2011 年 10 月 11 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 2

お知らせ

- 来週 10 月 18 日は，金曜日の時間割で授業が行われますので，次回は 10 月 25 日です.

前回までの訂正

- 講義資料 1, 5 ページ下から 7 行目：tr $\Rightarrow$ diag
- 講義資料 1, 5 ページ下から 5 行目：$\boldsymbol{R}^n_p \Rightarrow \boldsymbol{R}^n_q$
- 講義資料 1, 6 ページ下から 12 行目：$\boldsymbol{R}^{m+1}_0 \Rightarrow \boldsymbol{R}^{m+1}_1$
- 講義資料 1, 6 ページ下から 9 行目：$\boldsymbol{R}^{m+1}_0 \Rightarrow \boldsymbol{R}^{m+1}_1$

授業に関する御意見

- 面白そうな内容なので期待しています. **山田のコメント：** どうなることやら. . .

質問と回答

質問： 資料にあって講義中に扱われなかった内容は次の講義では「読んできている」ことが前提とされるのでしょうか?
お答え： それほど strict には考えていません．必要なときに前が参照できればよいと思います.

2　リーマン多様体

■多様体　可微分多様体 *differentiable manifold* とは，ハウスドルフ位相空間 M と M 上の C^∞ 級**アトラス** *atlas* $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in A\}$ の組のことである．ただし，各添字 $\alpha\in A$ に対して $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ は M の開集合 U_α と同相写像 $\varphi_\alpha\colon U_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\subset\boldsymbol{R}^n$ の組で次を満たすものである：(1) $\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha=M$, (2) $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\colon\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ は $U_\alpha\cap U_\beta$ が空でない限り可微分同相写像である．この n を多様体 M の**次元** *dimension* といい，$n=\dim M$ と書く．

可微分多様体のことを単に多様体ということがある．さらに，多様体 $(M,\mathcal{A})$ のことを，アトラスを明示せずに多様体 M と書くのが普通である．

アトラス $\mathcal{A}$ の要素 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ は M の**局所座標系** *local coordinate system* あるいは**チャート** *chart* とよぶ．とくに点 $p\in U_\alpha$ に対して $\varphi_\alpha(p)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の要素であるから，$\varphi_\alpha(p)=\bigl(x^1(p),\dots,x^n(p)\bigr)$ と書いて (x^j) を M の局所座標系とよぶことが多い．

可微分多様体 M 上の関数 $f\colon M\to\boldsymbol{R}$ が C^∞ 級であるとは任意のチャート $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ に対して $f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ が $\varphi_\alpha(U_\alpha)\subset\boldsymbol{R}^n$ 上で定義された可微分関数となることである．ここで $f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ は，関数 f の，局所座標 $\varphi_\alpha=(x^j)$ による表現と見なすことができることに注意する．C^∞ 級関数のことを単に**可微分関数** *differential function* という．M 上可微分関数全体の集合 $\mathcal{F}(M)$ には，通常の関数の和・積を用いて可換環の構造を入れることができる．

多様体 $(M,\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\})$ に対して，M の開集合 U と同相写像 $\varphi\colon U\to\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^n$ が**適合的**とは，任意の α に対して $\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U\cap U_\alpha)\to\varphi_\alpha(U\cap U_\alpha)$ が微分同相写像となることである．通常，多様体 M のアトラス $\mathcal{A}$ としては，極大のものをとる．すなわち，(U,φ) が $\mathcal{A}$ と適合的なら $(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ が成り立つものとする．

■パラコンパクト性と単位の分割

定義 2.1. 位相空間 M が**パラコンパクト** *paracompact* であるとは，M の任意の開被覆 $\{U_\alpha\,|\,\alpha\in A\}$ に対して次をみたす開被覆 $\{V_\beta\,|\,\beta\in B\}$ が存在することである：

- 各 $\beta\in B$ に対して $V_\beta\subset U_\alpha$ を満たす $\alpha\in A$ が存在する．
- 任意の β に対して $V_{\beta'}\cap V_\beta\neq\emptyset$ となる $\beta'\in B$ は有限個である．

多様体 M がパラコンパクトであるとは，M が位相空間としてパラコンパクトとなることである．

補題 2.2. パラコンパクト多様体の部分多様体はパラコンパクトである．また，パラコンパクト多様体同士の積多様体はまたパラコンパクトである．

命題 2.3 (単位の分割)**.** パラコンパクト多様体 M 上の可微分関数 $\eta_\beta\in\mathcal{F}(M)$ の族 $\{\eta_\beta\}$ で次を満たすものが存在する：

- 各 β に対して $0\leqq\eta_\beta\leqq1$.
- 各 β に対して $V_\beta=\{p\in M\,|\,\eta_\beta(p)\neq0\}$ とおくと，$\overline{V_\beta}$ はコンパクトで，一つの局所座標系の定義域に含まれる．

2011 年 10 月 11 日

- 各 β に対して $V_\beta \cap V_{\beta'} \neq \emptyset$ を満たす β' は有限個.
- $\sum_{\beta\in B} \eta_\beta = 1$.

この 最後の条件の総和は，3 番目の条件より有限和となる．命題 2.3 の $\{\eta_\beta\}$ を M 上の**単位の分割** *partition of unity* という．単位の分割の証明は，たとえば，松島与三「多様体入門」II 章 §14 を見よ．

■接空間と余接空間　多様体 M 上の点 p を固定するとき，線型写像 $X\colon \mathcal{F}(M) \to \boldsymbol{R}$ でライプニッツ・ルール $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$ を満たすものを M の p における**接ベクトル** *tangent vector* とよぶ．p を含む M の局所座標系 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ をとり，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p : \mathcal{F}(M) \ni f \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p f = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j}(\varphi(p)) \in \boldsymbol{R}$$

は p における接ベクトルである．M の p における接ベクトル全体の集合を M の p における**接空間**あるいは**接ベクトル空間**といい，T_pM と書く．多様体 M の次元を n とすれば, T_pM は

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right] \tag{2.1}$$

で生成される n 次元線型空間である．もう一つの局所座標系 $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ に対して座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}\colon (x^j) \mapsto (y^l)$ を考えれば,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p \tag{2.2}$$

となる．一方，$X \in T_pM$ を

$$X = \sum_{j=1}^n X^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{k=1}^n \tilde{X}^k \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p \qquad \text{とすれば} \qquad \tilde{X}^k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p) X^j \tag{2.3}$$

が成り立つ．

線型空間 T_pM の双対空間を T_p^*M と書き，M の p における**余接空間** *cotangent space* という．とくに，基底 (2.1) の双対基底を

$$\left[(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\right] \tag{2.4}$$

と書く．(2.2) を用いれば,

$$(dy^k)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p)(dx^j)_p \tag{2.5}$$

を得る．

■接束とベクトル場　多様体 M 上の各点における接空間を集めて得られる集合

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$$

を M の**接束** *tangent bundle* という．TM から M への自然な射影を π と書く：$\pi(X) = p$ $(X \in T_pM)$. M の各チャート $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ に対して

$$\tilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \ni X = \sum_{j=1}^n X^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \longmapsto \left(\varphi(p), X^1, \dots, X^n\right) \in \varphi(U) \times \boldsymbol{R}^n$$

を TM の座標系と見なすことにより，TM には $2n$ 次元多様体の構造を入れることができる．

可微分写像 $X\colon M \to TM$ が $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ (M の恒等写像) を満たすとき，X を**ベクトル場**とよぶ．すなわ，X は M の各点 p に対して T_pM の要素を対応させる「滑らかな」対応である．局所座標系を用いれば

$$X = \sum_{j=1}^{n} X^j(x^1,\dots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (\ X^j(x^1,\dots,x^n) \text{ は } (x^k) \text{ の可微分関数}) \tag{2.6}$$

と書ける．ただし $\partial/\partial x^j$ は $p \mapsto (\partial/\partial x^j)_p$ で与えられる局所的なベクトル場である．

■接束から誘導されるベクトル束　接束と同様にして $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$ に $2n$ 次元多様体の構造を入れて**余接束** *cotangent bundle* という．また，余接空間のテンソル積を用いて，たとえば

$$T^*M \otimes T^*M := \bigcup_{p\in M} T_p^*M \otimes T_p^*M$$

などを考えることができる．

一般に，多様体 E, M，可微分な全射 $\pi\colon E \to M$ の組が次を満たすとき，(E, M, π) を M 上の**ベクトル束** *vector bundle* という：

- 各 $p \in M$ に対して $E_p = \pi^{-1}(p)$ には N 次元線型空間の構造が与えられている（したがって，M の次元を n とすると E の次元は $N + n$ となる)．
- M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と可微分同相写像 $\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^N$ の族 $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}$ で, $\tilde{\varphi}_\alpha|_{E_p}\colon E_p \to \{p\}\times\boldsymbol{R}^N \simeq \boldsymbol{R}^N$ が線型同型写像となるものが存在する．

ここで挙げた TM, T^*M, $T^*M \otimes T^*M$ などは M 上のベクトル束である．

ベクトル束 (E, M, π)（簡単のためにベクトル束 E と書くこともある）の**切断** *section* とは,

$$\xi\colon M \longrightarrow E \qquad \pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$$

となる可微分写像のことである．とくに，ベクトル場は接束の切断である．ベクトル束 E の切断全体の集合を $\Gamma(E)$ と書く．習慣にしたがって，ベクトル場全体の集合 $\Gamma(TM)$ は $\mathfrak{X}(M)$ とも書く．

一般に $\Gamma(E)$ は線型空間の構造をもつ．さらに，$\mathcal{F}(M)$ を係数環とする加群の構造を持っている．

■リーマン計量　多様体 M 上のベクトル束

$$S(T^*M \otimes T^*M) = \cup_{p\in M} S(T_p^*M \otimes T_p^*M), \qquad S(T_p^*M \otimes T_p^*M) = (\ T_pM \text{ 上の対称双線形形式全体})$$

の切断を，M 上の対称 2 次形式の場，あるいは単に 2 次形式という．

補題 2.4. 多様体 M の各点 p に，T_pM の 2 次形式 Q_p を対応させる規則 $Q\colon p \mapsto Q_p$ 与えられているとき，Q が $S(T^*M \otimes T^*M)$ の（滑らかな）切断となるための必要十分条件は，任意の滑らかなベクトル場 X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $M \ni p \mapsto Q_p(X_p, Y_p) \in \boldsymbol{R}$ が可微分関数となることである．

証明. M の局所座標系 $(U, \varphi = (x^j))$ に対して $E = S(T_p^*M \otimes T_p^*M)$ の基底を $\bigl[(dx^j)_p \cdot (dx^k)_p \,|\, 1 \leqq j \leqq k \leqq n\bigr]$ ととることができる．ただし $\cdot$ は対称積である．E の可微分多様体としての構造は，この基底に関する成分を用いて定義する．いま,

$$Q_{ij}(p) = Q_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)$$

とおけば，$Q_{ij}=Q_{ji}$ だから

$$Q_p=\sum_{i,j=1}^{n}Q_{ij}(p)\,(dx^i)_p\otimes(dx^j)_p=\sum_{j=1}^{n}Q_{jj}(p)\,(dx^j)_p\cdot(dx^j)_p+2\sum_{1\leqq j<k\leqq n}Q_{jk}(p)\,(dx^j)_p\cdot(dx^k)_p$$

とおけるので，E のチャートの定義のしかたより，Q が M から E への可微分写像となるための必要十分条件は各 Q_{ij} が可微分となることである．この事実と，ベクトル場の局所表示を用いれば結論が得られる． □

定義 2.5. 多様体 M 上の**リーマン計量** *Riemannian metric*（**擬リーマン計量** *pseudo Riemannian metric*）とは，$S(T^*M\otimes T^*M)$ の切断 g で，各点 p で g_p が T_pM の正値（非退化）な内積を与えるものである．

多様体 M と M 上のリーマン計量 g の組 (M,g) を**リーマン多様体** *Riemannian manifold* とよぶ.

以下，(M,g) をリーマン多様体とする．M の局所座標系 $(U,(x^j))$ に対して

$$g=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}dx^i\otimes dx^j\qquad g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

と表すと，g_{ij} は U 上の滑らかな関数で，行列 (g_{ij}) は正値な対称行列である．

リーマン計量 g を明示する必要がない場合は，$g(X,Y)$ のことを $\langle X,Y\rangle$ と表すこともある．

定理 2.6. 任意のパラコンパクト多様体上にリーマン計量が存在する．

証明. 命題 2.3 の単位の分割 $\{\eta_\beta\}$ をとり，$V_\beta=\{p\in M\,|\,\eta_\beta(p)\neq 0\}$ とする．各 β に対して V_β はひとつの局所座標系に入るので，その座標を (x^j) とおき，$g_\beta:=\sum_{i=1}^n dx^i\otimes dx^i$ とおくと，g_β は V_β 上のリーマン計量である．V_β の外では η_β は 0 になるので，$\eta_\beta g_\beta$ は M 全体で定義された 2 次形式となるが，$g\colon=\sum_\beta\eta_\beta g_\beta$ とおけば，g が正値になる． □

■リーマン多様体の例 (1)

例 2.7 (ユークリッド空間)**.** $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元多様体と見なすとき，$T_p\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ と同一視できる．すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ の標準座標系を $(x^1,\dots,x^n)$ とするとき，

$$T_p\boldsymbol{R}^n\ni X=\sum X^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\leftrightarrow(X^1,\dots,X^n)\in\boldsymbol{R}^n.$$

したがって $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な内積を $T_p\boldsymbol{R}^n$ の内積と見なすことにより $\boldsymbol{R}^n$ にリーマン計量 g_0 を与えることができる．標準座標を用いれば $g_0=dx^1\otimes dx^1+dx^2\otimes dx^2+\dots+dx^n\otimes dx^n$ である．

例 2.8 (部分多様体)**.** 多様体 N の部分集合 M が N の部分多様体となっているとすると，各 $p\in M$ に対して T_pM は T_pN の線型部分空間となっている．もし N にリーマン計量が g 与えられているならば，g_p を T_pM に制限すれば，これは T_pM の内積を与えているので M にリーマン計量を与えることになる．これを N のリーマン計量から誘導される M の計量とよぶ.

例 2.9 (球面)**.** ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準座標系を $(x^1,\dots,x^{n+1})$ とするとき，陰関数定理より

$$S^n:=\left\{\boldsymbol{x}=(x^1,\dots,x^{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\;\middle|\;\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\sum_{j=1}^{n+1}(x^j)^2=1\ a\right\}$$

は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の n 次元部分多様体となる．したがって $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準計量から S^n のリーマン計量が誘導される．これを S^n の標準計量という．

例 2.10 (双曲空間)**.** ミンコフスキー空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ は集合として $\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同一視されるから，それによって多様体とみなすことができる．このとき，$H^n_{\pm} := \{\boldsymbol{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \boldsymbol{R}^{n+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -1\}$ とおくと，陰関数定理よりこれは $\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の部分多様体である．$H^n_{\pm}$ は連結ではないので，その連結成分

$$H^n := \{\boldsymbol{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \boldsymbol{R}^{n+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -1, x^0 > 0\}$$

をとると，$\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の連結な部分多様体 H^n が得られる．

点 $\boldsymbol{x} \in H^n$ に対して $T_{\boldsymbol{x}}H^n = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{n+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = 0\} = \boldsymbol{x}^{\perp}$ となる．とくに，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $T_{\boldsymbol{x}}H^n$ への制限は正値なので，H^n 上に **リーマン計量** g_H が得られたことになる．リーマン多様体 (H^n, g_H) を**双曲空間** *hyperbolic space* とよぶ．

問題

2-1 (M,g) をリーマン多様体，$(x^1,\dots,x^n)$, $(y^1,\dots,y^n)$ を局所座標系とする．

$$g=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i\otimes dx^j=\sum_{k,l=1}^{n}\tilde g_{kl}dy^k\otimes dy^l \qquad \text{と表すとき，} \qquad \tilde g_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}g_{ij}$$

が成り立つことを確かめなさい．

2-2 $\boldsymbol{R}^2$ のユークリッド計量 g_0 の極座標 (r,θ) に関する成分表示を求めなさい．

2-3 S^n の開集合 $U=\{(x^1,\dots,x^{n+1})\in S^n\,|\,x^{n+1}\neq -1\}$ 上で座標系 $\xi^j=x^j/(x^{n+1}+1)$ $(j=1,\dots,n)$ をとる（南極からの立体射影）．S^n の標準計量を座標系 (ξ^j) を用いて表示しなさい．

2-4 例 2.10 について

(1) H^n は $\boldsymbol{R}^n$ と微分同相であることを示しなさい．

(2) $\varphi\colon H^n\to\boldsymbol{R}^n$ を

$$\varphi(x^0,\dots,x^n)=(\xi^1,\dots,\xi^n)=\frac{1}{1+x^0}(x^1,\dots,x^n)$$

とおくと，

$$\varphi(H^n)=B^n=\{(\xi^1,\dots,\xi^n)\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\sum(\xi^j)^2<1\}$$

で，φ は H^n から B^n の可微分同相写像であることを示しなさい（立体射影）．

(3) 上の問いの (ξ^k) を H^n の座標と見なし, その座標に関する計量 g_H の表示を求めなさい．この座標による双曲空間の表示を Poincaré モデルとよぶ．

(4) $\psi\colon H^n\to\boldsymbol{R}^n$ を

$$\psi(x^0,\dots,x^n)=(\eta^1,\dots,\eta^n)=\frac{1}{x^0-x^n}(x^1,\dots,x^{n-1},1)$$

とおくと，

$$\psi(H^n)=\boldsymbol{R}^n_+=\{(\eta^1,\dots,\eta^n)\,|\,\eta^n>0\}$$

で，ψ は H^n から $\boldsymbol{R}^n_+$ の可微分同相写像であることを示しなさい．

(5) 上の問いの (η^k) を H^n の座標と見なし, その座標に関する計量 g_H の表示を求めなさい．この座標による双曲空間の表示を上半空間モデルとよぶ．