2011 年 11 月 1 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 4

授業に関する御意見

- 厳密でなくても，今回のほうにはみだしたひとことのお話があるとおもしろいと思います．これからもお願いします．
  山田のコメント： そんな話ばっかりしているような気もしますが. . .

質問と回答

質問： 問題 3-7 ついて：H^n, S^n について時間がなくてできませんでした．H^n のほうは $B^n \to B^n$ (略) のような等長変換を考えて，微分方程式を解けば OK かも．S^n も同様な感じだと思うが，もう少し難しそう．答えをもし良かったら教えて欲しいです.

お答え： 時間があったら説明します.

質問： よく先生は変態という単語を使っていらっしゃいますが，どのあたりからが変態ということになるのでしょうか. 自然でないというぐらいの意味でしょうか.

お答え： そのつもり．文脈依存です.

質問： 球面や双曲空間に標準計量と conformal な計量を入れると断面曲率はどのように変化しますか?

お答え： がんばって計算しましょう.

4 弧長と体積

リーマン多様体 (M,g) のリーマン計量 g から定まる内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書くことにする．とくに

$$|X| = \sqrt{\langle X, X\rangle} \qquad (X \in TM)$$

を接ベクトル X の大きさという．

さらに，M の局所座標系 $\bigl(U,(x^1,\dots,x^m)\bigr)$ における計量 g の表現を

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

としておく。

なお，本節では擬リーマン計量は考えない．

■曲線の弧長　リーマン多様体 (M,g) の滑らかな曲線

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$$

の**弧長** *arc length* とは

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt \tag{4.1}$$

のことである．ただし，$\dot\gamma = d\gamma/dt$ は γ の速度ベクトルである．とくに局所座標近傍 U 内の曲線を

$$\gamma(t) = \bigl(x^1(t),\dots,x^m(t)\bigr) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

と書けば,

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt$$

である．弧長は曲線のパラメータの取り方によらない．

曲線 γ が正則であるとは，$\dot\gamma(t) \neq 0$ がすべての t に対して成り立つことである．正則な曲線 γ は，適当にパラメータを取り替えることによって $|\dot\gamma| = 1$ とすることができる．このようなパラメータを**弧長パラメータ**という．

■距離

補題 4.1. 連結な多様体 M 上の任意の異なる 2 点 p, q に対して，p と q を結ぶ滑らかな曲線 γ が存在する．

> **証明：** まず，多様体は局所弧状連結な位相空間であるから，連結性から弧状連結性が従う．したがって p，q を結ぶ連続曲線 γ_0 が存在する．この曲線の像はコンパクトであるから，有限個の局所座標近傍で覆うことができる．各々の座標近傍は $\boldsymbol{R}^m$ の円板と可微分同相であるから，この座標系の中で γ_0 を滑らかな曲線に修正すればよい．

2011 年 11 月 1 日

連結な多様体 M の 2 点 p, q に対して

$$\mathcal{C}_{p,q} := \bigl\{p,\, q \text{ を結ぶ } M \text{ 上の滑らかな曲線}\bigr\}$$

とおく．補題 4.1 より $\mathcal{C}_{p,q}$ は空でない．そこで

$$d(p,q) := \inf\,\{\mathcal{L}(\gamma)\mid \gamma\in\mathcal{C}_{p,q}\,\} \tag{4.2}$$

とおく．

命題 4.2. 連結なリーマン多様体 (M,g) に対して (4.2) で定義される $d\colon M\times M\to\boldsymbol{R}$ は M の距離を与える．さらに d が定める位相は M の多様体としての位相と同じものである．

証明： まず $\mathcal{L}(\gamma)\geqq 0$ であるから (4.2) の右辺の "inf" をとるべき集合は下に有界である．したがって $d\colon M\times M\to\boldsymbol{R}$ は well-defined であり，とくに $d(p,q)\geqq 0$ が従う．さらに $d(p,p)=0$, $d(p,q)=d(q,p)$, $d(p,r)\leqq d(p,q)+d(q,r)$ は容易に示すことができる．
次に「$p\neq q$ ならば $d(p,q)>0$」を示そう．$p\neq q$ とすると，M がハウスドルフであることから，p の近傍 U と q の近傍 V で共通部分をもたないものが存在する．必要なら U を小さくとって $\bigl(U,(x^1,\dots,x^m)\bigr)$ が局所座標系で，

$$p=(0,\dots,0),\qquad U=\{(x^1,\dots,x^m)\,|\,(x^1)^2+\dots(x^m)^2<r^2\}$$

としてよい[*1]．とくに閉包 $\overline{U}$ はコンパクトである．
ここで $S^{m-1}\subset\boldsymbol{R}^m$ を $m-1$ 次元球面（単位ベクトルの全体）に対して

$$F\colon \overline{U}\times S^{m-1}\ni(x^1,\dots,x^m;v^1,\dots,v^m)\longmapsto\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x^1,\dots,x^m)v^i\,v^j\in\boldsymbol{R} \tag{4.3}$$

を考えると，F はコンパクト位相空間 $\overline{U}\times S^{m-1}$ 上で定義された連続関数であるから，最大・最小値の定理より $\overline{U}$ で最小値をとる．さらに (g_{ij}) が正定値行列であるから，$F(x^j;v^j)>0$ が成り立つので，その最小値は正の数となる：

$$F(x^1,\dots,x^m;v^1,\dots,v^m)\geqq c^2>0 \qquad\text{on } \overline{U}\times S^{m-1}. \tag{4.4}$$

ここで $\gamma\in\mathcal{C}_{p,q}$ が区間 $[a,b]$ で定義されていると，γ の終点は q であるから，区間 $[a,b]$ のどこかで U からはみ出さなければならない．そこで

$$\tau:=\inf\{t\,|\,\gamma(t)\not\in U\}$$

とすると，$a<\tau<b$ であり，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\gamma)&=\int_a^b\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt\\
&\geqq\int_a^\tau\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt\\
&=\int_a^\tau\sqrt{\sum g_{ij}(x^1,\dots,x^m)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt\\
&=\int_a^\tau\sqrt{F(x^1,\dots,x^m;v^1,\dots,v^m)}\sqrt{\sum_{i=1}^m\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}dt\\
&\hphantom{=}\qquad\left(v^j=\frac{dx^j}{dt}\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^m\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

[*1] 座標関数 $\varphi\colon U\to\boldsymbol{R}^m$ を省略している．本当は $\varphi(p)=(0,\dots,0)$, $\varphi(U)=\dots.$

$$\geqq c\int_a^\tau \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\,dt$$

を得る．ただし $\bigl(x^1(t),\dots,x^m(t)\bigr)$ は曲線 $\gamma(t)$ の座標系 U 上での表示である．この最後の式はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ 上で測った曲線 $\gamma|_{[a,\tau]}$ の長さであるから，

$$\mathcal{L}(\gamma) \geqq c|\gamma(\tau)-\gamma(a)|$$

が成り立つ．ただし，右辺の $|\ \cdot\ |$ は $\boldsymbol{R}^m$ のベクトルとしての大きさである．ここで τ の定義から $\gamma(\tau)\in\partial U$ となるが，U が（$\boldsymbol{R}^m$ の開集合として）半径 r の円板であって，$\gamma(a)=p=(0,\dots,0)$ となることから

$$\mathcal{L}(\gamma) \geqq c|\gamma(\tau)-\gamma(a)| \geqq cr$$

となる．右辺は γ の取り方によらないから，

$$d(p,q) \geqq cr > 0$$

となる．以上より d が距離となることが示された．
最後に，M の多様体としての位相を $\mathcal{O}$，d が定める M の位相を $\mathcal{O}_d$ としたとき $\mathcal{O}=\mathcal{O}_d$ であることを示す．それには点 p の，位相 $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}_d$) に関する任意の近傍 U に対して，$\mathcal{O}_d$ ($\mathcal{O}$) に関する p の近傍 V で $V\subset U$ となるものが存在することを示せばよいが，これは演習問題としておこう．

系 4.3. パラコンパクト多様体は正規位相空間である．

証明： すでに見たように，多様体 M 上にはリーマン計量が存在するから，それによって距離 d が定まる．M の位相は距離 d から定まる位相であるから，正規空間となる．

以後，リーマン多様体にはこのようにして距離が与えられているする．

■完備性　距離空間 (X,d) が**完備** *complete* であるとは，X の任意のコーシー列が X 内の点に収束することであった．

定義 4.4. 区間 $[a,b)$ で定義された多様体 M 上の曲線 $\gamma(t)$ が**発散する道** *divergent path* であるとは，任意のコンパクト集合 $K\subset M$ に対してある $\tau\in(a,b)$ をとると $\gamma|_{[\tau,b)}$ の像が $M\setminus K$ に含まれるようにできることである．

命題 4.5 (Hopf-Rinow の定理)**.** リーマン多様体 (M,g) が，（g から定義される距離 d に関して[*2]）完備であるための必要十分条件は，任意の発散する道 $\gamma\colon[a,b)\to M$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon}\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt=+\infty$$

となることである．

証明は後日与える．

系 4.6. コンパクトなリーマン多様体は完備である．

[*2] 以後，このフレーズは省略される

■体積と積分　リーマン多様体 (M, g) のコンパクト集合 Ω が座標近傍 $\bigl(U, (x^1, \dots, x^m)\bigr)$ に含まれているとする．このとき，Ω の**体積**とは m 重積分

$$\mathrm{Vol}(\Omega) := \int \cdots \int_\Omega \sqrt{g}\, dx^1 \, \dots \, dx^m \qquad g = \det(g_{ij}) \tag{4.5}$$

のことである．この積分はパラメータの取り方によらない．

さらに，Ω を含む領域で定義された連続関数 f に対して，その積分を

$$\int_\Omega f\, dv_g := \int \cdots \int_\Omega f \sqrt{g}\, dx^1 \, \dots \, dx^m \tag{4.6}$$

と定義する．この積分要素

$$dv_g = \sqrt{g}\, dx^1 \, \dots \, dx^m \tag{4.7}$$

を M のリーマン計量 g から誘導される**体積要素** *volume form* という．

領域 Ω が一つの座標系に含まれないときは，Ω を座標近傍による局所有限な被覆で覆って，1 の分割を用いて (4.6) を「つなげれば」よい．

とくに M がコンパクトのとき，

$$\mathrm{Vol}(M, g) := \int_M dv_g$$

を M の**体積**という．習慣にしたがって M の次元が 2 のときは**面積**ともいう．

問題

4-1「曲線の弧長がパラメータの取り方にのよらない」ことを正確に述べ，証明しなさい．また「正則な曲線は弧長パラメータで表すことができる」ことを示しなさい．

4-2 連結かつ局所弧状連結な位相空間は弧状連結であることを示しなさい．

4-3 補題 4.1 の証明を完全にしなさい．

4-4 式 (4.2) で定義された d に対して $d(p,q) \geqq 0$, $d(p,p)=0$, $d(p,q)=d(q,p)$, $d(p,r) \leqq d(p,q)+d(q,r)$ であることを示しなさい．

4-5 距離 (4.2) によって定まるリーマン多様体の位相が，多様体としての位相と一致することを示しなさい．

4-6 双曲空間は完備であることを，命題 4.5 を用いて証明しなさい．

4-7 (4.5) の積分が局所座標系の取り方によらないことを示しなさい．

4-8 大域的な積分の定義で「領域 Ω が一つの座標系に含まれないときは，Ω を座標近傍による局所有限な被覆で覆って，1 の分割を用いて (4.6) を「つなげれば」よい.」ということを具体的に述べなさい．

4-9 球面 S^2, S^3 の体積を求めなさい．