のいくらでも近くに $f(x,y) > f(0,0)$ を満たす点も $f(x,y) < f(0,0)$ を満たす点もある．

学籍番号	氏　名

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1,2:各 5 点, 3–5:5 点, 6:5 点, 7–9:5 点, 10–11:5 点, a,b: 各 5 点

1	2	3	4	5	6
D	1	G	$(-1,1)$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$	$-\log(1-x^2)$

7	8	9
0	$(1-x)\log(1-x)-(1+x)\log(1+x)+2x$	$(-1,1)$

10	11
H	$2-2\log 2$

問題 a

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+1)}$ とおくと $S_n-S_{n-1}=1/(n(2n+1))>0$ だから $\{S_n\}$ は単調増加，とくに単調非減少である．
また，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+1)}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\leqq 1$$

なので $\{S_n\}$ は上に有界．したがって定理 D より $\{S_n\}$ は収束する．

問題 b

区間 $(-1,1)$ で，$f(x)=(1-x)\log(1-x)-(1+x)\log(1+x)+2x$ である．一方，$(**)$ 右辺の冪級数の収束半径は 1 で，かつ $x=1$ のとき収束し $(*)$ の値になるから，定理 H より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\bigl((1-x)\log(1-x)-(1+x)\log(1+x)+2x\bigr).$$

ここで，定理 A を関数 $h(v)=e^v$ に適用して $e^v=1+v+\dfrac{v^2}{2}+\dfrac{e^{\theta v}v^3}{6}$ となる $\theta\in(0,1)$ が存在するが，とくに $e^{\theta v}>0$ だから

$$v>0 \text{ のとき}\qquad 1+v+\frac{v^2}{2}\leqq e^v \qquad \text{したがって}\qquad \lim_{v\to+\infty}\frac{e^v}{v}=+\infty.$$

このことから $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}(1-x)\log(1-x)=\lim_{t\to+0}t\log t=\lim_{u\to-\infty}ue^u=\lim_{v\to+\infty}\frac{v}{e^v}=0.$
したがって $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=2-2\log 2.$

学籍番号	氏　名

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：10 点

← 選択した問題番号を記入する．

(1) 正しくない

実際，$\boldsymbol{R}$ 上で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は，0 を含む区間で微分可能，かつ $f'(0) = -\frac{1}{2}$ であるが，0 を含む任意の開区間は f が単調増加であるような区間と，単調減少となるような区間をともに含む．

(2) e が有理数だと仮定して矛盾を導く．まず，テイラーの定理 A を $f(x) = e^x$ に適用して，$e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{\theta}$ $(0 < \theta < 1)$ を満たす θ が存在することがわかる．したがって $e < \frac{5}{2} + \frac{e}{6}$．すなわち $2 < e < 3$ であることがわかる．ここで $e = m/n$ (m, n は正の整数) と表されているとする．このとき，$f(x) = e^x$ にテイラーの定理 A を適用すると

$$\frac{m}{n} = e = f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \qquad (0 < \theta < 1)$$

を満たす θ が存在することがわかる．この式の両辺に $n!$ をかけると，

$$m \cdot n! = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1 + \frac{e^{\theta}}{n+1}.$$

左辺および右辺の最後の項以外の項はすべて整数だから，$e^{\theta}/(n+1)$ は整数でなければならない．とくに $3 > e > e^{\theta} \geqq n+1$ だから n は 1 でなければならない．したがって e は整数であるが，これは $2 < e < 3$ に矛盾する．

(3) $f^{(n)}(a) = b > 0$ として，テイラーの定理 A を適用すると，仮定から

$$f(a+h) - f(a) = \frac{b}{n!}h^n + R_{n+1}(h) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0$$

が成り立つ．したがって，ある正の数 δ で，$|h| < \delta$ ならば $(R_{n+1}(h))/h^n \leqq \frac{b}{2 \cdot n!}$ となるようなものが存在する．このとき，n が奇数であることに注意すれば，$0 < h < \delta$ を満たす h に対して

$$f(a+h) - f(a) = \frac{b}{n!}h^n + R_{n+1}(h) \geqq \frac{b}{n!}h^n - |R_{n+1}(h)| \geqq \frac{b}{n!}h^n - \frac{b}{2 \cdot n!}h^n \geqq \frac{b}{2 \cdot n!}h^n > 0$$
$$f(a-h) - f(a) = \frac{b}{n!}(-h)^n + R_{n+1}(-h) \leqq -\frac{b}{n!}h^n + |R_{n+1}(h)| \leqq -\frac{b}{n!}h^n + \frac{b}{2 \cdot n!}h^n \leqq \frac{b}{2 \cdot n!}h^n < 0.$$

a にいくらでも近い点 x で $f(x) > f(a)$ を満たすものも $f(x) < f(a)$ を満たすものも存在する．したがって f は a で極値をとらない．

(4) $m \neq 1$ のとき，$x(t) = \dfrac{1}{1-m^2} \sin mt + \dfrac{m^2+m-1}{m^2-1} \sin t$; $m = 1$ のとき $x(t) = -\frac{t}{2} \cos t + \frac{3}{2} \sin t$.

学籍番号	氏　名

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 D への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 D [0 点] どうしても言い残したいことがありましたらどうぞ．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面の座席表に従って着席してください．**座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．

  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．4 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名