2011 年 10 月 4 日 (2011 年 10 月 11 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四 講義資料 1

お知らせ

■重要なポインタ

- http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2011/geom4/ (この授業の公式ページ)
- http://www.official.kotaroy.com/class/2011/geom4/ (この授業のページ; ミラーサイト)
- http://www.ocw.titech.ac.jp/ (東工大 OCW, 全学科目から検索)
- kotaro@math.titech.ac.jp (山田の電子メイル)
- 本館 2 階 231 (山田の部屋；提出物ポストはここ)

前回までの訂正

- 数学専攻 web ページの講義概要を改訂しています (10 月 3 日). ご確認ください.

1 多重線形写像と内積

■双対空間 実数体を係数とする有限次元線型空間 V に対して

$$V^* := \{\alpha\colon V \to \boldsymbol{R} \mid \alpha \text{ は線型写像}\}$$

に通常の方法で和とスカラ倍を定義して得られる線型空間を V の**双対空間**(そうつい) *dual space* という．V の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ に対して $\sigma^j \in V^*$ $(j = 1, \dots, n)$ を

$$\sigma^j(\boldsymbol{v}) = v^j, \qquad \text{ただし} \quad \boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + \dots + v^n\boldsymbol{e}_n \tag{1.1}$$

とおくと，

$$[\sigma^1, \dots, \sigma^n] \tag{1.2}$$

は V^* の基底となる．これを基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する**双対基底** *dual basis* という．とくに

$$\sigma^j(\boldsymbol{e}_k) = \delta^j_k = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

が成り立つ．

今，$[\boldsymbol{f}_k]$ を V のもう一つの基底とすると，

$$\boldsymbol{f}_k = \sum_{j=1}^n a^j_k \boldsymbol{e}_j \qquad (k = 1, \dots, n),$$

行列を用いれば

$$[\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n] = [\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]A \qquad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

と書ける．ここで a^j_k は実数で，行列 A は n 次正則行列である．この A を基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ から $[\boldsymbol{f}_k]$ への**基底変換行列**とよぶ．

ここで $[\boldsymbol{e}_j]$ の双対基底を $[\sigma^j]$, $[\boldsymbol{f}_k]$ の双対基底を $[\mu^k]$ とすれば

$$\sigma^j = \sum_{k=1}^n a^j_k \mu^k \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \vdots \\ \sigma^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

が成り立つ．

有限次元線型空間 V とその双対空間 V^* は次元が一致するから，線型空間として同型である．例えば対応

$$V \ni \boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + \dots + v^n\boldsymbol{e}_n \longleftrightarrow v^1\sigma^1 + \dots + v^n\sigma^n \in V^*$$

は同型を与えるが，これは基底の取り方に依存するので，V と V^* の自然な同型とは言えない．しかし，V と V^* の双対 $(V^*)^*$ の間には次のような同型が存在する：

2011 年 10 月 4 日 (2011 年 10 月 11 日訂正)

補題 1.1. 写像

$$\iota\colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \iota(\boldsymbol{v}) = \xi \in (V^*)^*, \qquad \xi(\alpha) = \alpha(\boldsymbol{v}) \quad \bigl(\alpha \in V^*\bigr)$$

は線型同型写像である．

この写像の定義は基底を用いていないから，V と $(V^*)^*$ は自然に同型になるといってよい．以下，同型写像 ι を通して V と $(V^*)^*$ を同一視することにする．補題 1.1 の ξ を $\boldsymbol{v}$ と同一視すれば $\boldsymbol{v}(\alpha) = \alpha(\boldsymbol{v})$ なので

$$\alpha(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}(\alpha) = \langle \alpha, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \alpha \rangle$$

などと書くことがある．

■多重線型写像

定義 1.2. 線型空間 U, V, W に対して，写像 $\varphi\colon V \times W \to U$ が**双線型** *bilinear* であるとは，

- 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ を固定したとき $\varphi(\boldsymbol{a}, \cdot)\colon W \to U$ が線型写像,
- 任意の $\boldsymbol{p} \in W$ を固定したとき $\varphi(\cdot, \boldsymbol{p})\colon V \to U$ が線型写像

となることである．とくに，$U = \boldsymbol{R}$ のとき，φ は**双線型形式** *bilinear form* とよぶことがある．

3 つ以上の線型空間 $V_1, \dots, V_m$ の直積から線型空間 U への写像が m **重線型** であるということも同様に定義する．

線型空間 V, W の双対空間の元 $\alpha \in V^*$, $\psi \in W^*$ に対して

$$\alpha \otimes \psi\colon V \times W \ni (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}) \longmapsto \alpha(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{R}$$

と定めると $\alpha \otimes \psi$ は双線型形式である．ただし右辺は $\alpha(\boldsymbol{a})$ と $\psi(\boldsymbol{p})$ の実数としての積である．この $\alpha \otimes \psi$ を α と ψ の**テンソル積**という．$V \times W$ 上の双線型形式全体の集合に和とスカラ倍の構造を入れて得られる線型空間を

$$V^* \otimes W^* := \bigl\{\varphi\colon V \times W \to \boldsymbol{R} \mid \varphi \text{ は双線型}\bigr\}$$

を V^* と W^* の**テンソル積** *tensor product* という．テンソル積 $\alpha \otimes \psi$ は $V^* \otimes W^*$ の要素であるが, $V^* \otimes W^*$ の要素がすべてこの形で書けるわけではない．

煩雑さを避けるため， $V = W$ の場合を考える：

補題 1.3. 有限次元線型空間 V の双対空間 V^* の基底 $[\sigma^1, \dots, \sigma^n]$ に対して

$$\bigl\{\sigma^i \otimes \sigma^j \mid 1 \leqq i, j \leqq n\bigr\}$$

は $V^* \otimes V^*$ の基底を与える．とくに，$V^* \otimes V^*$ は n^2 次元線型空間である．

■1 次変換　線型空間 V から W への線型写像全体の集合に線型空間の構造を与えたものを

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \bigl\{T\colon V \to W \mid T \text{ は線型写像}\bigr\}$$

と書く．とくに $\mathrm{Hom}(V, V)$ は V 上の 1 次変換全体の集合である．

補題 1.4. 線型写像 $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して $\varphi_T \colon V \times W^* \to \boldsymbol{R}$ を

$$\varphi_T \colon V \times W^* \ni (\boldsymbol{v}, \alpha) \longmapsto \varphi_T(\boldsymbol{v}, \alpha) = \alpha\,(T(\boldsymbol{v})) \in \boldsymbol{R}$$

で定めると，$\varphi_T \in V^* \otimes W$ で，対応 $\mathrm{Hom}(V, W) \ni T \mapsto \varphi_T \in V^* \otimes W$ は同型写像である．

とくに $V^* \otimes V$ は $\mathrm{Hom}(V, V)$ と同一視することができる．

■対称双線形形式と 2 次形式　双線型形式 $\varphi \in V^* \otimes V^*$ が**対称**であるとは $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ が任意の $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ に対して成り立つことである．$\alpha, \beta \in V^*$ に対して

$$\alpha \cdot \beta := \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha)$$

とおくと，これは対称双線形形式である．この “$\cdot$” を**対称積**とよぶ．

補題 1.5. n 次元線型空間 V 上の対称双線形形式全体の集合は $V^* \otimes V^*$ の $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次元部分空間である．とくに，$[\sigma^j]$ を V^* の基底とするとき，

$$\left\{\sigma^j \cdot \sigma^k \mid 1 \leqq j \leqq k \leqq n\right\}$$

は V 上の対称双線形形式全体の空間の基底を与える．

とくに $[\boldsymbol{e}_j]$ を V の基底，$[\sigma^j]$ をその双対基底とするとき，対称双線形形式 φ に対して $\varphi_{ij} := \varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ とおくと，

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}\, \sigma^i \cdot \sigma^i + 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \varphi_{ij}\, \sigma^i \cdot \sigma^j \tag{1.5}$$

と表される．このとき $\Phi := (\varphi_{ij})$ は対称行列となるが，これを対称双線形形式 φ の基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する表現行列とよぶ．

補題 1.6. 2 次形式 φ の基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する表現行列を Φ とするとき，

- Φ の固有値はすべて実数，
- Φ は直交行列によって対角化可能，かつ
- Φ の n 個の固有値のうち正のものの個数，負のものの個数，0 の個数は基底の取り方によらない．

対称双線形形式 $\varphi \in V^* \otimes V^*$ に対して，対応 $V \ni \boldsymbol{v} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{R}$ を φ に対応する 2 **次形式** *quadratic form* という．

補題 1.7. 線形空間 V 上の対称双線形形式 φ と ψ に対応する 2 次形式が一致するならば $\varphi = \psi$ である．

したがって，以下，対称双線形形式と 2 次形式を区別しなかったりする．

■内積

定義 1.8. 線型空間 V 上の対称双線形形式 (2 次形式) φ が

- **非退化**であるとは，「任意の $\boldsymbol{v}$ に対して $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}) = 0$ が成り立つならば $\boldsymbol{a} = 0$ が成り立つ」ことである．
- **正値**（正定値）とは，任意の $\boldsymbol{v} \neq 0$ に対して $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$ が成り立つことである．

- **負値**（負定値）とは，任意の $\boldsymbol{v} \neq 0$ に対して $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) < 0$ が成り立つことである．

正値あるいは負値の 2 次形式は非退化である．正値でも負値でもない非退化 2 次形式を**不定値**という．

補題 1.9. 2 次形式 φ の，ある基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する表現行列 Φ の正の固有値の個数を p, 負の固有値の個数を q，零固有値の個数を r とする．

- φ が非退化であるための必要十分条件は $r = 0$ である．
- φ が正値であるための必要十分条件は $q = r = 0$ である．
- φ が負値であるための必要十分条件は $p = r = 0$ である．

定義 1.10. V 上の非退化 2 次形式 φ の表現行列の正の固有値の個数を p，負の固有値の個数を q とするとき，(p, q) （$p + q = \dim V$）を φ の**符号数**という．

定義 1.11. n 次元線型空間 V 上の非退化 2 次形式を V の**内積**という．

通常， V の内積といえば正値のものを指すことが多い．ここでは（一時的に）不定値のものも含めて内積とよぶが，これらを区別するときには**正値内積**，**不定値内積**とということにする．

補題 1.12. 次元が n であるような線型空間 V に与えられた内積 φ に対して，次を満たす V の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ が存在する：$\varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ ただし $\varepsilon_i = \pm 1$, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号である．

証明は Gram-Schmidt の直交化による．補題 1.12 のような基底を，内積 φ に関する**正規直交基**という．とくに，$\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_i = -1$ となるような添字 i の個数をそれぞれ p, q とすると，内積の符号数は (p, q) となる．

例 1.13. G を n 次対称行列，$\varphi_G \colon \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi_G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := {}^t\boldsymbol{v} G \boldsymbol{w}$ で定めると，φ_G は双線型形式である．とくに φ_G が内積を与えるための必要十分条件は G が正則行列となることで， このとき，G の正の固有値の個数を p とすると φ_G の符号数は $(p, n-p)$ である．

G が単位行列のとき，φ_G は $\boldsymbol{R}^n$ の通常の内積 $\varphi_G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = v^1 w^1 + \dots + v^n w^n$ となる．これを**ユークリッド内積**という．また，$G = \mathrm{diag}\{-1, \dots, -1, 1, \dots, 1\}$ (-1 を q 個，1 を $n - q$ 個並べた対角行列) とすると

$$\varphi_G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -\sum_{j=1}^{q} v^j w^j + \sum_{j=q+1}^{n} v^j w^j$$

となる．$\boldsymbol{R}^n$ にこのような内積を与えたものを $\boldsymbol{R}^n_q$ と書く．

とくに φ を明示する必要がない場合は，$\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ のことを $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ などと書くこともある．

命題 1.14. 有限次元線型空間 V に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとき，V から双対空間 V^* への写像

$$\flat \colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v}^\flat = \langle \boldsymbol{v}, \cdot \rangle \in V^*$$

は線型空間の同型を与える．

■ミンコフスキー空間　例 1.13 でとくに $q = 1$ の場合, $\boldsymbol{R}^n_1$ を n 次元**ミンコフスキー空間** *Minkowski space* という．この内積を (ミンコフスキー内積) を $\langle\ ,\ \rangle$ と書き，習慣にしたがって $n = m + 1$ として $\boldsymbol{R}^{m+1}$ の

要素を $\boldsymbol{x} = {}^t(x^0, x^1, \dots, x^m)$ と書くことにすると,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -x^0 y^0 + \sum_{j=1}^m x^j y^j \qquad \boldsymbol{x} = {}^t(x^0, x^1, \dots, x^m), \quad \boldsymbol{y} = {}^t(y^0, y^1, \dots, y^m)$$

と表すことができる.

定義 1.15. ベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{m+1}_1 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ が**空間的** *spacelike*, **時間的** *timelike*, **光的** *lightlike* であるとは,それぞれ $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle < 0$, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ が成り立つことである.光的ベクトルは**等方的** *isotoropic*, **零的** *null* ともよばれる.また,便宜上,零ベクトルは空間的であるとする.

命題 1.16.

- $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{m+1}_1$ が時間的であるとき,直交補空間 $\boldsymbol{v}^\perp = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{m+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = 0\}$ は,空間的ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^{m+1}_1$ の m 次元部分空間である.とくに,ミンコフスキー内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $\boldsymbol{v}^\perp$ への制限は,$\boldsymbol{v}^\perp$ の正値な内積を与える.
- 光的ベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{m+1}_1$ の直交補空間 $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\boldsymbol{v}$ を含む $\boldsymbol{R}^{m+1}_1$ の m 次元部分空間で, 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $\boldsymbol{v}^\perp$ への制限は半正値である.

問題

1-1 補題 1.6 を示しなさい.

1-2 補題 1.7 を示しなさい.

1-3 補題 1.9 を示しなさい.

1-4 命題 1.16 を示しなさい.

1-5 有限次元線型空間 V に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとき $\mathrm{Hom}(V, V)$ と $V^* \otimes V^*$ に自然な同型写像が定義できることを示しなさい.