2011 年 10 月 25 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 3

お知らせ

- 間が 1 回あきましたが，お久しぶりです．最初に配布したスケジュールと進度が少し違うかもしれません．後日，改訂版のスケジュールを web にあげます．
- 講義資料などの誤りなどを見つけられましたら，提出用紙を利用してご指摘いただけると助かります．

授業に関する御意見

- 授業中，窓が開いていましたが，そこから蚊がはいってきていました．
  山田のコメント： 気が付きませんでした．ごめんなさい．気になったら閉めてくださいね．
- 問題の解答がいただきたいです． **山田のコメント：** だれか作ってくれると嬉しいのですが. . . 時間があったらヒントくらいはまとめてみます．(時間があったら，ね)

質問と回答

質問： $\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の部分多様体として，H^n の前に $\{x \in \boldsymbol{R}^{n+1}_1 \,|\, \langle x, x\rangle = 1, x_0 > 0\}$ を考えるのが自然と思うのですが，これは何か面白い幾何的な何か (原文ママ) があるのでしょうか.

お答え： まず $\langle x, x\rangle = 1$ で定義される $\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の部分集合は連結ですので，$x_0 > 0$ という条件は不要 (あってもよいが，連結な多様体の開部分多様体になってしまいます)．さて，この部分多様体に，ミンコフスキー空間の計量を制限すると，その計量は正値にならず，実際，符号数 $(n-1, 1)$ の計量をさだめ，定曲率ローレンツ多様体の例が得られます．これには名前がついていて de Sitter 空間，といいます．この講義では主に Riemann 多様体を扱うので，このような例はとくには扱いませんが，重要な例です．

質問： 毎回提出の問題は複数ありますが，推奨される問題はあるのでしょうか.

お答え： 何も考えてはいません．いろいろな問題を解く人がいたらいいなとは思います.

3 等長写像

■関数の微分 多様体 M の点 p における接ベクトル $X \in T_pM$ は $\mathcal{F}(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への写像と見なすことができたが，ここで, 関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ を固定して，

$$(df)_p \colon T_pM \ni X \longmapsto (df)_p(X) := Xf \in \boldsymbol{R} \tag{3.1}$$

と定めると，$(df)_p$ は T_pM から $\boldsymbol{R}$ への線型写像となる．言い換えれば $(df)_p \in T_p^*M$．さらに，点 $p \in M$ に対して $(df)_p \in T_p^*M$ を対応させる写像 $df \colon M \to T^*M$ は余接束の切断を与えている．一般に，余接束の切断を**（１次）微分形式**とよぶが，1 次微分形式 df のことを，関数 f の**微分** *differential* とよぶ.

補題 3.1. 多様体 M のチャート $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ に対して，

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j$$

が成り立つ.

■写像の微分 二つの可微分多様体 M, N の間の写像 $f \colon M \to N$ が**可微分** *differentiable*[*1] であるとは，任意の可微分関数 $g \in \mathcal{F}(N)$ に対して，$g \circ f$ が M 上の可微分関数となることである．M から N への可微分写像全体の集合を $C^\infty(M, N)$ と書くことにする.

補題 3.2. 写像 $f \colon M \to N$ が可微分であるための必要十分条件は，任意の点 $p \in M$ に対して p を含む M のチャート (U, φ) と $f(p)$ を含む N のチャート (V, ψ) に対して

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \boldsymbol{R}^m \supset \varphi\bigl(U \cap f^{-1}(V)\bigr) \longrightarrow \psi(V) \subset \boldsymbol{R}^n$$

が可微分写像となることである．ここで $m = \dim M$, $n = \dim N$ である.

可微分写像 $f \colon M \to N$ が与えられたとき，各点 $p \in M$，$X \in T_pM$ に対して

$$(df)_p(X) \colon \mathcal{F}(N) \ni g \longmapsto (d(g \circ f))_p(X) \in \boldsymbol{R}$$

と定義すると，$(df)_p(X) \in T_{f(p)}N$ となることがわかる．このようにして得られる $(df)_p \colon T_pM \to T_{f(p)}N$ を写像 f の p における**微分** *differential* という.

補題 3.3. 写像 $f \colon M \to N$ の点 p における微分 $(df)_p$ は T_pM から $T_{f(p)}N$ への線型写像を与える．とくに，p の近傍における M のチャート $(U, \varphi = (x^j))$ と $f(p)$ の近傍における N のチャート $(V, \psi = (y^k))$ をとれば，基底

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right], \qquad \left[\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_{f(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_{f(p)}\right]$$

2011 年 10 月 25 日

[*1] この講義では「可微分」を C^∞-級の意味で用いる.

に関する $(df)_p$ の表現行列は

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(\varphi(p)) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(\varphi(p)) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f^n}{\partial x^1}(\varphi(p)) & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(\varphi(p))
\end{pmatrix} \tag{3.2}
$$

で与えられる．ただし

$$f^k = y^k \circ f \circ \varphi^{-1}$$

である．

とくに，$\boldsymbol{R}$ の区間 $I = (a, b)$ から多様体 M への可微分写像 $\gamma\colon (a, b) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ を M 上の**曲線**とよぶ．I のパラメータ（座標）を t とするとき，

$$\dot\gamma(t) := (d\gamma)_t \left(\frac{d}{dt}\right) \in T_{\gamma(t)}M$$

を曲線 γ の接ベクトルあるいは速度ベクトルとよぶ．M のチャート $\varphi = (x^j)$ に対して $\varphi \circ \gamma = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ と書くと，

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{dx^j}{dt}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)}$$

である．

補題 3.4. 多様体 M の任意の点 p と接ベクトル $X \in T_pM$ に対して，M 上の曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ で

$$\gamma(0) = p, \qquad \dot\gamma(0) = X$$

となるものが存在する．さらに，このような曲線 γ に対して

$$Xg = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \circ \gamma(t) \qquad g \in \mathcal{F}(M)$$

が成り立つ．また，可微分写像 $f\colon M \to N$ に対して，

$$(df)_p(X) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(0)$$

である．

■誘導計量　記号を簡単にするために，可微分写像 $f\colon M \to N$ の p における微分 $(df)_p$ のことを $(f_*)_p$ と書く．さらに，p を明示せずに $df = f_*$ と書くこともある．

定義 3.5. 多様体 M から多様体 N への可微分写像 $f\colon M \to N$ が**はめ込み** *immersion* であるとは，M の各点 p で微分 $(df)_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射となることである．

とくに，はめ込み $f\colon M \to N$ が存在するならば，$\dim M \leqq \dim N$ である．

多様体 N 上の 2 次形式 $g \in \Gamma(S(T^*N \otimes T^*N))$ が与えられているとき，可微分写像 $f\colon M \to N$ によって

$$(f^*g)_p(X, Y) := g_{f(p)}(f_*X, f_*Y) \qquad X, Y \in T_pM$$

で与えられる $(f^*g)_p\colon T_pM \times T_pM \to \boldsymbol{R}$ は T_pM 上の 2 次形式を与えている．さらに p を動かせば M 上の 2 次形式

$$f^*g \in \Gamma(S(T^*M \otimes T^*M))$$

を得る．これを 2 次形式 g の写像 f による**引き戻し** *pull-back* という．

補題 3.6. (N, g) をリーマン多様体とする．写像 $f\colon M \to N$ による g の引き戻しが M 上のリーマン計量を与えるための必要十分条件は f がはめ込みとなることである．

証明. f^*g が M 上の 2 次形式であることは容易にわかる（？）から，f^*g が正値であることと f がはめ込みであることの同値性を示せばよい．

まず f をはめ込みとしよう．g が正値であることから，任意の $X \in T_pM$ に対して

$$f^*g(X, X) = g(f_*X, f_*X) \geqq 0, \qquad (\text{等号成立は } f_*X = 0 \text{ のとき})$$

であるが，仮定より f_* は単射であるから，$f_*X = 0$ ならば $X = 0$．したがって f^*g は正値.

逆に f^*g が正値とする．いま $X \in \operatorname{Ker}(f_*)_p \subset T_pM$ をとると，

$$f^*g(X, X) = g(f_*X, f_*X) = g(0, 0) = 0$$

であるから，$f^*g(X, X) = 0$．ここで f^*g は正値だから $X = 0$．したがって $\operatorname{Ker} f_* = \{0\}$ となり，f_* は単射． □

定義 3.7. 多様体 M からリーマン多様体 (N, g) へのはめ込み $f\colon M \to N$ によって得られる M 上のリーマン計量 f^*g を f による**誘導計量**とよぶ.

例 3.8. D を $\boldsymbol{R}^2$ の領域とし，D の座標を (u, v) と表す．このとき，D から $\boldsymbol{R}^3$ への可微分写像 $f\colon D \to \boldsymbol{R}^3$ がはめ込みであるための必要十分条件は

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$$

が D の各点 (u, v) で 1 次独立となることである．

このとき，

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\rangle, \qquad F(u, v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle,$$
$$G(u, v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

とおき，

$$\begin{aligned} g &= E\,du \cdot du + 2F\,du \cdot dv + G\,dv \cdot dv \\ &= E\,du \otimes du + F\,du \otimes dv + F\,dv \otimes du + G\,dv \otimes dv \end{aligned}$$

とおくと，g は $\boldsymbol{R}^3$ の標準計量 $\langle\ ,\ \rangle$ の f による引き戻しである．

この $g = f^*\langle\ ,\ \rangle$ を曲面の**第一基本形式**とよぶことがある．

この講義では，2 次元多様体 M の $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込み $f\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ のことを**曲面** *surface* という．曲面は局所的には例 3.8 のように表される．

注意 3.9. 補題 3.6 は，g が擬リーマン計量の場合は正しくない．

■等長写像・等長変換　リーマン多様体 (M,g) から (N,h) への可微分写像 $f\colon M\to N$ が**等長的** *isometric* であるとは，$g=f^*h$ が成り立つことである．とくに $f\colon M\to N$ が微分同相写像であり，かつ等長的であるとき，f を**等長写像** *isometry* とよび，等長写像が存在するような二つのリーマン多様体を**等長的** *isometric* とよぶ．リーマン幾何学では，等長的なリーマン多様体を区別しない（区別できない）．

リーマン多様体 (M,g) から自分自身への等長的な可微分同相写像 $f\colon M\to M$ を (M,g) の**等長変換**という．(M,g) の等長変換全体の集合は写像の合成に関して群をなす．これを (M,g) の**等長変換群**という．

例 3.10. n 次の直交行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して

$$f_{A,\boldsymbol{b}}\colon \boldsymbol{R}^n\ni\boldsymbol{x}\longmapsto A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$$

とおくと，$f_{A,\boldsymbol{b}}$ は n 次元ユークリッド空間の等長変換である．

また，$(n+1)$ 次直交行列 A をとり，

$$g_A\colon S^n\ni\boldsymbol{x}\longmapsto A\boldsymbol{x}\in S^n$$

とおけば，g_A は球面 S^n の等長変換である．ただし，S^n 上の点は第 2 回の例のように，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルと見なしている．

同様に，$n+1$ 次正方行列 A で

$$^tAYA=Y \qquad Y=\begin{pmatrix}-1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}$$

を満たすものとすると，$\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ は第 2 回に挙げた双曲空間の等長変換である．

問題

3-1 補題 3.6 を証明しなさい.

3-2 例 3.8 を確かめなさい.

3-3 ミンコフスキー空間への $\boldsymbol{R}^n$ の領域のはめ込みで，ミンコフスキー計量の引き戻しで得られる 2 次形式が非退化でないようなものを挙げ，注意 3.9 を確かめなさい.

3-4 リーマン多様体 (M, g) から (N, h) への写像 $f\colon M \to N$ が等長的ならば，f ははめ込みであることを示しなさい.

3-5 リーマン多様体の等長変換全体の集合は写像の合成に関して群をなすことを示しなさい.

3-6 例 3.10 を確かめなさい.

3-7 ユークリッド空間の等長変換は例 3.10 に挙げた $f_{A,\boldsymbol{b}}$ に限ることを示しなさい．球面，双曲空間でも同様のことを試みなさい.