微分積分学第二B
講義ノート

東京工業大学 全学科目
2011年度後期

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

1　平均値の定理

1.1　平均値の定理

定理 1.1 (平均値の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f が，開区間 (a,b) では微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \qquad a<c<b$$

を満たす c が少なくとも一つ存在する．

微分可能な関数は連続であることに注意すれば，定理 1.1 から次がただちに従う：

系 1.2. 一変数関数 f が a と $a+h$ を含む区間で微分可能であるとする．このとき，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h \qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が少なくとも一つ存在する．

証明: まず $h=0$ の場合はどんな θ をとっても結論の式が成り立つ．
次に $h>0$ の場合，f は $[a,a+h]$ で微分可能であるから，とくに連続．したがって，定理 1.1 を $b=a+h$ として適用すると

$$f(a+h)=f(a)+f'(c)h \qquad a<c<a+h$$

を満たす c が少なくとも存在する．ここで $\theta=(c-a)/h$ とおけば $a<c<a+h$ から $0<\theta<1$ が得られる．
最後に $h<0$ の場合は，区間 $[a+h,a]$ に対して平均値の定理 1.1 を適用すれば

$$\frac{f(a)-f(a+h)}{a-(a+h)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(c) \qquad a+h<c<a$$

を満たす c が存在する．ここで $h<0$ に注意すれば $c=a+\theta h$ $(0<\theta<1)$ と表されることがわかる．

1.2　平均値の定理の応用

■関数の近似値

例 1.3. $\sqrt{10}$ の近似値を求めよう．関数 $f(x)=\sqrt{x}$，$a=9, b=10$ に対して定理 1.1 を適用すると

$$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{10-9}=\frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad 9<c<10$$

を満たす c が存在する．この式を整理すると

$$\sqrt{10}=3+\frac{1}{2\sqrt{c}}, \qquad 9<c<10.$$

とくに $c>9$ だから

$$\sqrt{10}<3+\frac{1}{2\sqrt{9}}=3+\frac{1}{6}<3.17.$$

2011 年 10 月 5 日 (2011 年 10 月 12 日訂正)

一方，$c<10$ だから，上の式を用いて

$$\sqrt{10} > 3 + \frac{1}{2\sqrt{10}} > 3 + \frac{1}{2\left(3+\frac{1}{6}\right)} = 3 + \frac{3}{19} > 3 + \frac{3}{20} = 3.15.$$

以上から

$$3.15 < \sqrt{10} < 3.17$$

が得られた．とくに $\sqrt{10}$ を 10 進小数で表したとき，小数第一位は 1, 小数第二位は 5 または 6 であることがわかる．

■関数の値の変化

定理 1.4. 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数が (a,b) で微分可能かつ $f'(x)=0$ $(a<x<b)$ を満たしているならば，f は $[a,b]$ で定数である．

証明. 区間 $(a,b]$ 内の任意の点 x をとり，平均値の定理 1.1 を区間 $[a,x]$ に対して適用すると，

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c), \qquad a<c<x(\leqq b)$$

を満たす c が存在する．仮定より，このような c に対して $f'(c)=0$．したがって $f(x)=f(a)$ が成り立つ．x は任意だったから

$$f(x)=f(a) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

が成り立つ． □

注意 1.5. 一般に，点 a を含む開区間で定数であるような関数 f に対して $f'(a)=0$ である．

系 1.6. 区間 I で定義された微分可能な関数 F, G がともに連続関数 f の原始関数ならば $G(x)=F(x)+C$ (C は定数) と書ける．

証明: 関数 $H(x)=G(x)-F(x)$ は区間 I 上で $H'(x)=0$ を満たすから区間 I 上で定数である．

注意 1.7. 関数 F, G の定義域 I が区間でなければ系 1.6 は成り立たない．実際，$\boldsymbol{R}\setminus\{0\}=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x\neq 0\}$ 上で定義された二つの関数

$$F(x)=\log|x|, \qquad G(x)=\begin{cases}\log x & (x>0)\\ \log(-x)+7 & (x<0)\end{cases}$$

はともに $f(x)=1/x$ の原始関数であるが，差は定数でない．

■関数の増減

定理 1.8. 区間 (a,b) で定義された微分可能な関数 f の導関数が (a,b) で正 (負) の値をとるならば，f は (a,b) で単調増加 (減少) である．

証明. 区間 (a,b) から二つの数 x_1, x_2 を $x_1<x_2$ を満たすようにとる．このとき，区間 $[x_1,x_2]$ に対して定理 1.1 を適用すれば

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \qquad (a<)x_1<c<x_2(<b)$$

を満たす c が存在することがわかる．仮定より $f'(c) > 0$ なので，$x_2 - x_1 > 0$ であることと合わせて

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

が得られる．すなわち $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つことがわかるので，f は単調増加．$\square$

注意 1.9. 微分可能な関数 f の導関数が連続である[*1]とき，f の定義域の内点 c で[*2] $f'(c) > 0$ ならば，c を含む開区間 I で，f が I 上単調増加となるものが存在する．

実際，f' が連続かつ $f'(c) > 0$ ならば c を含む開区間 I で $f'(x) > 0$ が I 上で成り立つものが存在する (この事実は第 3 回講義にて説明する)．

注意 1.10. 一般に，微分可能な関数 f の定義域の内点 c で $f'(c) > 0$ だったからといって，c を含むある開区間で f が単調増加であるとは限らない．

実際，次の関数を考えよう：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

すると f は微分可能で，その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0). \end{cases}$$

であるから，とくに $f'(0) = 1/2 > 0$ である．ここで，$x = 0$ を含む開区間 I を一つ与え，$\xi = 1/(2m\pi)$ が I に含まれるように十分大きい番号 m をとると，$f'(\xi) < 0$ である．f' は $x \neq 0$ では連続だから ξ を含む区間 J で $f'(x) < 0$ $(x \in J)$ となるものが存在する．したがって $I \cap J$ で f は単調減少である．すなわち，0 を含む任意の開区間は f が単調減少であるような区間を含む．

1.3 平均値の定理の証明

平均値の定理を示すには，次の連続関数の性質 (第 3/4 回講義で扱う予定; ここでは証明を与えない) を用いる：

定理 1.11 (最大・最小値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f は，区間 $[a, b]$ で最大値・最小値をもつ．

注意 1.12. 区間 I で定義された関数 f が $c \in I$ で最大値 (最小値) をとる，とは任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(c)$ $(f(x) \geqq f(c))$ が成り立つことである．

関数 f が区間 I で最大値をとる，とは，上のような $c \in I$ が存在することである．

ここで，c は定義域 I に含まれていることに注意せよ．たとえば $\boldsymbol{R}$ 全体で定義された関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ は $f(x) \leqq \pi/2$ を満たしているが $f(x) = \pi/2$ となる $x \in \boldsymbol{R}$ は存在しないので，最大値をとる，とはいえない．

注意 1.13. この定理は (中間値の定理と同様) よく考えないと当たり前の定理であるが，実数の連続性と深く関わっている．実際，定義域を有理数に限って，$f(x) = 4x^2 - x^4$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を考えると，これは $0 \leqq x \leqq 2$

[*1] すなわち C^1-級.

[*2] すなわち c を含むある開区間が f の定義域に含まれるような点.

上で (定義域を有理数に限っても) 連続な関数だが，最大値をとらない．もちろん，同じ関数を，$\boldsymbol{R}$ の区間 $[0, 2]$ 上で定義された連続関数と考えれば $x = \sqrt{2}$ で最大値をとる．

補題 1.14 (Rolle の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 F が開区間 (a, b) で微分可能，かつ $F(a) = F(b)$ を満たしているならば，

$$F'(c) = 0, \qquad a < c < b$$

を満たす c が少なくとも一つ存在する．

証明. 関数 F が定数関数なら，区間 (a, b) 上で $F' = 0$ となり，結論は明らかだから，以下 F は定数関数でないとしておく．

関数 F は $[a, b]$ で連続だから，$c_1, c_2 \in [a, b]$ で F は c_1 で最大値をとり，c_2 で最小値をとるようなものが存在する．

いま，$c_1 \in (a, b)$ とする．このとき，$c_1 + h \in (a, b)$ となる任意の $h \neq 0$ に対して $F(c_1 + h) \leqq F(c_1)$ だから

$$\frac{F(c_1 + h) - F(c_1)}{h} \begin{cases} \leqq 0 & (h > 0) \\ \geqq 0 & (h < 0) \end{cases}$$

が成り立つ．ここで F は c_1 で微分可能だから

$$F'(c_1) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c_1 + h) - F(c_1)}{h}$$

が存在するが，とくにこの極限は右極限，左極限と一致しなければならないので $F'(c_1) = 0$.

一方，$c_1 = a$ または $c_1 = b$ とする．すると $F(a) = F(b)$ だから，F は a, b で最大値を取る．ここで F は定数関数ではないとしているので，最小値は $F(a)$ よりも真に小さい値でなければならない．したがって $c_2 \in (a, b)$ となる．これに対して上と同じ議論を行うと $F'(c_2) = 0$ がわかる． □

平均値の定理 1.1 の証明. 関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

に対して Rolle の定理 (補題 1.14) を適用すればよい． □

定理 1.15 (Cauchy の平均値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f, g がともに (a, b) で微分可能，$g(a) \neq g(b)$ を満たし，$g'(x) = 0$ なら $f'(x) \neq 0$ であるとする．このとき

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad a < c < b$$

を満たす c が少なくともひとつ存在する．

証明. 関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\bigl(g(x) - g(a)\bigr)$$

に対して Rolle の定理 (補題 1.14) を適用すればよい． □

問題

1-1 平均値の定理 1.1 の状況を絵に描きなさい.

1-2 平均値の定理を用いて $\sqrt{5}$ の近似値が 2.2 (小数第一位の数字は 2) であることを示しなさい.

1-3 定理 1.11 の仮定が必要であることを，次のようにして示しなさい：

- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値をもつが最小値をもたないものの例を挙げなさい.
- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい.
- 閉区間 $[0,1]$ で定義された (連続とは限らない) 関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい.

1-4 平均値の定理の証明を完成させなさい．同様に，Cauchy の平均値の定理の証明を完成させなさい.

1-5 Cauchy の平均値の定理を用いて，次を示しなさい (L'Hospital の定理の特別な場合)：

関数 $f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a, a+h)$ で連続，かつ $(a, a+h)$ で微分可能であるとする．さらに $f(a) = g(a) = 0$, かつ極限値

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在するならば，極限値

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

も存在して，両者は等しい.

1-6 次の極限値を求めなさい.

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$.
- $\displaystyle \lim_{x \to +0} \frac{5^x - 3^x}{x^2}$.

2　極限と連続性

命題 2.1 (三角不等式)**.** 任意の実数 x, y に対して $|x+y| \leqq |x|+|y|$ が成り立つ.

証明: x, y がともに 0 でなければ $|x|+|y|+|x+y|>0$ だから

$$\begin{aligned}\bigl(|x+y|-|x|-|y|\bigr)\bigl(|x+y|+|x|+|y|\bigr) &= |x+y|^2-\bigl||x|+|y|\bigr|^2=(x+y)^2-(|x|+|y|)^2\\ &= x^2+2xy+y^2-|x|^2-2|x|\,|y|-|y|^2\\ &= x^2+2xy+y^2-x^2-2|xy|-y^2=2(xy-|xy|)\leqq 0\end{aligned}$$

から結論が得られる.

系 2.2. 任意の実数 x, y に対して $\bigl||x|-|y|\bigr| \leqq |x-y|$ が成り立つ.

証明: 三角不等式を用いて

$$|x|=|(x-y)+y|\leqq |x-y|+|y|, \qquad |y|=|(y-x)+x|\leqq |y-x|+|x|=|x-y|+|x|$$

が成り立つことがわかるので $|x|-|y|\leqq |x-y|$, $|y|-|x|\leqq |x-y|$ を得る.

■ド・モルガンの法則　命題 P, Q に対して

「$(P$ かつ $Q)$ でない」　≡　「$(P$ でない$)$ または $(Q$ でない$)$」
「$(P$ または $Q)$ でない」　≡　「$(P$ でない$)$ かつ $(Q$ でない$)$」

である．ここで “≡” は二つの命題が「同値である」すなわち論理的に同じ意味であることを表している．
　さらに，不定の文字 x を含む命題 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

「(すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ) でない」　≡　「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」
「(ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ) でない」　≡　「すべての x に対して $P(x)$ が成り立たない」

である.
　さて「P ならば Q」とは「$(P$ でない$)$ または Q」のことである．このことから

「$(P$ ならば $Q)$ でない」　≡　「$((P$ でない$)$ または $Q)$ でない」　≡　「P かつ $(Q$ でない$)$」.

2.1　数列の極限

定義 2.3. 実数を成分とする数列 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ が α に収束するとは，任意の正の数 ε に対して次を満たす番号 N が存在することである：任意の n に対して，$n>N$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon$.

例 2.4. 数列 $\{1/n; n=1,2,\dots\}$ は 0 に収束する.
　実際，任意の正の実数 ε に対して $N=[1/\varepsilon]+1$ とする[*3]．すると $n>N$ のとき

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\frac{1}{[1/\varepsilon]+1}\leqq\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon.$$

2011 年 10 月 12 日 (2011 年 10 月 19/26 日訂正)
[*3] 実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す (Gauss 記号)

例 2.5. 羊羹の三等分.

定義 2.6. 実数を成分とする数列 $\{a_n\}$ が **発散する**とは，$\{a_n\}$ がどんな数 α にも収束しないことである.

例 2.7. 数列 $\{(-1)^n; n = 1, 2, \dots\}$ は発散する．このことを示そう.
数列 $\{a_n\}$ が収束するとは

> ある実数 α で (任意の正の数 ε に対して次を満たす番号 N が存在する：すべての番号 n に対して $n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$)

ということである．これを否定して，数列 $\{a_n\}$ が発散するとは,

> 任意の実数 α に対して次が成り立つ (ある正の数 ε で次を満たすものが存在する：任意の番号 N に対してある番号 n で $n > N$ かつ $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となるものが存在する)

ということである.

さて，この例の場合，すなわち $a_n = (-1)^n$ のとき，(1) $\alpha \neq 1$ のとき，$\varepsilon = |1 - \alpha|$ とおく．このとき，任意の番号 N に対して $n = N + 1$ (N が奇数のとき)，$n = N + 2$ (N が偶数のとき) とおくと，$n > N$ かつ n は偶数だから，$|a_n - \alpha| = |1 - \alpha| = \varepsilon \geqq \varepsilon$ が成り立つ．(2) $\alpha = 1$ のとき，$\varepsilon = 2$ とおく．このとき，任意の番号 N に対して $n = N + 2$ (N が奇数とのき)，$n = N + 1$ (N が偶数のとき) とおくと，$n > N$ かつ n は奇数だから，$|a_n - \alpha| = |-1 - 1| = 2 \geqq \varepsilon$ が成り立つ.

以上より $\{a_n\}$ は収束しない，すなわち発散する.

定義 2.8. 実数を成分とする数列 $\{a_n\}$ が**正の無限大に発散**する，とは任意の実数 M に対して，ある番号 N で次を満たすものが存在することである：任意の番号 n が $n > N$ を満たすならば $a_n > M$.

例 2.9. 数列 $\{n^2; n = 1, 2, \dots\}$ は正の無限大に発散する.

実際，実数 M に対して $N = \max\{[M] + 1, 1\}$ とすると，$n > N$ を満たす番号 n に対して (1) $M \geqq 0$ のとき $N \geqq 1$ だから $a_n = n^2 > N^2 \geqq NM \geqq M$. (2) $M < 0$ のとき $a_n = n^2 > N^2 = 1 \geqq M$.

定義 2.10. 数列 $\{a_n\}$ が上に (下に) **有界である** である，とは，ある実数 M で次を満たすものが存在することである：任意の番号 n に対して $a_n \leqq M$ ($a_n \geqq M$)．とくに $\{a_n\}$ が上に有界かつ下に有界であるときに，単に**有界である**という.

注意 2.11. 数列 $\{a_n\}$ が有界であるための必要十分条件は，次を満たす実数 M が存在することである：任意の番号 n に対して $|a_n| \leqq M$.

命題 2.12. 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば $\{a_n\}$ は有界である.

> **証明:** 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとする．(収束の定義で $\varepsilon = 1$ とすると) ある番号 N で $n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < 1$ となるものが存在する．そこで $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |\alpha| + 1\}$ とおくと $n = 1, \dots, N$ のとき $|a_n| \leqq \max\{|a_1|, \dots, |a_N|\} \leqq M$．また $n > N$ のとき，$|a_n| = |\alpha + (a_n - \alpha)| \leqq |\alpha| + |a_n - \alpha| \leqq |\alpha| + 1 \leqq M$.

例 2.13. 数列 $\{S_n\}$ を

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

によって定めると，この数列は有界でない．とくに $\{S_n\}$ は発散する.

実際

$$|S_n| = S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \int_j^{j+1} \frac{1}{j}\,dx \geqq \sum_{j=1}^{n} \int_j^{j+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1).$$

2.2 関数の極限と連続性

定義 2.14. 実数 a を含む区間から a を除いた点で定義された一変数関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ を満たすとは，任意の正の数 ε に対してある正の数 δ で次を満たすものが存在することである：任意の実数 x が $0 < |x-a| < \delta$ を満たすならば $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．

定義 2.15. 関数 f が a で**連続**である，とは，f が a をふくむある開区間 I で定義され，

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである．

注意 2.16. 関数 f が a で連続であるための必要十分条件は f が a を含む開区間 I で定義されており，かつ，任意の正の数 ε に対して，正の数 δ で次を満たすものが存在することである：$|x-a| < \delta$ を満たす任意の x に対して $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

命題 2.17. 関数 f が a で連続，かつ $f(a) > 0$ ならば a を含む開区間 I で $f(x) > 0$ $(x \in I)$ となるものが存在する．

証明: (注意 2.16 で $\varepsilon = f(a)/2$ として) ある正の数 δ で

$$|x-a| < \delta \qquad \text{ならば} \qquad |f(x)-f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

となるものが存在する．そこで $I = (a-\delta, a+\delta)$ とすると $x \in I$ なら $|x-a| < \delta$ だから

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) \geqq f(a) - |f(x)-f(a)| \geqq f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0.$$

問題

2-1 実数 r に対して，数列 $\{r^n; n = 1, 2 \dots, \}$ は (1) $|r| < 1$ のとき 0 に収束，(2) $r = 1$ のとき 1 に収束，(3) それ以外のとき発散することを示しなさい．

2-2 定義 2.8 に倣って数列 $\{a_n\}$ が負の無限大に発散する，ということの定義を述べなさい．

2-3 発散する数列で，有界なものの例を挙げなさい．また，有界でない数列で，正の無限大にも負の無限大にも発散しないものの例を挙げなさい．

2-4 次のことはどのように定義するべきか：

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$$

2-5 関数 f が a で連続かつ $f(a) < 0$ のとき，a を含むある開区間 I で $x \in I$ ならば $f(x) < 0$ となるものが存在する．

3　連続関数の性質

■連続性 (復習)　区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された関数 f が $a \in I$ で**連続である** とは,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつことである．さらに f が区間 I の各点で連続であるとき f は**区間 I で連続**であるという．区間 I で連続な関数 f を “I 上の連続関数” ということがある．

関数 f が区間 I で連続であるための必要十分条件は，各 $a \in I$ に対して，

(3.1)　任意に正の数 ε を与えると，以下を満たす正の数 δ が存在する：$|x-a| < \delta$, $x \in I$ を満たす任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ がなりたつ．

が成り立つことである．

また (3.1) の否定をすることで，f が a で**連続でない**ための必要十分条件は

(3.2)　以下を満たす正の数 ε が存在する：任意の正の数 δ に対して，$|x-a| < \delta$, $x \in I$ を満たす x で $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$ を満たすものが存在する．

補題 3.1. 区間 I で定義された関数 f が $a \in I$ で連続であるための必要十分条件は，I の点からなり a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$$

が成り立つことである．

証明: 必要性：f が a で連続であるとし，a に収束する I の数列 $\{a_n\}$ をとる．正の数 ε を任意にとると，それに対して $|x-a| < \delta$ かつ $x \in I$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ が存在する (f の連続性)．この δ に対して，番号 N で $n > N$ を満たす任意の n に対して $|a_n - a| < \delta$ となるようなものが存在する．この状況で,

$$n > N \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - a| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$$

なので，$f(a_n)$ は $f(a)$ に収束する．
十分性：対偶を示す (証明は概略にとどめる)．すなわち f が a で連続でないならば，a に収束する数列 $\{a_n\}$ で $\{f(a_n)\}$ が $f(a)$ に収束しないものをとることができることを示す．いま (3.2) のような ε をとる．すると，任意の番号 n に対して $|a_n - a| < \frac{1}{n}$, $a_n \in I$ かつ $|f(a_n) - f(a)| \geqq \varepsilon$ となるような a_n をとることができる．このようにして得られた数列 $\{a_n\}$ は a に収束するが，$\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない．

例 3.2. 関数

$$g(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0). \end{cases}$$

は $x = 0$ で連続でない．実際，$a_n = \frac{1}{(2n\pi)}$ とすると $\{a_n\}$ は 0 に収束するが，$g(a_n) = -1/2$ は $g(0) = 1/2$ に収束しない．

補題 3.3. 関数 f，g が区間 I で連続であるとき,

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \qquad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

で定まる関数 $f+g$, $f-g$, fg はそれぞれ I で連続である．さらに $g(x) \neq 0$ $(x \in I)$ が成り立つならば f/g も I で連続である．ただし $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

2011 年 10 月 19 日 (2011 年 10 月 26 日訂正)

証明: ここでは $f+g$, f/g の連続性を示し，残りは演習とする：
点 $a \in I$ を一つ固定しておき， 任意に正の数 ε をとる．このとき f, g の連続性から，次を満たす正の数 δ_1, δ_2 が存在する：

$$|x-a| < \delta_1 \quad \text{かつ} \quad x \in I \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |x-a| < \delta_2 \quad \text{かつ} \quad x \in I \quad \Rightarrow \quad |g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

そこで $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると，$\delta > 0$ で，$|x-a| < \delta$ ならば $|x-a| < \delta_j$ $(j=1,2)$ が成り立つから，$|x-a| < \delta$ かつ $x \in I$ ならば

$$|(f+g)(x)-(f+g)(a)| = \bigl|\bigl(f(x)-f(a)\bigr)+\bigl(g(x)-g(a)\bigr)\bigr| \leqq |f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

したがって $f+g$ は a で連続．a は任意だったから $f+g$ は連続.
次に f/g の連続性を示す：$g(a) \neq 0$ だが，$g(a) > 0$ の場合を考えよう．すると，ある正の数 δ_0 で $|x-a| < \delta_0$ ならば $g(x) > \frac{g(a)}{2}$ となるようなものが存在する[*4]．いま $\varepsilon > 0$ に対して

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon|g(a)|^2}{2(|g(a)|+|f(a)|)}$$

とおくと，これも正の数で，f, g の連続性から正の数 δ_1, δ_2 で

$$|x-a| < \delta_1 \quad \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon', \qquad |x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \varepsilon'$$

を満たすものが存在する．そこで $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ とすると，これは正の数で $|x-a| < \delta$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| &= \frac{|f(x)g(a)-f(a)g(x)|}{|g(x)|\,|g(a)|} \leqq \frac{|f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)|}{|g(x)|\,|g(a)|} \\ &\leqq \frac{|g(a)|\,|f(x)-f(a)|+|f(a)|\,|g(x)-g(a)|}{|g(x)|\,|g(a)|} < \frac{\varepsilon'(|g(a)|+|f(a)|)}{\frac{1}{2}|g(a)|^2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって f/g は a で連続である．$g(a) < 0$ の場合も同様.

さらに前期で学んだように，

補題 3.4. 関数 f が区間 I で微分可能なら I で連続である．

■実数の連続性　実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は (1) 加減乗除が (0 でわることを除いて) 定義されていて，然るべき性質を満たしている (2) 大小関係が定義され，然るべき性質を満たしている[*5]．このような性質をもつ数の集合を "順序体" という．

実は $\boldsymbol{R}$ を考えなくても，有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ も順序体である．$\boldsymbol{Q}$ になく $\boldsymbol{R}$ がもっている重要な性質が**実数の連続性**である．それを述べよう．

定義 3.5. 空集合でない集合 $A \subset \boldsymbol{R}$ が**上に有界** (**下に有界**) とは次を満たす実数 M が存在することである：任意の $x \in A$ に対して $x \leqq M$ $(x \geqq M)$．この条件を満たす M のことを A の**上界** (**下界**) という．

定義 3.6. 上 (下) に有界な集合 $A \subset \boldsymbol{R}$ の上界 (下界) のうち最小 (最大) のものを A の**上限** (**下限**) といって $\sup A$ $(\inf A)$ で表す.

例 3.7. 区間 $I=(0,1)$, $I'=(0,1]$, $I''=[0,1]$ に対して

$$\sup I = \sup I' = \sup I'' = 1, \qquad \inf I = \inf I' = \inf I'' = 0.$$

[*4] 前回の講義資料を参考にして証明せよ．なお，"$x \in I$" は面倒くさいので省略している．
[*5] ここでは深入りしないが，"然るべき性質" とは，小学校，中学校，高等学校で学んだ数の演算の性質，不等式の性質などである．

実数の性質として，次のことを認めよう：

公理 3.8 (実数の連続性)**.** $\boldsymbol{R}$ の上 (下) に有界な部分集合 A は上限 (下限) をもつ.

注意 3.9. 有理数の集合にも有界性，上界，上限などの言葉を定義することができるが，上限の存在は保証されない．実際，$\{x \in \boldsymbol{Q}\,;\, x^2 < 2\}$ は上に有界な有理数の集合だが，有理数の範囲で上限は存在しない.

注意 3.10. 上に有界な集合 $A \subset \boldsymbol{R}$ に対して，α が A の上限であるための必要十分条件は

(1) 任意の $x \in A$ に対して $x \leqq \alpha$,
(2) 任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < x \leqq \alpha$ を満たす $x \in A$ が存在する.

(1) は α が A の上界であることを，(2) は α より小さい数が A の上界でないことを表している.

■中間値の定理

定理 3.11. 閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ を満たしているならば $f(c) = 0$, $a < c < b$ を満たす c が少なくとも一つ存在する.

証明:[証明の概略] 次の集合を考える：

$$A = \{x \in [a, b]\,;\, f(x) < 0\} \subset [a, b]$$

すると $a \in A$ だから $A \neq \emptyset$．さらに b は A の上界だから A は上に有界．したがって公理 3.8 より A の上限 c が存在する．とくに $a \in A$ だから $a \leqq c$．一方，$c > b$ とすると $d = (b + c)/2$ は $b < d < c$ を満たしている．とくに d は A の上界になっているので，$c = \sup A$ であることに矛盾する．したがって $c \leqq b$. 以上より $c \in [a, b]$ が言えた.
さて $c = \sup A$ であるから，任意の正の整数 n に対して $c - \frac{1}{n} < x_n \leqq c$ を満たす $x_n \in A$ が存在する．このようにして数列 $\{x_n\}$ が得られるが，これは c に収束する．したがって f の連続性から

$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

が成り立つ．ここで $x_n \in A$ だから $f(x_n) < 0$．したがって $f(c) \leqq 0$ が成り立つ．もし $f(c) < 0$ なら f の連続性から c を含む区間で $f(x) < 0$ となるが，それは $c = \sup A$ となることに矛盾する．したがって $f(c) = 0$.

■最大・最小値の定理　区間 I で定義された関数 f が $c \in I$ で**最大値** (**最小値**) をとる，とは任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(c)$ $(f(x) \geqq f(c))$ を満たすことである.

定理 3.12. 閉区間 $I = [a, b]$ 上で定義された連続関数 f は，I 上で最大値・最小値をとる.

証明:[証明の概略] 集合

$$B = \{f(x)\,;\, x \in [a, b]\} = \{y\,;\, f(x) = y \text{ となるような } x \in [a, b] \text{ が存在する }\}$$

を考える.
このとき，(1) B は上に有界である．(2) $\beta = \sup B$ とすると $\beta \in B$．(3) $f(c) = \beta$ となる c をとればそれが求めるものである.

もうすこし詳しい証明は次回紹介する.

問題

3-1 補題 3.3 の残りを示しなさい．

3-2 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束するならば $\{a_n + b_n\}$ は $\alpha + \beta$ に収束することを，補題 3.3 に倣って示しなさい．差，積，商の場合はどうか．

3-3 x の多項式で与えられる関数は $\boldsymbol{R}$ で連続である．

3-4 任意の正の数 a に対して $x^n = a$ を満たす正の実数 x がただ一つ存在することを示しなさい．この x のことを $\sqrt[n]{a}$ と書く．

3-5 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数 f に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \qquad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する．

3-6 平均値の定理の証明では，実数の連続性がどのような形で使われているか．

4 実数の連続性

■実数

- $\boldsymbol{R}$ には加減乗除の演算が定義されており，しかるべき性質をみたしている[*6].
- 大小関係 "$\leqq$" という全順序が定義されている.
- 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の部分集合だが, 実数 $a, b \in \boldsymbol{R}$ が $a < b$ を満たすならば，$a < x < b$ を満たす有理数 x が存在する[*7]

ここに挙げた性質は有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ も満たしていることに注意する．$\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{Q}$ より真に大きい集合である，ということを述べているのが次の**実数の連続性**である．

■有界な部分集合と上限・下限の存在 (前回の復習)

定義 4.1. 実数の部分集合 $X \subset \boldsymbol{R}$ が**上に有界**であるとは，次の条件を満たす実数 m が存在することである：任意の $x \in X$ に対して $x \leqq m$．このような m を X の**上界**という．

一般に m が X の上界ならば，m 以上の実数は X の上界である．X の上界全体の集合が最小値をもつとき，その最小値 m_0 を X の**上限**といい，$\sup X$ と表す．

注意 4.2. 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ に対しても有界性, 上界, 上限が定義される．たとえば, $Y := \{x \in \boldsymbol{Q} \mid x^2 \leqq 2\}$ は上に有界な $\boldsymbol{Q}$ の部分集合である．実際，$Y \ni x$ に対して $x \geqq 1$ なら $x \leqq x^2 \leqq 2$ なので Y は上に有界で，2 はその上界である．しかし，その上限は $\boldsymbol{Q}$ には存在しない．

ここで，実数の連続性として次を成り立つものとして話をすすめる：

公理 4.3 (実数の連続性)**.** $\boldsymbol{R}$ の上に有界な部分集合は上限をもつ．

定理 4.4 (アルキメデスの原理)**.** 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ は上に有界でない．さらに，任意の正の数 ε に対して $\{n\varepsilon\,;\, n \in \boldsymbol{N}\}$ は上に有界でない．

証明: 後半のみを示す．もし，$X := \{n\varepsilon\,;\, n \in \boldsymbol{N}\}$ が上に有界であるとすると，$\sup X = \alpha$ が一つ存在する．このとき，$\alpha - (\varepsilon/2) < x \leqq \alpha$ となる X の要素が存在するが，X の定義から，この x は $x = m\varepsilon$ (m は自然数) と書ける．いま $y = (m+1)\varepsilon$ とすると $y \in X$ であるが，$y = x + \varepsilon \geqq \alpha + \varepsilon/2 > \alpha$ となり α が X の上界であることに反する．

■単調列の収束　実数の数列 $\{a_n\}$ が上に有界である，とはそのすべての項を集めた $\boldsymbol{R}$ の部分集合が上に有界となることである．

また，数列 $\{a_n\}$ が**単調非減少**であるとは，任意の番号 $j = 1, 2, \ldots$ に対して $a_j \leqq a_{j+1}$ が成り立つことである．

定義 4.5. 一方，数列 $\{a_n\}$ が実数 a に**収束する**とは，任意の正の数 ε に対して，次を満たす番号 N が存在

2011 年 10 月 26 日 (2011 年 11 月 2 日訂正)

[*6] それはなんですか，と訊かないこと．代数学の言葉では "体をなす" ということだが，小学校以来用いている算術の法則が成り立つということである．

[*7] このことを $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の**稠密** (ちょうみつ，またはちゅうみつ) な部分集合である，という．

することである：

$$n>N \qquad ならば \qquad |a_n - a| < \varepsilon.$$

このとき a は $\{a_n\}$ の**極限値**であるといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と書く．

注意 4.6. 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，その極限値はただひとつしかない．実際，$\{a_n\}$ が a と b に収束すると仮定すると，

$$|b-a| = |b-a_n+a_n-a| \leqq |b-a_n| + |a_n-a| = |a_n-b| + |a_n-a|.$$

ここで，任意の正の数 ε に対して $n \geqq N$ なら $|a_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つような N をとることができるので，任意の ε に対して $|b-a| < \varepsilon$．したがって $b=a$.

次が成り立つ．

定理 4.7. 実数の上に有界な単調非減少数列は収束する．

注意 4.8. いま，$\{p_n\}$ を，0 から 9 までの自然数の列とする．

$$x_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{10^j} \qquad (n=1,2,\dots)$$

と定めると，$\{x_n\}$ は単調非減少数列である．一方，任意の n に対して

$$x_n \leqq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} \leqq \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

したがって $\{x_n\}$ は上に有界なので，極限をもつ．これが，無限小数

$$0.p_1p_2p_3\dots$$

が表す実数である．

系 4.9 (区間縮小法)**.** $\boldsymbol{R}$ の閉区間の列 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n=1,2,\dots)$ で $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ かつ $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ となるものに対して，I_n $(n=1,2,\dots)$ すべてに含まれる $c \in \boldsymbol{R}$ がただ一つ存在する．

> **証明:** (概略にとどめる) $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ であることから $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はそれぞれ上に有界 (下に有界) 単調非減少 (非増加) な数列である．そこで，それらの極限値を α, β とすると $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ であることから $\alpha=\beta$. その値を c とすると，これが求めるものである．

■コーシー列

定義 4.10. 数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列**であるとは，任意の正の数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである：

$$m, n \geqq N \qquad ならば \qquad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

補題 4.11. コーシー列は有界である．

証明: コーシー列 $\{a_n\}$ に対して, 番号 N を $|a_m - a_n| < 1$ $(m, n \geqq N)$ となるようにとる．すると, $n \geqq N$ ならば $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leqq 1 + |a_N|$ である．したがって, 任意の n に対して $|a_n|$ は $\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ の最大値を超えない.

補題 4.12. 収束する数列はコーシー列である.

証明: 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとする．このとき，任意の正の数 ε に対して，番号 N で $n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるようなものをとることができる．この番号 N に対して，$m, n > N$ ならば

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) - (a_n - \alpha)| \leqq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

したがって $\{a_n\}$ はコーシー列である.

定理 4.7 を用いると次が示せる：

定理 4.13. コーシー列は収束する.

■切断

定義 4.14. 実数 $\boldsymbol{R}$ の切断とは $\boldsymbol{R}$ の 2 つの部分集合 A, B の組 (A, B) で次を満たすものである：

- $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
- $A \cup B = \boldsymbol{R}$, $A \cap B = \emptyset$,
- 任意の $a \in A$, $b \in B$ に対して $a < b$.

定理 4.15 (デデキント切断)**.** 組 (A, B) を $\boldsymbol{R}$ の切断とすると，A に最大値が存在するか，B に最小値が存在する.

注意 4.16. 上限の存在，有界な単調列の収束，区間縮小法，デデキント切断の性質，コーシー列の収束は，互いに同値である．(いくつかの命題は，それに “アルキメデスの原理” を付け加える必要があるが)．すなわち，これらの命題が実数の連続性を表しているといえる.

問題

4-1 上に有界な有理数の単調非減少数列で，有理数に収束しない例を挙げなさい.

4-2 定理 4.7 を次のようにして証明しなさい：
- 上に有界な単調非減少数列 $\{a_n\}$ の項全体からなる集合 A の上界を α とする.
- 任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < a_N < \alpha$ となる番号 N が存在する.
- $n \geqq N$ のとき $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

4-3 すべての項が有理数であるようなコーシー列で，有理数に収束しないものの例をあげなさい.

4-4 定理 4.13 を，次のようにして示しなさい：
- コーシー列 $\{a_n\}$ は有界であるから，任意の番号 m に対して $A_m = \{a_n \,|\, n \geqq m\}$ は有界である.
- とくに $b_m = \inf A_m$ とすると，b_m は上に有界な単調非減少数列．その極限値 β が $\{a_n\}$ の極限値である.

4-5 有理数 $\boldsymbol{Q}$ の切断 (A, B) で A の最大値も B の最小値も存在しない例を挙げなさい.

4-6 定理 4.15 を示しなさい.

4-7 級数

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

が収束するための正の実数 α の条件を求めなさい.

4-8 広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

が収束することを示しなさい.

5 テイラーの定理

■高階の導関数　区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が微分可能であるとき，f は 2 階 (2 回) 微分可能である，といい，f' の導関数 f'' を f の **2 次導関数**という．一般に正の整数 $k \geqq 2$ に対して，k 階微分可能性，k 次導関数が次のように帰納的に定義される：

4-9 区間 I で定義された関数 f が $(k-1)$ 階微分可能であり，$(k-1)$ 次導関数が微分可能であるとき，f は k 階微分可能であるといい，$(k-1)$ 次導関数の導関数を k 次導関数とよぶ．

関数 f の k 次導関数を

$$f^{(k)}(x), \qquad \frac{d^k}{dx^k}f(x), \qquad \frac{d^k y}{dx^k}$$

などと書く．最後の表記は $y = f(x)$ のように従属変数を y と表した時に用いられる．

■C^k-級関数

事実 5.1. 区間 I で微分可能な関数は連続である．

定義 5.2 ((復習))**.**　• 区間 I で定義された関数 f が I で連続であるとき f は C^0-級であるという．

- 区間 I で定義された微分可能な関数 f の導関数が連続であるとき f は **1 階連続微分可能**または C^1-級であるという．
- 区間 I で定義された k 階微分可能な関数 f の k 次導関数が連続であるとき f は k **階連続微分可能**または C^k-級であるという．
- 任意の正の整数 k に対して C^k-級であるような関数を C^∞-級という．

■テイラーの定理

定理 5.3 (テイラーの定理)**.** 関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 階微分可能ならば，$a + h \in I$ となる h に対して

$$(5.1)\quad \begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(n)}(a)h^k + R_{n+1}(h) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j + R_{n+1}(h), \qquad R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

を満たす θ が少なくともひとつ存在する．

証明: テキスト 51 ページ．

問題

5-1 2 階微分可能な関数 f, g に対して，合成関数 $f \circ g$ の導関数，2 次導関数を f, g の導関数を用いて表しなさい．(合成関数の微分公式)．さらに，f の逆関数が存在するとき f^{-1} の 2 次導関数を f の導関数を

2011 年 11 月 2 日 (2011 年 11 月 30 日訂正)

これらの問題における「近似値」は，十進小数で確定する桁まで答えなさい．たとえば，近似値 3.14 とは無限小数で表したとき 3.14... となること，すなわち小数第 2 位は 4 と確定していることを表すことにする．

用いて表しなさい.

5-2 微分可能であるが C^1-級でない関数の例をひとつ挙げなさい.

5-3 次の場合に，式 (5.1) を具体的に書きなさい.

- $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$, $n=2$.
- $f(x)=e^x$, $a=0$, $n=2$; n は一般の自然数.
- $f(x)=e^x$, a は一般の実数, n は一般の自然数.
- $f(x)=\cos x$, $a=0$, $n=2$; $n=2k-1$ (k は正の整数).
- $f(x)=\sin x$, $a=0$, $n=3$; $n=2k$ (k は正の整数).
- $f(x)=\tan x$, $a=0$, $n=3$.
- $f(x)=\tan^{-1} x$, $a=0$, $n=4$; n は一般の自然数.
- $f(x)=\log(1+x)$, $a=0$, $n=3$; n は一般の自然数.
- $f(x)=(1+x)^\alpha$, $a=0$, $n=3$; n は一般の自然数．ただし α は実数.

5-4 $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよう.

- 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ に $a=1$, $h=0.1$, $n=2$ としてテイラーの定理 5.3 を書きなさい.
- このとき，$R_3(h)$ 以外の項の総和はいくつか.
- $R_3(h)$ の大きさを不等式で評価することによって，$\sqrt{1.1}$ の値を求めなさい.
- 同じことを $n=3$ として試みなさい.

5-5 $\sqrt{5}$ の近似値を小数第 3 位まで求めなさい．(テイラーの定理を $f(x)=\sqrt{x}$, $a=4$, $h=1$ として適用しなさい．n はいくつにすれば十分か.

5-6 正の数 ε に対して，$0<|x|<\varepsilon$ ならば

$$1-\left|\frac{\sin x}{x}\right|<0.01$$

が成り立つという．そのような ε をひとつ求めなさい.

5-7 e が無理数であることを証明しなさい.

5-8 地球 (半径 $R=6.4\times 10^6$ メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き，その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき，ゴムひもの伸びは

$$2\left(\sqrt{2R+1}-R\tan^{-1}\frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right)$$

で与えられる．この値の近似値を手計算で求めなさい.

6　テイラーの定理 2

■テイラーの定理の証明と積分型剰余項　前回挙げたテイラーの定理

定理 6.1. 関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 階微分可能ならば，$a+h \in I$ となる h に対して

$$
\begin{aligned}
(6.1)\qquad f(a+h) &= f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j+R_{n+1}(h), \qquad R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0<\theta<1
\end{aligned}
$$

を満たす θ が少なくともひとつ存在する．

は，テキスト 51 ページにあるように平均値の定理 (Rolle の定理) を用いて証明される．ここでは，仮定を少し強くした (すなわち弱い) 版を，別の方法で示す：

定理 6.2 (テイラーの定理$'$)**.** 関数 f が a を含む開区間 I で $\underline{C^{n+1}\text{-級ならば}}$，$a+h \in I$ となる h に対して

$$
\begin{aligned}
(6.2)\qquad f(a+h) &= f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j+R_{n+1}(h), \qquad R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}\bigl(a+uh\bigr)\,du
\end{aligned}
$$

が成り立つ．とくに，

$$
R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0<\theta<1
$$

を満たす θ が少なくともひとつ存在する．

証明: $x=a+h$ とおいて，微積分の基本定理と部分積分の公式を用いると，

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(a) &= \int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x (t-x)'f'(t)\,dt\\
&= \bigl[(t-x)f'(t)\bigr]_{t=a}^{t=x}-\int_a^x (t-x)f''(t)\,dt = f'(a)(x-a)-\int_a^x\left(\frac{1}{2}(t-x)^2\right)'f''(t)\,dt\\
&= f'(a)(x-a)-\left[\frac{1}{2}(t-x)^2f''(t)\right]_{t=a}^{t=x}+\int_a^x\left(\frac{1}{6}(t-x)^3\right)'f'''(t)\,dt=\dots\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k\right)+\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x(t-x)^nf^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

ここで，$t=(1-u)a+ux$ とおくと，最後の項の積分は

$$
R_{n+1}(h):=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x(t-x)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}\bigl((1-u)a+ux\bigr)\,du
$$

となり，結論の前半を得る．ここで，仮定より $f^{(n+1)}$ は，区間 $[a,a+h]$ (または $[a+h,a]$) で連続だから，その区間で最大値 M, 最小値 m をとる．したがって，$S(h):=n!R_{n+1}(h)/h^{n+1}$ とおくと

$$
S(h)=\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}\bigl((1-u)a+ux\bigr)\,dx \leqq \int_0^1(1-u)^nM\,du=\frac{M}{n+1}, \qquad S(h)\geqq\frac{m}{n+1}
$$

2011 年 11 月 9 日 (2011 年 11 月 30 日訂正)

が成り立つので，区間 $[0,1]$ で

$$F(\theta) := f^{(n+1)}(a+\theta h) - (n+1)S(h)$$

は非負の値と非正の値をともにとる．したがって，中間値の定理より $F(\theta)=0$ となる $\theta \in (0,1)$ が存在する．この θ が求めるものである．

定理 6.3 (テイラーの定理 $''$)**.** 関数 $f(x)$ は a を含む開区間で C^{n+1}-級とする．このとき，

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h) \qquad \text{とおくと} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0 \tag{6.3}$$

が成り立つ．

■収束の次数とランダウの記号

記号. 点 a に十分近い任意の x に対して $|f(x)| \leqq C|g(x)|$ となるような定数 C が存在するとき，

$$f(x) = O\bigl(g(x)\bigr) \qquad (x \to a)$$

と書く．とくに，

$$\text{極限値} \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{が存在するならば} \qquad f(x) = O\bigl(g(x)\bigr) \qquad (x \to a).$$

また，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \text{のとき} \qquad f(x) = o\bigl(g(x)\bigr) \qquad (x \to a)$$

と書く．この O, o を**ランダウの記号**という．

例 6.4. テイラーの定理 6.3 の結論は次のように表すことができる．

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + o(h^n).$$

■テイラー展開

- [**テイラー展開**] $f(x)$ は a を含む開区間で何回でも微分可能であるとする．このとき，(6.3) で $R_n(h)$ を定義したとき，ある区間の h に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(h) = 0$ が成り立つならば，

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k \tag{6.4}$$

  となる．これを $f(x)$ の $x=a$ のまわりの**テイラー展開**という．
- とくに，$a=0$ のときは**マクローリン展開**ということがある．
- 「テイラーの定理」と「テイラー展開」は区別すること．
  「テイラーの定理」は $f(a+h)$ を h の有限次の多項式で近似したときの誤差を表現する定理である．
  一方「テイラー展開」は，$f(a+h)$ を無限級数で「正確に」表すものである．
- テイラーの定理は，適当な回数微分可能な関数に対していつでも成立するが，何回でも微分可能な関数であっても，テイラー展開が可能であるとは限らない．

例 6.5.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \qquad (-1 < x \leqq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

ただし，最後の式で，

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

のことである．これを**二項係数**という．とくに，α が正の整数なら，最後の式は任意の x に対して成り立ち，高等学校で学んだ「二項定理」そのものになる．

問題

6-1 次を確かめなさい

- $\sin x = O(x)$ $(x \to 0)$.
- $e^x = 1 + x + o(x)$ $(x \to 0)$.
- α を実数とするとき $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ $(x \to 0)$.
- $\cos x - 1 = O(x^2)$ $(x \to 0)$.

6-2 テイラーの定理を用いて次の極限値を求めなさい：

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 3x - x^3}{x^5}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 2x + x^2}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

6-3 次の値が有限になるように，定数 a, b の値を定めなさい：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x - a\sin x + bx}{x^5}.$$

7　テイラーの定理 3

■テイラー展開　前回みたように以下が成り立つ．

例 7.1.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \qquad (-1 < x \leqq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

ただし，最後の式で，

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

のことである．これを**二項係数**という．とくに，α が正の整数なら，最後の式は任意の x に対して成り立ち，高等学校で学んだ「二項定理」そのものになる．

■実解析関数と C^∞-級関数

定義 7.2. 関数 f が a で**実解析的** real analytic であるとは，a を含むある開区間 I 上で

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k \tag{7.1}$$

と表されることである．ただし $b_0, b_1, \dots$ は定数である．

例 7.3. 例 7.1 にある関数は 0 で実解析的である．一般的に，これらの関数は定義域の各点で実解析的であることを示すことができる．

2011 年 11 月 16 日 (2011 年 11 月 30 日訂正)

命題 7.4. 点 a で実解析的な関数が (7.1) を満たすならば,

$$b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

である．とくに実解析的な関数は C^∞-級である．

この事実の証明 (らしきもの) は後日与える．

例 7.5. 関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

は $x = 0$ で何回でも微分可能であり,

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ．したがって f は C^∞-級である．

一方 f は 0 で実解析的ではない．実際

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

と表されているとすると，命題 7.4 から $b_0 = b_1 = b_2 = \cdots = 0$ であるが，そうすると $f(x)$ は恒等的に 0 となり，正の x に対して $f(x) > 0$ となることに矛盾する．

問題

7-1 次のようにして例 7.5 を確かめなさい．

- $f(x)$ の導関数を求めなさい．ヒント：右極限 $\lim_{h\to+0} F(h)$ と左極限 $\lim_{h\to-0} F(h)$ が存在してその値が一致するならば，$\lim_{h\to 0} F(h)$ は存在し，その値は左右極限の値に一致する．
- 任意の x の多項式 $P(x)$ に対して

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$$

  であることを確かめなさい．ヒント：$P(x)$ の次数を m とし，e^x にテイラーの定理を $a = 0$, $h = x$, $n = m$ として適用する．
- $f(x)$ の n 次導関数は

  $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

  の形に表されることを，数学的帰納法を用いて証明しなさい．ただし $P_n(y)$ は y の多項式である．
- $f^{(n)}(x)$ は 0 で連続であることを確かめなさい．

7-2 任意の実数 x に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

が成り立つことを次のようにして示しなさい：

- テイラーの定理を適用して

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + R_{k+1}(x) \qquad R_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

  を満たす θ が存在することを確かめなさい.
- 剰余項は

$$|R_{k+1}(x)| \leqq \frac{1}{(k+1)!}|x|^{k+1}e^{|x|}$$

  を満たすことを確かめなさい.
- 任意の正の数 a と番号 N をとるとき，$n \geqq N$ なる番号 n に対して

$$0 < \frac{1}{n!}a^n \leqq \frac{a^N}{N!}\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N}$$

  であることを確かめなさい.
- 上でとくに $N > a$ となる N を選ぶことにより

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}a^n = 0$$

  であることを示しなさい.
- このことを用いて，各 x ごとに

$$\lim_{k\to\infty}R_{k+1}(x) = 0$$

  となることを示しなさい.

7-3 等比級数の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^N t^{2N} = \frac{1-(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + P_N(x)$$

の両辺を $t = 0$ から $t = x$ まで積分し，$N \to \infty$ とすることにより，$|x| \leqq 1$ ならば

$$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

が成り立つことを示しなさい．$|x| > 1$ のときはどうなっているか.

同様なことを $\log(1+x)$ についても試みなさい．級数はどの範囲で収束するか.

8 級数

■級数　数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots\}$ に対して $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{8.1}$$

の形を**級数**または**無限級数**という．

定義 8.1. 級数 (8.1) に対して

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

として得られる数列 $\{S_n\}$ (部分和) が収束するとき，級数 (8.1) は**収束する**といい，その極限値 S を級数の**和**といって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

と書く．数列 $\{S_n\}$ が収束しないとき級数 (8.1) は**発散する** という．

例 8.2. 実数 r に対して，

$$1 + r + r^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

は $|r| < 1$ のとき収束，$|r| \geqq 1$ のとき発散する．

補題 8.3. 級数 $\sum a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

証明: 級数の和を S と置けば，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ で定まる数列 $\{S_n\}$ は S に収束する．この番号をひとつだけずらした数列 $T_n = S_{n+1}$ も S に収束するから，

$$a_{n+1} = T_n - S_n \to S - S = 0 \qquad (n \to \infty)$$

である．

この補題の対偶を取れば

$\{a_n\}$ が 0 に収束しないならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

■絶対収束

定義 8.4. 級数 $\sum a_n$ の各項の絶対値をとって得られる級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が収束するとき，級数 $\sum a_n$ は**絶対収束する**という．収束するが，絶対収束しない級数は**条件収束する**という．

2011 年 11 月 30 日

例 8.5. 例 8.2 の等比級数は $|r| < 1$ のとき絶対収束している．一方,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

は条件収束する．

定理 8.6. 絶対収束する級数は収束する．

証明: 級数 $\sum a_n$ に対して

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

とおくと，仮定から数列 $\{T_n\}$ はある実数 T に収束する．とくに，収束する数列はコーシー列だから $\{T_n\}$ はコーシー列．いま，任意の番号 m, n $(m > n)$ に対して

$$|S_m - S_n| = |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| \leqq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = T_m - T_n = |T_m - T_n|$$

が成り立つので，$\{S_n\}$ もコーシー列．したがって，実数の連続性により $\{S_n\}$ は収束する．

命題 8.7. 級数 $\sum a_n$ に対して，

(1) すべての番号 n に対して $|a_n| \leqq b_n$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する,

という条件を満たす級数 $\sum b_n$ が存在するならば $\sum a_n$ は絶対収束する．

証明: 級数 $\sum |a_n|$ の部分和 $\{S_n\}$ は単調非減少．さらに，$\sum b_n$ は収束するから

$$S_n \leqq \sum_{k=1}^{n} b_k \leqq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

したがって，$\{S_n\}$ は上に有界な単調非減少数列なので，実数の連続性より収束する．

■条件収束する級数

命題 8.8. すべての項が正であるような数列 $\{a_n; n = 0, 1, \dots\}$ が単調非増加，かつ 0 に収束しているとする[*8]．このとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束する．

証明: 2 つの数列 $\{p_m\}$, $\{q_m\}$ を

$$p_m := \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a_k, \qquad q_m := \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k a_k$$

により定める．すると，$\{a_n\}$ が単調非増加であるから

$$p_{m+1} = p_m - (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \leqq p_m, \qquad q_{m+1} = q_m + (a_{2m+2} - a_{2m+3}) \geqq q_m$$

なので $\{p_m\}$ は単調非増加，$\{q_m\}$ は単調非減少．一方，各 m に対して $q_m - p_m = -a_{2m+1} \leqq 0$ だから $p_m \geqq q_m$．したがって

$$p_m \geqq q_m \geqq q_{m-1} \geqq \dots \geqq q_1, \qquad q_m \leqq p_m \leqq p_{m-1} \leqq \dots \leqq p_1,$$

[*8] “$(-1)^n a_n$” という書き方で最初の項を正にしたかったので $n = 0$ から始めたが，本質的なことではない．

すなわち $\{p_m\}$ は下に有界，$\{q_m\}$ は上に有界．ゆえに実数の連続性から $\{p_m\}$, $\{q_m\}$ はそれぞれある実数 p, q に収束する．ここで

$$q - p = \left(\lim_{m\to\infty} q_m\right) - \left(\lim_{m\to\infty} q_m\right) = \lim_{m\to\infty}(q_m - p_m) = \lim_{m\to\infty}(-a_{2m+1}) = 0.$$

したがって $p = q$ となる．考えている級数は，この値に収束することを示そう．
いま，正の数 ε に対して，次のような番号 N を一つとることができる．

$$m \geqq N \text{ を満たす任意の } m \text{ に対して } |p_m - p| < \varepsilon \text{ かつ } |q_m - p| < \varepsilon.$$

そこで，

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

とおき，$N' = 2N + 1$ とすると，$n \geqq N'$ を満たす n に対して，$S_n = p_m$ または $S_n = q_m$ $(m \geqq N)$ と書ける．
したがって，N のとり方によって $|S_n - p| < \varepsilon$.

■冪級数と収束半径　定数 a と変数 x に対して

$$p_0 + p_1(x-a) + p_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-a)^n \tag{8.2}$$

の形の級数を a を中心とする**べき級数** (冪級数，巾級数，整級数）という．ここでは，簡単のため，主に 0 を中心とする冪級数

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \tag{8.3}$$

を扱う．

補題 8.9. 冪級数 (8.2) が $x = X$ に対して収束するならば，$|x - a| < |X - a|$ を満たす任意の x に対して (8.2) は絶対収束する．

証明: 簡単のため $a = 0$ の場合（級数 (8.3) の場合) を証明する．いま，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n X^n \qquad \text{が収束することから，} \qquad \lim_{n\to\infty} p_n X^n = 0.$$

収束する数列は有界だから，

$$|p_n X^n| \leqq M \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす実数 M が存在する．いま $|x| < |X|$ を満たす実数 x に対して，$\rho = |x/X|$ とおけば $|\rho| < 1$ で，

$$|p_n x^n| = |p_n X^n| \left|\frac{x}{X}\right|^n \leqq M\rho^n.$$

右辺を一般項とする級数は収束するので，$\sum |p_n x^n|$ は収束する．

定理 8.10 (収束半径の存在)**.** 与えられた冪級数 (8.2) に対して，次の何れかが成り立つ：

(1) ある負でない実数 r で，次を満たすものが存在する：
- $|x - a| < r$ を満たす x に対して級数 (8.2) は絶対収束する．
- $|x - a| > r$ を満たす x に対して級数 (8.2) は発散する．

(2) 任意の実数 x に対して (8.2) は絶対収束する．

証明: 簡単のため $a=0$ の場合（級数 (8.3) の場合) を証明する．集合

$$R = \{\rho \in \boldsymbol{R};\, x = \rho \text{ に対して級数 (8.3) は収束する } \}$$

を考える．$0 \in R$ であるから R は空集合でない.

(1) R が上に有界である場合：実数の連続性より $r = \sup R$ が存在する．とくに $0 \in R$ だから $r \geqq 0$ である．いま x が $|x| < r$ を満たしているとする．このとき，上限の性質から $|x| \leqq \rho < r$ を満たす $\rho \in R$ が存在するから，補題 8.9 から (8.3) は絶対収束する．一方 $|x| > r$ とする．もし，このような x に対して (8.3) が収束するならば，$|x| > \rho > r$ となる ρ をとれば $x = \rho$ に対して (8.3) は絶対収束する．これは $r = \sup R$ であることに矛盾する．したがって $|x| > r$ で (8.3) は発散する.

(2) R が上に有界でない場合：このとき，任意の x に対して $|x| < \rho$ となる $\rho \in R$ が存在する．したがって補題 8.9 より (8.3) は絶対収束する.

定義 8.11. 定理 8.10 の第一のケースの場合，r を冪級数 (8.2) の**収束半径**という．第二のケースの場合，(8.2) の**収束半径は無限大である**という.

例 8.12. (1) 冪級数

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

の収束半径は 1 である．$x = 1, x = -1$ のとき，この級数は発散する.

(2) 冪級数

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

の収束半径は 1 である．実際，(1) $|x| < 1$ のとき，$|(-1)^{n+1} x^n / n| \leqq |x|^n$ であるから，この冪級数は絶対収束する．したがって，収束半径は 1 以上である．(2) $x = -1$ のとき，この級数は発散する．したがって，収束半径は 1 以下である.

なお，この級数は $x = 1$ のときは収束 (条件収束) し，その和は $\log 2$ になる (ことを次回確かめる).

(3) 冪級数

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

の収束半径は 1 である．さらに $x = \pm 1$ のとき，この級数は条件収束する.

(4) 冪級数

$$x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

の収束半径は 1 である．さらに $x = \pm 1$ のとき，この級数は絶対収束する.

(5) 冪級数

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

の収束半径は 1 である．実際，$x = 1$ のときにはこの級数は発散するので，収束半径は 1 以下．一方，$|x| < 1$ のときは $|x| = 1/(1+h)$ $(h > 0)$ と書けるが，$n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} |(n+1)x^n| &= \left| \frac{n+1}{(1+h)^n} \right| = \left| \frac{n+1}{1 + nh + \frac{1}{2}n(n-1)h^2 + + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)h^3 + \cdots + h^n} \right| \\ &\leqq \frac{6(n+1)}{n(n-1)(n-2)h^3} = \frac{6}{h^3} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \leqq \frac{6}{h^3} \frac{1}{\frac{1}{2}(n-2)^2} \leqq \frac{12}{h^3} \frac{1}{(n-2)^2}. \end{aligned}$$

右辺を一般項とする級数は収束するから，$|x| < 1$ なら問題としている冪級数は絶対収束する．

(6) 冪級数

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

の収束半径は 0 である．実際，$|x| \geqq 1$ のときは $|n!x^n|$ は正の無限大に発散するので，冪級数は収束しない．一方 $0 < |x| < 1$ のとき，$|x| > \frac{1}{N}$ を満たす N を一つとると，$n \geqq N$ のとき

$$n!|x|^n \geqq \frac{1 \cdot 2 \cdots N \cdot (N+1) \cdots n}{N^n} \geqq \frac{N!}{N^N}$$

となり $n!x^n$ は 0 に収束しない．したがって，任意の $x \neq 0$ に対してこの冪級数は収束しない．

(7) 冪級数

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

の収束半径は無限大である．実際，前回みたように，任意の x に対して，左辺の級数は e^x に収束する．

問題

8-1 次は正しいか．正しければ証明を，正しくなければ反例をあげなさい．

(1) 絶対収束する級数は収束する．

(2) 収束する級数は絶対収束する．

(3) 級数 $\sum a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば級数 $\sum a_n$ は収束する．

8-2 次の級数の和を求めなさい．ただし r は実数の定数である．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 r^n$.

8-3 次の級数の収束，発散を調べなさい．ただし α は実数の定数である．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$

8-4 例 8.12 を確かめなさい．

9　冪級数

■数列の上極限，下極限　数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるとき，各番号 n に対して

$$b_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = \sup\{a_k \mid k \geqq n\} \tag{9.1}$$

は単調非増加数列である．もし，$\{b_n\}$ が下に有界なら，実数の連続性からその極限値が存在する．そうでなければ $b_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ である．

定義 9.1. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界なとき，(9.1) で与えられる数列 $\{b_n\}$ の極限値 β を数列 $\{a_n\}$ の**上極限**といって

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

とかく．とくに $\{b_n\}$ が下に有界でないときは $\beta = \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ である．また，数列 $\{a_n\}$ が上に有界でないときは $\beta = \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と定める．

例 9.2.
- 数列 $\{a_n\}$ が β に収束するならば $\limsup_{n\to\infty} a_n = \beta$ である．
- 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

とする．$\{a_n\}$ は発散するが，$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ である．

補題 9.3. $\limsup_{n\to\infty} a_n = d$ が正の無限大でなければ，$d \leqq a_n$ となる番号 n が無限個存在する．

証明: 数列 $\{b_n\}$ を (9.1) のようにとれば，b_n は d に単調非増加で収束するのだから，$d \leqq b_n$ が成り立つ．ここで b_n の定義より任意の正の数 ε に対して $b_n \leqq a_m < b_n + \varepsilon$ となる a_m $(m \geqq n)$ が存在する．したがって $d \leqq b_n \leqq a_m$．そこで，この b_m に対して同じ議論を行えば，さらに m より大きい番号 m' で $d \leqq a_{m'}$ となるものをみつけることができる．この操作は無限に続けることができるので結論をえる．

補題 9.4. (1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
(2) 数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

■冪級数の収束半径　冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9.2}$$

の収束半径 r を求める方法を与えよう．

定理 9.5.
- 級数 (9.2) の収束半径 r は

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

で与えられる．ここで，右辺の上極限が 0, $+\infty$ の場合はそれぞれ $r = +\infty$, $r = 0$ とする．(Cauchy の公式)

2011 年 12 月 7 日 (2011 年 12 月 14 日訂正)

- もし，
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$
が存在するならば，それが (9.2) の収束半径である．(d'Alembert の判定法)

証明: 第一の公式：まず $d := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が正の値であるとき，$r = 1/d$ が収束半径であることを示す：上極限の定義から，
$$b_n = \sup\{\sqrt[k]{a_k}\,;\,k \geqq n\}$$
は単調非増加で，d に収束する．したがって，任意の正の数 ε に対して，次を満たす番号 N が存在する：

(9.3) $$n \geqq N \text{ ならば } d \leqq b_n \leqq d+\varepsilon.$$

- 9.3 の N に対して，$n \geqq N$ ならば $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq d+\varepsilon$ が成り立つ (b_n の定義式よりすぐわかる)．いま $|x| < r = 1/d$ を満たす x に対して，$|x| < 1/(d+\varepsilon)$ となる正の数 ε をとり，それに対して 9.3 のように N をとれば
$$|a_nx^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|}|x|\right)^n \leqq ((d+\varepsilon)|x|)^n = \rho^n \qquad (\rho = (d+\varepsilon)|x| < 1)$$
となる．ここで $0 < \rho < 1$ だから $\sum \rho^n$ は収束する．したがって前回の命題 8.7 よりあたえらえた級数は絶対収束する．
- 補題 9.3 より $\sqrt[n]{|a_n|} \geqq d$ となる番号 n は無限個存在する．そのような n と $|x| > r = 1/d$ となるような x に対して，
$$|a_nx^n| = (\sqrt[n]{|a_n|}|x|)^n > 1.$$
したがって $|x| > r$ のときは，数列 $|a_nx^n|$ は 0 に収束しない．したがって与えられた級数は発散する．

$r = 0, +\infty$ の場合は省略する (演習問題).
第二の条件も，同様に "等比級数" と比較することで示すことができる (演習問題).

例 9.6.
- 前回のテイラー級数の具体例の収束半径は容易にわかる．
- n の多項式 $p(n)$ に対して，級数 $\sum p(n)x^n$ の収束半径は 1 である．
- $\sum a_nx^n$ の収束半径が r ならば $\sum na_nx^n$ の収束半径も r である．

■冪級数の項別微積分　冪級数 (9.2) の収束半径が $r\ (>0)$ であるとする．このとき，区間 $(-r, r)$ で定義された関数

(9.4) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad (-r < x < r)$$

が定義される[*9].

以下，関数 $f(x)$ の性質を列挙する．詳細は次回に扱う：

定理 9.7. (9.4) で与えられた関数は区間 $(-r, r)$ で連続である．

定理 9.8 (項別積分)**.** 関数 (9.4) に対して
$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_{n-1}x^n \qquad (-r < x < r)$$
が成り立つ．とくに右辺の冪級数の収束半径も r である．

[*9] 前回も例に挙げたように $x = r$ や $x = -r$ で定義されるかどうかは場合による．

定理 9.9 (項別微分)**.** 関数 (9.4) は $(-r,r)$ で微分可能で,

$$\frac{d}{dx}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \qquad (-r<x<r) \tag{9.5}$$

が成り立つ．とくに右辺の冪級数の収束半径も r である．

系 9.10. 収束半径 r が正であるような冪級数により式 (9.4) で与えられる関数は開区間 $(-r,r)$ で C^{∞}-級で,

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

である．

証明: 項別微分定理から，f は微分可能．さらに f' も収束半径 r の冪級数で書かれているので，とくに連続．したがって f は C^1-級．以下，帰納的に f は任意の n に対して C^n-級となることがわかる．
さらに (9.5) より $f'(0)=a_1$ となる．(9.5) を微分して $f''(0)=2a_2\ \ldots$ と帰納的に a_n を求めることができる．

定理 9.11 (Abel の連続定理)**.** 冪級数 $\sum a_nx^n$ の収束半径が r $(0<r<+\infty)$，かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$$

が収束するならば,

$$\lim_{x\to r-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$$

が成り立つ．

注意 9.12. 定理 9.11 は自明ではない．実際，左辺の極限が存在しても，右辺が収束するとは限らない．この講義では証明は与えず，事実として認めてもらうことにする．

■例題　級数

$$1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n \tag{9.6}$$

を考える．

- 定理 9.5 からこの級数の収束半径は 1 である．
- この級数が表す関数は

  $$f(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n \qquad (-1<x<1)$$

  である．これは，等比級数の和の公式から得られる．
- 項別積分定理 9.8 から

  $$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\frac{dx}{1+t}=\log x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \qquad (-1<x<1) \tag{9.7}$$

  がわかる．

- 式 (9.7) の右辺の級数は $x = -1$ のとき

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)$$

となり，発散する．

- 一方，$x = 1$ のとき，式 (9.7) の右辺の級数は

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

は命題 8.8 から収束する．

- したがって，Abel の定理より

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots &= \lim_{x \to 1-0}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) = \lim_{x \to 1-0} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \\ &= \lim_{x \to 1-0} \log(1+x) = \log 2.\end{aligned}$$

以上より，公式

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

が得られた[*10]．

問題

9-1
- 等式 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を次を用いて示しなさい：

  任意の正の数 ε に対して $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\varepsilon)^n}{n} = +\infty$ が成り立つ（二項定理を用いれば良い）．したがって，十分大きい n に対して $n < (1+\varepsilon)^n$.

- 数列 $\{a_n\}$ に対して $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ であることを次のようにして示しなさい：

  前の問いより，任意の正の数 ε に対して，“$n \geqq N$ ならば $1 \leqq \sqrt[n]{n} \leqq 1 + \varepsilon$” が成り立つような番号が存在する．この N に対して $n \geqq N$ ならば

9-2 上の問題 1 (a) の極限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を次のようにして求めた：

$a_n = \sqrt[n]{n}$ に対して $b_n = \log a_n$ とおけば，$b_n = \frac{\log n}{n}$ である．ここで，x の関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ を考えると，$x \to +\infty$ のときこれは ∞/∞ の形の不定形であり，

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{だから} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

となるので $\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$.

この議論を正当化しなさい．

[*10] もちろん，この公式は，等比級数の (有限) 和の公式を用いて示すことができる (以前示した)．またテイラーの定理の剰余項 (積分を用いたもの) の評価をすることによっても得られる．

9-3 収束半径が $r > 0$ であるようなべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が定める関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-r < x < r)$$

を考える．

(1) $0 < s < r$ なる実数 s をひとつとって固定しておく．このとき，任意の ε に対してある番号 N で

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad |x| \leqq s \text{ をみたす任意の } x \text{ に対して} \quad \left| f(x) - \sum_{n=0}^{n} a_n x^n \right| < \varepsilon$$

をみたすものが存在することを示しなさい．

(2) 上の結果を用いて f が $(-r, r)$ で連続であることを示しなさい．

(3) さらに，べき級数の項別積分の公式を示しなさい．

9-4 自然数でない実数 α をひとつとる．

(1) 負でない整数 n に対して二項係数

$$\binom{\alpha}{n} = \left({}_{\alpha}\mathrm{C}_n\right) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

と定める．このとき，べき級数

$$(**) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

の収束半径は 1 である．

(2) 区間 $-1 < x < 1$ で級数 $(**)$ が表す関数は $(1+x)^{\alpha}$ である．

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$ を $x = 0$ のまわりでべき級数に展開しなさい．

(4) $0 < k < 1$ をみたす実数 k に対して

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx$$

であたえられる k の関数 $E(k)$ を $k = 0$ のまわりでべき級数に展開しなさい．

9-5 (1) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} x^{3n+2}$ の収束半径は 1 である．

(2) (a) の級数が表す関数を $f(x)$ $(-1 < x < 1)$ とするとき $f'(x)$ を求めなさい．

(3) アーベルの定理を用いて級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ の和を求めなさい．

9-6 上の問題の類題を作りなさい．

9-7 つぎの関数を $x = 0$ のまわりでテイラー級数に展開しなさい：

$$f(x) = \frac{1}{1 - 4x + 5x^2 - 4x^3 + 4x^4}.$$

9-8 べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ が定める関数を $f(x)$ とおく．

(1) このべき級数の収束半径 r を求めなさい．

(2) $f(x)/x$ は $-r < x < r$ で連続な関数である.

(3) 項別積分により

$$\int_0^X \frac{f(x)}{x}\,dx$$

のべき級数展開を求めなさい.

(4) $f(x)$ の具体的表示を求めなさい.

9-9 (1) 双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ を $x = 0$ を中心とするテイラー級数に展開しなさい.（収束半径も求めること）.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$ の和を求めなさい.

10　関数列の一様収束

■関数列の収束　各番号 n に対して数直線上の区間 I 上で定義された関数 f_n が与えられているとき，$\{f_n\}$ を区間 I 上の**関数列**という．このとき，各 $x \in I$ に対して $\{f_n(x)\}$ はひとつの数列を与えている．

定義 10.1. 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ が I で定義された関数 f に**収束する** または **各点収束する**とは，

$$\text{各 } x \in I \text{ に対して} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

が成り立つことである．

例 10.2. 正の整数 n に対して $[0,1]$ 上で $f_n(x) = x^n$ とすると $[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}$ が得られる．一方

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

とすると，$[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}$ は f に各点収束する．

この例のように，連続関数からなる関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束しているからといって f が連続になるとは限らない．

例 10.3. 2 以上の自然数 n に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leqq x < \frac{1}{n}\right) \\ -n^2 x + 2n & \left(\frac{1}{n} \leqq x < \frac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{2}{n} \leqq x \leqq 1\right) \end{cases}$$

とおくと f_n は $[0,1]$ で連続である．このとき，関数列 $\{f_n\}$ は $f(x) = 0$ で定まる定数関数 f に収束する．

実際，$x = 0$ のとき $f_n(0) = 0$ だから $\lim f_n(0) = 0$．一方 $0 < x \leqq 1$ のときは，$x \geqq 2/N$ となる番号 N に対して $n \geqq N$ ならば $f_n(x) = 0$ である．すなわち，数列 $\{f_n(x)\}$ は $n \geqq N$ なる番号に対して恒等的に 0 であるから，$\lim f_n(x) = 0$.

さて，各番号 $n \geqq 2$ に対して f_n は $[0,1]$ で連続であるから積分可能で，

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$$

である．(真面目に積分しなくても三角形の面積の公式からすぐにわかる．) 一方

$$\int_0^1 0\,dx = 0$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$$

である．すなわち，積分と極限の順序を交換することはできない．

2011 年 12 月 14 日

■一様収束　例 10.2 や 10.3 のような現象が起きるのは "f_n が f に収束する速さ" が x によって異なることにある．そこでもう少し強い収束の概念を導入する．

定義 10.4. 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ が I 上の関数に**一様収束**するとは，任意の正の数 ε に対して，次を満たす番号 N が存在することである：

$n \geqq N$ を満たすすべての番号 n と任意の $x \in I$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

注意 10.5. すべての $x \in I$ に対して $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ が成り立つということは, 区間 I 上での $|f_n(x)-f(x)|$ の上限が ε を超えないことと同値である．すなわち,

区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束するための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in I\} = 0$$

となることである．

この左辺の sup を

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

と書くこともある．

補題 10.6. 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に一様収束するならば，$\{f_n\}$ は f に各点収束する．

証明: 任意の $x \in I$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

である．

例 10.7. 正の整数 n に対して $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$ により，区間 $I = [0, \pi]$ 上の関数列を定義する．すると，この関数列は $f(x) = 0$ となる定数関数 f に一様収束する．実際

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n}\sin nx\right| \leqq \frac{1}{n}$$

だから

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{n} \to 0.$$

ところで，各 f_n は微分可能で $f_n'(x) = \cos nx$ である．一方 $f'(x) = 0$ であるから，関数列 $\{f_n'\}$ は f' に各点収束しない (したがって一様収束もしない).

定理 10.8. 区間 I 上の連続関数からなる関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に一様収束するならば，f は I で連続である．

証明: 関数 f が点 $a \in I$ で連続であるとは,

任意の正の数 ε に対して，次を満たす正の数 δ が存在することである：$|x - a| < \delta$ を満たすすべての $x \in I$ に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

このことを示したい.

正の数 ε を与えたとき，(一様収束の定義の ε を $\varepsilon/3$ と置き換えて)，ある番号 N で

(∗)　　$n \geqq N$ を満たす各番号 n と任意の $y \in I$ に対して $|f_n(y) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ となる

ものが存在する．そのような N をとり $n \geqq N$ を満たす番号 n をひとつ固定する．すると f_n は $a \in I$ で連続だから，正の数 δ で (連続性の定義の ε を $\varepsilon/3$ と置き換えて)

$$(**) \qquad |x-a| < \delta \text{ を満たす任意の } x \in I \text{ に対して } |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ となる}$$

となるものが存在する．

このような δ をとると，$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して (*)，(**) から

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\
&\leqq |f(x) - f_n(x)| - |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

したがって f は $a \in I$ で連続である．点 a のとり方は任意だったから，f は I で連続である．

定理 10.9. 閉区間 $I = [a,b]$ で定義された連続関数の列 $\{f_n\}$ が f に収束するならば f は I で積分可能で，

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．

証明: 閉区間で連続な関数はその区間で積分可能だから，f_n は $[a,b]$ で積分可能．さらに定理 10.8 から f は連続なので $[a,b]$ で積分可能である．ここで，$\sup_{x\in I}\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|$ は x によらない定数であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b \bigl(f_n(x)f(x)\bigr)\,dx\right| \leqq \int_a^b \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|\,dx \\
&\leqq \int_a^b \left\{\sup_{x\in I}\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|\right\} dx = \sup_{x\in I}\bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| \times (b-a) \to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

となるので，結論が得られた．

■冪級数の一様収束性　ここでは簡単のため 0 を中心とする冪級数

$$(10.1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

を考える．以下，級数 (10.1) の収束半径は $r \in (0, +\infty]$ とする[*11]．このとき，

$$(10.2) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-r < x < r)$$

は区間 $(-r, r)$ で定義された関数である．いま，番号 n に対して，冪級数 (10.1) の最初の $n+1$ 項の和

$$(10.3) \qquad f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

は (実は $\boldsymbol{R}$ 全体で定義されるが) $(-r, r)$ で定義された連続関数である．このようにして得られた関数列 $\{f_n\}$ は，区間 $(-r, r)$ で (10.2) で定義された関数 f に各点収束する[*12]．

定理 10.10. 収束半径 r が正である冪級数 (10.1) は，$(-r, r)$ に含まれる任意の閉区間上で一様収束する．

[*11] 厳密なことを言えば，区間 $(0, +\infty]$ というものは存在しないが，収束半径が $+\infty$ の場合も考える，という意味でこのような記法を用いた．とくに $r = +\infty$ のとき，“正の数 $R < r$” とは任意の正の数 R のことである．

[*12] 冪級数によっては $x = r$ や $x = -r$ で収束するものもあるが，以下の議論は，そのような “端点” では有効ではない．

注意 10.11. 定理 10.10 の言葉の意味は以下の通り：$I = [a,b] \subset (-r,r)$ とすると，(10.3) は区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ を与えていると見なせる．このとき，関数列 $\{f_n\}$ は (10.2) の f に I 上で一様収束する．

区間 J 上の関数列 $\{f_n\}$ が，J に含まれる任意の閉区間 I で一様収束するとき，f は J で**広義一様収束する**ということがある．

定理 10.10 の証明：$I = [a,b] \subset (-r,r)$ を閉区間とする．このとき

$$R := \max\{|a|,|b|\}, \qquad R < T < r$$

となる正の実数 R, T をとることができる．とくに

$$(\star) \qquad \rho := \frac{R}{T} \in (0,1)$$

である．

冪級数 (10.1) は $x = T$ で収束するから，数列 $\{|a_nT^n|\}$ は 0 に収束する．したがって $\{|a_nT^n|\}$ は有界．とくに

$$(\star\star) \qquad |a_nT^n| \leqq M \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

を満たす正の数 M が存在する．

いま，$x \in [a,b]$ を任意にとると，$|x| \leqq R$ であるから，$(\star)$ と $(\star\star)$ を用いれば

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_nx^n\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n||x|^n \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n||R|^n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_nT^n| \left|\frac{R}{T}\right|^n \\ &\leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} M\rho^n = M\rho^{n+1}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = M\rho^{n+1}\frac{1}{1-\rho}.\end{aligned}$$

右辺は x によらない数だから，$(\star)$ に再び注意すれば

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leqq = M\rho^{n+1}\frac{1}{1-\rho} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

したがって，区間 $[a,b]$ 上で $\{f_n\}$ は f に一様収束する．

系 10.12. 冪級数 (10.1) の収束半径 r が $r > 0$ を満たすならば，それが定める関数 f は区間 $(-r,r)$ で連続である．

証明: 点 $p \in (-r,r)$ に対して，p を含む閉区間 $[a,b] \subset (-r,r)$ を取ることができる．冪級数の部分和は $[a,b]$ で f に一様収束するから，定理 10.8 より f は p で連続である．

系 10.13. 冪級数 (10.1) の収束半径 r が $r > 0$ を満たすとき，任意の $x \in (-r,r)$ に対して

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}a_nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_{n+1}x^n \qquad \left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)$$

が成り立つ．とくに，右辺の級数の収束半径は r である．

証明: まず $x = 0$ のときは結論の式の両辺は 0 で結論が成立する．

次に $x > 0$ の場合を考える．定理 10.10 から閉区間 $[0,x] \subset (-r,r)$ 上で (10.3) で定義される関数列 $\{f_n\}$ は $[0,x]$ で f に一様収束する．したがって, 定理 10.9 から (有限個の関数の和に対する積分の線形性を用いれば)

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} a_kt^k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\int_0^x \left(a_kt^k\right)\,dt\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}a_kx^{k+1}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}\end{aligned}$$

で結論の式が得られた．

同様に，$x<0$ の場合も区間 $[x,0]$ を考えることにより結論が得られる．

最後に

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

であることから，

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n}}$$

が示せる (演習問題) ので，結論の式の右辺の収束半径は，もとの級数の収束半径に一致する．

系 10.14. 冪級数 (10.1) の収束半径 r が $r>0$ を満たすとき，その和が定める関数 f ((10.2) で定まる) は $(-r,r)$ で微分可能で，

$$\frac{d}{dx}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \qquad \left(f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)$$

が成り立つ．とくに，右辺の級数の収束半径は r である．

証明: まず，

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

が成り立つので，右辺の級数の収束半径は r である．そこで，

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \qquad (-r<x<r)$$

と定めると，系 10.13 から

$$\int_0^x g(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=f(x)-a_0.$$

したがって，微積分の基本定理から $f'(x)=g(x)$ となる．

系 10.15. 冪級数 (10.1) の収束半径 r が $r>0$ を満たすとき，その和が定める関数 f ((10.2) で定まる) は $(-r,r)$ で C^∞-級で，

$$a_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}f(0)$$

が成り立つ．

証明: 系 10.14 より f' は収束半径 r の冪級数で表されているので，それに再び系 10.14 を適用すれば f が 2 回微分可能であることがわかる．以下，帰納的に系 10.14 を適用すれば f が何回でも微分可能であることがわかる．

さらに系 10.14 を繰り返し適用すると，$f^{(n)}(x)$ の冪級数展開の初項の係数は $n!a_n$ となることがわかるので，結論が得られる．

以上の議論は区間 $(-r,r)$ の端点については何も言っていない．これについては次が有用である (証明は面倒くさい)：

定理 10.16 (Abel の定理)**.** 冪級数 (10.1) の収束半径が $r\in(0,+\infty)$，かつ $x=r$ で (10.1) が収束するならば，

$$\lim_{x\to r-0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n \qquad \left(f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)$$

が成り立つ．

11　テイラーの定理と極値問題

■1 変数関数の極値問題

定義 11.1. 一変数関数 f が a で**最大値** (**最小値**) をとるとは，定義域内のすべての x に対して $f(x) \leqq f(a)$ ($f(x) \geqq f(a)$) が成り立つことである．

定義 11.2. 一変数関数 f が a で**極大値** (**極小値**) をとるとは，次を満たす正の実数 ε が存在することである：f の定義域に含まれ，かつ $|x-a| < \varepsilon$ を満たす任意の x に対して，$f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$) が成り立つことである．

定義 11.2 は "a に十分近い x に対して $f(x) < f(a)$ ($f(x) > f(a)$) が成り立つ" ということを定量的に述べたものである．

■極値の判定条件

定理 11.3. (簡単のため) 関数 f は $x=a$ を含む開区間で何回でも微分可能であるとする．
A. $f(x)$ が $x=a$ で極値（極大値または極小値）をとるならば，$f'(a)=0$ である．
B. (**A** の対偶) $f'(a) \neq 0$ ならば，$f(x)$ は $x=a$ で極大値も極小値もとらない．
C. $f'(a)=0$, $f''(a)>0$ ($f''(a)<0$) が成り立つならば $f(x)$ は $x=a$ で極小値（極大値）をとる．

■定理 11.3 の B が成り立つ理由（いい加減バージョン）

$m=f'(a)$ とおいて，$m>0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理より ($m=f'(a)$ に注意して）

$$(*) \qquad f(a+h)=f(a)+mh+R_2(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_2(h)}{h}=0$$

となる．この $R_2(h)$ は h が十分小さければ mh よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h)-f(a) \fallingdotseq mh \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

である[*13]が，$m>0$ だから，この式の右辺は $h>0$ のとき正，$h<0$ のとき負になる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h)>f(a) \qquad \bigl(h>0 \text{ のとき}\bigr); \qquad f(a+h)<f(a) \qquad \bigl(h<0 \text{ のとき}\bigr)$$

となるので，どんな小さい ε をとっても "$0<|h|<\varepsilon$ ならば $f(a+h)>f(a)$", "$0<|h|<\varepsilon$ ならば $f(a+h)<f(a)$" のいずれも成り立たせることはできない．すなわち f は $x=a$ で極値をとらない．

$m<0$ の場合も同様である．

■定理 11.3 の B が成り立つ理由（ちょっと正確バージョン）

2012 年 1 月 11 日 (2012 年 1 月 18 日訂正)

[*13] "$\fallingdotseq$" は「およそ等しい」

$m>0$ のとき，$(*)$ までは同様．いま $|R_2(h)/(mh)|$ は h を 0 に近づけると 0 に近づくのだから，正の数 δ をうまくとれば

$$(**)\qquad |h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad \left|\frac{R_2(h)}{mh}\right|<\frac{1}{2}$$

が成り立つようにできる．$m>0$ だから $(**)$ は

$$|h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad -\frac{1}{2}m|h|<R_2(h)<\frac{1}{2}m|h|$$

と書き換えられる．したがって $(*)$ より

$$|h|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad mh-\frac{1}{2}m|h|<f(a+h)-f(a)<mh+\frac{1}{2}m|h|$$

となる．ここで，$0<h<\delta$ ならば，$|h|=h$ だから，

$$f(a+h)-f(a)>mh-\frac{1}{2}mh=\frac{1}{2}mh>0,$$

$0>h>-\delta$ なら $|h|=-h$ だから

$$f(a+h)-f(a)<mh+\frac{1}{2}m|h|=\frac{1}{2}mh<0$$

となり，どんな小さい ε をとっても $|h|<\varepsilon$ の範囲で $f(a+h)-f(a)$ は符号を変える．したがって（いいかげんバージョンと同じ）．

■定理 11.3 の C が成り立つ理由（いい加減バージョン）

$m=f''(a)$ とおいて，$m>0$ の場合を考える．このとき，テイラーの定理より $(f'(a)=0, f''(a)=m$ に注意して）

$$f(a+h)=f(a)+\frac{1}{2}mh^2+R_3(h) \qquad \text{とおけば} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_3(h)}{h^2}=0$$

となる．この $R_3(h)$ は h が十分小さければ $\frac{1}{2}mh^2$ よりもずっと小さいので，十分小さい h の範囲では無視してよい．したがって

$$f(a+h)-f(a)\doteqdot\frac{1}{2}mh^2 \qquad (h \text{ が十分 } 0 \text{ に近いとき})$$

であるが，$m>0$ だから，この式の右辺は $h\neq 0$ であるかぎり常に正の値をとる．したがって，h が十分小さいときは

$$f(a+h)>f(a)$$

となるので，$f(x)$ は $x=a$ で極小値をとる．$m<0$ の場合も同様である．

問題

11-1 関数 $f(x)=x^4$ が $x=0$ で最小値をとることを証明しなさい．

11-2 関数 f が何回でも微分可能であるとき，f の $x=a$ における（1 次，2 次 ...）微分係数を用いて f が $x=a$ で最大値・最小値をとるかどうかを判定するような必要十分条件はあり得ない．そのことの理由を述べなさい．

11-3 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で極小値をとる（実は最小値をとる）ことを示しなさい.

11-4 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ のグラフを描き，どこで極値 (極大値・極小値) をとるかを指摘しなさい．それらの点で f は最大値・最小値をとるか.

11-5 定理 11.3 の **A** (**B**) の逆は成立するか.

11-6 定理 11.3 の **C** の逆は成立するか.

11-7 関数 $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2$ (p, q は定数) の極値を調べなさい．（ヒント：3 次方程式 $f'(x) = 0$ が一つの実数解しか持たない場合，3 つの異なる実数解を持つ場合，1 組の重根とそれ以外の一つの解を持つ場合，3 重根を持つ場合に分けて考える）

11-8 定理 11.3 の **B** が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」を完成させなさい.

11-9 定理 11.3 の **C** が成り立つ理由の「ちょっと正確バージョン」をつくりなさい.

11-10 定理 11.3 の状況で $f'(a) = 0,\ f''(a) = 0$ のときはなにが起きているか.

12　多変数関数の極値問題

■2 変数関数の極大値・極小値

- 以下の記号は前期に用いた：

$$\boldsymbol{R} = \text{（実数全体の集合）}$$
$$\boldsymbol{R}^2 = \{(x,y)\,|\,x,\ y \text{ は実数 }\} = \{(x,y)\,|\,x,y \in \boldsymbol{R}\} = \text{「座標平面」}.$$

- 点 $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2$ と正の数 ε に対して

$$U_\varepsilon(a,b) = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2\,|\,(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}$$

を (a,b) の ε-近傍という.
- $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 A が**開集合**であるとは, 任意の $(a,b) \in A$ に対してうまく正の数 ε を選べば $U_\varepsilon(a,b) \subset A$ とできることである.
- $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 A が**連結**であるとは, 任意の $P,Q \in A$ を A 内の連続曲線で結ぶことができることである.
- $\boldsymbol{R}^2$ の連結な開集合のことを **領域** という.
- $\boldsymbol{R}^2$ の領域 A で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b) \in A$ で**極大値** (**極小値**) をとるとは, うまく正の数 ε をとれば, 任意の $(x,y) \in U_\varepsilon(a,b)$ $((x,y) \neq (a,b))$ に対して $f(x,y) < f(a,b)$ $(f(x,y) > f(a,b))$ が成り立つことである.

■2 変数関数のテイラーの定理

定理 12.1 (1 変数関数のテイラーの定理（復習）). 1 変数関数 F が a を含む開区間で C^∞-級であるとする. このとき,

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \frac{1}{2}F''(a)h^2 + R_3(h), \qquad R_3(h) = \frac{1}{3!}F^{(3)}(a+\theta h)h^3, \quad 0 < \theta < 1$$

を満たす θ が存在する.

定理 12.2 (2 変数関数のテイラーの定理). 2 変数関数 f が $(x,y) = (a,b)$ を含む領域で C^∞-級であるとする. このとき

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) + R_3(h,k) \tag{12.1}$$

とかくと

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_3(h,k)}{h^2+k^2} = 0$$

が成り立つ.

2012 年 1 月 18 日 (2012 年 1 月 25 日訂正)

証明: あたえられた (a,b) および (h,k) に対して，一変数関数 $F(t)=f(a+th,b+tk)$ を考えると，F は $[0,1]$ で C^∞-級であるから，F にテイラーの定理 12.1 を適用すると，

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(0)+\frac{1}{3!}F'''(\theta) \qquad (0<\theta=\theta(h,k)<1)$$

となるような θ が存在する．ここで，合成関数の微分公式 (Chain rule) を用いれば,

$$\begin{aligned}
F(0)&=f(a+0h,b+0k)=f(a,b)\\
F'(0)&=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\\
F''(0)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\\
F'''(\theta)&=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3
\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の式の右辺の偏微分は $(a+\theta h,b+\theta k)$ での値である．とくに f は C^∞-級なので

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\theta h,b+\theta k)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b),\ldots$$

が成り立つので,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{F'''(\theta)}{h^2+k^2}=0$$

を得る.

注意 12.3. テイラーの公式 (12.1) の右辺のうち，h, k の 1 次の項は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=df(a,b)\boldsymbol{h} \qquad \left(\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\right)$$

と表される．ただし $df(a,b)$ は (a,b) における f の**全微分**である．

さらに h, k の 2 次の項の 2 倍は,

$$(h,k)\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\,f(a,b)\boldsymbol{h}, \qquad \mathrm{Hess}\,f(a,b)=\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$$

と表される．ただし ${}^t\boldsymbol{h}$ は列ベクトル $\boldsymbol{h}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．ここで，偏微分の順序交換定理から，$\mathrm{Hess}\,f(a,b)$ は 2 次の**対称行列**となる．この行列を f の (a,b) における**ヘッセ行列** Hessian matrix とよぶ.

■2 変数関数の極値判定

定理 12.4. $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b)\in D$ で極値をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

が成り立つ.

証明:

定理 12.5. $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b)\in D$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

をみたしているとする．このとき，

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2, \qquad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$

とおくと，

- $\Delta > 0$ かつ $A > 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極小値をとる．
- $\Delta > 0$ かつ $A < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極大値をとる．
- $\Delta < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極値をとらない．（注：極値をとるかどうか判定できない，ではなく極値をとらないことが結論できる）

（注：$\Delta = 0$ の場合は（2 次偏微分係数がすべて 0 とならなくても）ここまでの情報では極値の判定ができない）

これを示すために次の補題を用いる：

補題 12.6. p と q の斉次 2 次式

$$(**) \qquad \varphi := Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 \qquad (A,\ B,\ C \text{ は定数})$$

に対して

- 任意の $(p,q) \neq (0,0)$ に対して $\varphi > 0$ となるための必要十分条件は $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- 任意の $(p,q) \neq (0,0)$ に対して $\varphi < 0$ となるための必要十分条件は $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- φ が正の値も負の値もいずれもとるための必要十分条件は $AC - B^2 < 0$ となることである．
- それ以外の場合は，φ は符号を変えないが，$\varphi = 0$ となるような $(p,q) \neq (0,0)$ が存在する

■3 変数以上の場合　一般に $\boldsymbol{R}^n$ の領域 D で定義された C^∞ 関数 f をベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ に実数 $f(\boldsymbol{x})$ を対応させているとみなしておく．この時，$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in D$ におけるテイラーの定理は，

$$(12.2) \qquad f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + {}^t\boldsymbol{h}\,\mathrm{Hess}\, f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + R_3(\boldsymbol{h}), \qquad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{R_3(\boldsymbol{h})}{|\boldsymbol{h}|^2} = 0.$$

とかける．ただし

$$df(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right), \qquad \mathrm{Hess}\, f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

このとき，

事実 12.7.
- f が $\boldsymbol{a}$ で極値をとるならば $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ である．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\, f(\boldsymbol{a})$ の固有値がすべて正 (負) ならば f は $\boldsymbol{a}$ で極小値（極大値）をとる．
- $df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\mathrm{Hess}\, f(\boldsymbol{a})$ の固有値が符号を変えるならば f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない．

この事実の後半の 2 つは，次に述べる 2 次形式の性質からわかる．

■2 **次形式**　実数の変数 $(x_1,\dots,x_n)$ の斉次 2 次式を (n 変数の) **2 次形式**という:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

の形で表される．とくに $x_ix_j=x_jx_i$ であるから，a_{ij} と a_{ji} が等しくなるように係数を按分することができる．すなわち 2 次形式の一般形は

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\qquad (a_{ij}=a_{ji}).$$

これを，列ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\dots,x_n)$ と対称行列 $A=(a_{ij})$ を用いて

(12.3)
$$\varphi(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}\qquad (A \text{ は実対称行列})$$

と表すことができる．行列 A を 2 次形式 φ の**表現行列**という．

事実 12.8 (線形代数の復習)**.**　• 実対称行列の固有値は実数である．

- 実対称行列 A は直交行列により対角化できる．

すなわち，実対称行列 A に対して，直交行列 P が存在して

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mu_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mu_n\end{pmatrix}\qquad ({}^tPP=E)$$

とできる．ただし $\mu_1,\dots,\mu_n$ は A の固有値である．

このことを用い，変数変換

$${}^tP\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}={}^t(X_1,\dots,X_n)$$

を行うと，2 次形式 (12.3) は

$$\varphi=\mu_1X_1^2+\cdots+\mu_nX_N^2$$

と書くことができる．とくに

- $\mu_1,\dots,\mu_n$ がすべて正ならば，$\varphi(\boldsymbol{x})>0$ が任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成立する．このとき 2 次形式 (12.3) は**正値**または**正定値**という．
- $\mu_1,\dots,\mu_n$ がすべて負ならば，$\varphi(\boldsymbol{x})<0$ が任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成立する．このとき 2 次形式 (12.3) は**負値**または**負定値**という．
- $\mu_1,\dots,\mu_n$ の中に正のものも負のものも含まれているならば，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は正，負いずれの値もとる．

問題

12-1 次の集合は $\boldsymbol{R}^2$ の領域か.

$$\boldsymbol{R}^2,\quad \{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,y>0\},\quad \{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,y\geqq 0\},$$
$$\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+y^2\neq 1\},\quad \{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+y^2<1\}$$

12-2 補題 12.6 を 2 次式の平方完成を用いて示しなさい.

12-3 $f(x,y)=x^3-xy+y^3$ に対して

- $f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ となる (x,y) をすべて求めなさい.（ここで虚数解は考えない. なぜか）
- 上で求めた (x,y) に対して定理 B を適用することにより, 次のことを確かめなさい :「$f(x,y)$ は $(x,y)=(1/3,1/3)$ で極小値 $-1/27$ をとり, それ以外の点では極値をとらない.」

12-4 テキスト 74 ページ問題 8

12-5 $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された**調和関数** f の 2 次偏導関数 f_{xx} が D 上で 0 にならなければ f は D 上で極値をとらない.

13　微分方程式

■一般論　ここでは，未知関数 $\boldsymbol{x} = \bigl(x_1(t), \dots, x_n(t)\bigr)$ に関する常微分方程式の初期値問題

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\bigl(t, \boldsymbol{x}(t)\bigr), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right) \tag{13.1}$$

を考える．ここで $\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{R}^n$ に値をもつ $(n+1)$-変数の関数である．成分を用いて $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$ と書けば，微分方程式 (13.1) は

$$\dot{x}_j(t) = f_j\bigl(t; x_1(t), \dots, x)_n(t)\bigr), \qquad x_j(t_0) = a_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

と連立微分方程式の形で表すことができる．ただし $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ である．

定理 13.1 (基本定理)**.** 実数 t_0 を含む開区間 I と，点 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ を含む $\boldsymbol{R}^n$ の領域上 D に対して，

$$I \times D = \{(t, \boldsymbol{x}) \,|\, t \in I, \boldsymbol{x} \in D\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$$

で定義された，$\boldsymbol{R}^n$ に値をとる関数 $\boldsymbol{f} \colon I \times D \to \boldsymbol{R}^n$ が $I \times D$ 上で C^1-級であるとする[*14]．このとき，t_0 を含む開区間 I 上で定義された C^1-級関数 $\boldsymbol{x} \colon I \to \boldsymbol{R}^n$ で (13.1) を満たすものた**ただひとつ**存在する．

注意 13.2.

- $\boldsymbol{f}$ の微分可能性はもう少し弱めることができるが，実用上はここであげたもので十分である．しかし「連続」まで弱めることはできない．実際，単独の微分方程式 $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$ (f が微分可能でないケース) の初期条件 $x(0) = 0$ を満たす解は無数に存在する．実際，任意の $a > 0$ に対して

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{1}{27}t^3 & (x \geqq a) \end{cases}$$

  は条件を満たす.
- $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ が任意の $t \in \boldsymbol{R}$ に対して定義されている (t を陽に含まない場合を含む) としても方程式 (13.1) の解は $\boldsymbol{R}$ 全体で定義されるとは限らない．実際，$\dot{x} = 1 + x^2$, $x(0) = 0$ の解は $x(t) = \tan t$ であるが，この定義域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である．

■線形微分方程式　区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された n 次正方行列に値を持つ関数 $A \colon I \to \mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R}^n$ に値を持つ関数 $\boldsymbol{b} \colon I \to \boldsymbol{R}^n$ に対して，微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a} \tag{13.2}$$

を**線形常微分方程式**という．ただし $t_0 \in I$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$, $\mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$ は実数を成分にもつ $n \times n$ 行列全体の集合を表している．

定理 13.3 (線形常微分方程式の基本定理)**.** 行列値関数 $A \colon I \to \mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{b} \colon I \to \boldsymbol{R}^n$ がともに C^∞-級ならば，$\underline{I\text{ 上で定義された}}$ C^∞-級関数 $\boldsymbol{x} \colon I \to \boldsymbol{R}^n$ で (13.2) を満たすものがただひとつ存在する．

2012 年 1 月 25 日

[*14] C^n-級なら結論として得られる関数も C^n-級である．

例 13.4. 区間 I 上で定義された C^∞-級関数 $\alpha(t)$ と $\varphi(t)$ に対して，微分方程式

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(t) = \varphi(t)$$

を考える．この方程式の解は

$$x(t) = \left(c + \int_0^t \frac{\varphi(s)}{x_0(s)}\,dt\right)x_0(t), \qquad x_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \alpha(s)\,ds\right)$$

と表される．ただし $c = x(0)$ は定数である．

例 13.5. 定数 α, γ に対して，微分方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \alpha x = 0 \tag{13.3}$$

を考える．これは，定理 13.1, 13.3 の形をしていないが，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -2\gamma \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

とかけるので，定理 13.3 の意味で線形常微分方程式であることがわかる．とくに係数行列 $A(t)$ は t によらない定数だから，この方程式の解は $\boldsymbol{R}$ 全体で定義される．

ここでは，とくに $\gamma = 0$ の場合を考える：

- $\gamma = 0$, $\alpha = \omega^2 > 0$ のとき，(13.3) を満たす x は

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

  とかける．ただし A, B は定数である．
- $\gamma = 0$, $\alpha = -\omega^2 < 0$ のとき，(13.3) を満たす x は

$$x(t) = A\cosh\omega t + B\sinh\omega t$$

  とかける．ただし A, B は定数である．

一般の場合は次のような解が得られる：2 次方程式

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \alpha = 0 \tag{13.4}$$

の 2 つの根を λ_1, λ_2 とする．

- λ_1, λ_2 が相異なる実数ならば，(13.3) を満たす x は

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

  の形に表される．ただし A, B は定数．
- $\lambda_1 = -\gamma + i\omega$, $\lambda_2 = -\gamma - i\omega$ (ω は実数) とかけている場合，(13.3) を満たす x は

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

  の形に表される．ただし A, B は定数．
- $\lambda_1 = \lambda_2$ (実数) の場合，(13.3) を満たす x は

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}(A + Bt)$$

  の形に表される．ただし A, B は定数．

■線形微分方程式の解の空間　方程式 (13.2) の $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合を**同次方程式** あるいは **斉次方程式**という：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t). \tag{13.5}$$

もし，ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$ が (13.5) の解ならば，それらの**線形結合**

$$a\boldsymbol{x}_1(t) + b\boldsymbol{x}_2(t) \qquad (a,\, b \text{ は定数})$$

もまた (13.5) の解である．

定理 13.6. $\boldsymbol{R}^n$ に値をとる未知関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に関する方程式 (13.5) の解全体の集合は n 次元線形空間 (ベクトル空間) となる．

証明: すぐ上に述べたように，解全体の集合は線形結合に関して閉じているのでベクトル空間となる．次元が n であることは，初期値問題の解の一意性から従う．

いま，方程式 (13.5) の解全体のなす線形空間を V_A とかく．すなわち $\boldsymbol{x} \in V_A$ とは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ が (13.5) を満たすことである．

定理 13.7. 線形微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

の解 $\boldsymbol{x}_0(t)$ をひとつとると，この方程式の任意の解は

$$\boldsymbol{x}_0(t) + \boldsymbol{x}(t) \qquad \boldsymbol{x} \in V_A$$

の形に表すことができる．

例 13.8. 正の定数 ω, m ($\omega = m$) に対して，微分方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \sin mt \tag{13.6}$$

の解は

$$\frac{1}{\omega^2 - m^2} \sin mt + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

の形にかける．ただし A, B は定数である．

問題

13-1 $m = \omega$ のとき (13.6) の解はどうなるか