2011 年 11 月 8 日 (2011 年 11 月 15 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 5

前回までの訂正

- 講義資料 4, 4 ページ下から 12 行目：与えられるする ⇒ 与えられているとする

授業に関する御意見

- 具体例が豊富でイメージしやすく分かりやすいです.
  山田のコメント： 今回あたりから具体例が減ってくるかも知れません
- 面白いコメントがもっとみたいので，先生からもここにどんどん書くように促してください.
  山田のコメント： いやです.
- 山田先生もグレート岡山が大好きなんですね. **山田のコメント：** 別に

5 リーマン接続

この節では (M,g) を（擬）リーマン多様体とし，g から定まる内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書く．

■ベクトル場の交換子　多様体 M のベクトル場 $X\in\mathfrak{X}(M)$ と関数 $f\in\mathcal{F}(M)$ に対して Xf はまた M 上の関数である．そこで $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$[X,Y]f = X(Yf)-Y(Xf)$$

により $[X,Y]\colon\mathcal{F}(M)\to\mathcal{F}(M)$ を定義すると，これは線型写像で，さらに

$$[X,Y](fg)=f([X,Y]g)+g([X,Y]f)\qquad (f,g\in\mathcal{F}(M))$$

が成り立つことがわかるから，$[X,Y]$ は M 上のベクトル場である．したがって，対応

(5.1) $$[\ ,\ ]\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\ni(X,Y)\longmapsto[X,Y]\in\mathfrak{X}(M)$$

が得られる．これをベクトル場の**交換子積**または**リー括弧積** *Lie bracket* とよぶ．次のことは容易にわかる：

$$\begin{aligned}
[X,Y]&=-[Y,X],\\
[aX+bY,Z]&=a[X,Z]+b[Y,Z],\\
[X,aY+bZ]&=a[X,Y]+b[X,Z],\\
[X,fY]&=f[X,Y]+(Xf)Y,\\
[fX,Y]&=f[X,Y]-(Yf)X,\\
[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]&+[Z,[X,Y]]=0.
\end{aligned}$$

ただし $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$, $a,b\in\boldsymbol{R}$, $f\in\mathcal{F}(M)$ である．

M の局所座標系 (x^j) を用いて

$$X=\sum_{j=1}^m X^j\frac{\partial}{\partial x^j},\qquad Y=\sum_{j=1}^m Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

と書くと，

$$[X,Y]=\sum_{j,k=1}^m\left(X^k\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}-Y^k\frac{\partial X^j}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

となる．とくに

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right]=0$$

である．

2011 年 11 月 8 日 (2011 年 11 月 15 日訂正)

■内積による接空間と余接空間の同一視　内積を用いると，接空間 T_pM と余接空間 T_p^*M を（座標によらずに）自然に同一視できる．実際，$X \in T_pM$ に対して

$$X^\flat \colon T_pM \ni Y \longmapsto X^\flat(Y) = \langle X, Y\rangle \in \boldsymbol{R}$$

とおくと $X^\flat$ は線型写像であるから $X^\flat \in T_p^*M$ である．このようにして写像

$$\flat \colon T_pM \ni X \longmapsto X^\flat \in T_p^*M$$

が定義されるが，これは線型写像となることが容易にわかる．さらに $\mathrm{Ker}(\flat) = \{0\}$ となり，T_pX と T_p^*X は同じ次元なので，$\flat$ は全単射，すなわち，線型同型写像となっている．そこで $\flat$ の逆写像を

$$\sharp \colon T_p^*M \ni \alpha \longmapsto \alpha^\sharp \in T_pM$$

と書く．この写像 $\sharp$, $\flat$ の定義は局所座標を用いていないので，リーマン多様体上自然に定義される．

局所座標 (x^j) に関する g の成分を g_{ij} とおくと，行列 (g_{ij}) は正則行列なので，逆行列が存在する．それを (g^{ij}) (添字が上) と書く：

$$\sum_{k=1}^m g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

このとき，

$$\begin{aligned} X &= \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \text{に対して} \qquad X^\flat = \sum_{i,j} g_{ij} X^j dx^i, \\ \alpha &= \sum_j \alpha_j dx^j \qquad \text{に対して} \qquad \alpha^\sharp = \sum_{i,j} g^{ij}\alpha_i \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

が成り立つ．

■リーマン接続

定理 5.1. M 上の二つのベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対してベクトル場 $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ を対応させる写像

$$\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

で次を満たすものがただ一つ存在する：

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
- $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

証明： 一意性を示す：結論を満たす ∇ が存在したとする．このとき

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ．この第一式と第二式の和から第三式を引くと，

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &+ Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle \\ &= \langle 2\nabla_X Y + \nabla_Y X - \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle \\ &= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle + \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle \end{aligned}$$

となるから，

$$(5.2)\quad 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle [X,Y], Z\rangle - \langle [X,Z], Y\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle$$

を得る．とくに，1 次微分形式 $\varphi \in \Gamma(T^*M)$ を

$$\varphi\colon Z \longmapsto \frac{1}{2}\big(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle\big)$$

で定義すると，$\nabla_X Y = \varphi^{\#}$ である．φ は，M の可微分多様体としての構造（交換子積）とリーマン計量 g だけから決まるから，∇ の一意性が従う．さらに $\nabla_X Y = \varphi^{\sharp}$ とおくことで，存在も言えた.

補題 5.2. 定理 5.1 の ∇ は次の性質をもつ：

(1) $\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ は双線型写像.
(2) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ と $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$.
(3) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ と $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.
(4) ベクトル場 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ が $X_1(p) = X_2(p)$ を満たしているならば $\nabla_{X_1}Y(p) = \nabla_{X_2}Y(p)$.

証明： 定理 5.1 の証明中の式 (5.2) から (1)–(3) は従う.
これらから (4) を示す：∇ の線型性から $X(p) = 0$ ならば $\nabla_X Y(p) = 0$ となることを示せば十分．$X = \sum X^j(\partial/\partial x^j)$ とおくと，$X(p) = 0$ より $X^j(p) = 0$. これと (2) より結論を得る.

定義 5.3. 一般に（リーマンとは限らない）多様体 M に対して，補題 5.2 の (1)–(3) を満たす $\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を M の（あるいは TM の）**線型接続** *linear connection* あるいは**アファイン接続** *affine connection* という．さらに定理 5.1 の 5.1 を満たすような ∇ を**捩れのない** *torsion free* 線型接続という.

一般に，多様体 M 上の捩れのない線型接続は無数に存在するが，リーマン計量が与えられているときは，その中から定理 5.1 により，標準的な線型接続が一つ指定されている，と考えることができる.

定義 5.4. 定理 5.1 で与えられる M 上の線型接続 ∇ を計量 g から定まる **リーマン接続** *Riemannian connection* あるいは**レビ・チビタ接続** *Levi-Civita connection* とよぶ.

多様体 M の局所座標系 $(x^1, \dots, x^m)$ に関する，リーマン計量 g の成分が (g_{ij}) と表されているとする:

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle.$$

このとき，(5.2) を用いれば

$$(5.3)\qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^m g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

となることがわかる．この Γ_{ij}^k をリーマン接続の**接続係数** あるいは**クリストッフェル記号** *Christoffel's symbol* とよぶ. [*1] リーマン接続は捩れのない接続であるから，

$$(5.4)\qquad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

が成り立つ.

[*1] 一般の線型接続の係数を Γ_{ij}^k，リーマン接続の係数（クリストッフェル記号）を $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ と書く流儀もある.

これを用いれば，局所座標系 (x^j) のもと，

$$\nabla_X Y = \sum X^j \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k Y^i \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{5.5}$$

となることがわかる．

例 5.5. $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な計量 g_0 に関するレビ・チビタ接続 D は

$$D_X Y = dY(X) = \bigl(dY^1(X), \dots, dY^n(X)\bigr)$$

で与えられる．ただし $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル場 Y は $Y = \bigl(Y^1, \dots, Y^n\bigr)$ と成分表示されているものとする．とくに $\boldsymbol{R}^n$ の標準座標に関するクリストッフェル記号は 0 である．

例 5.6. m 次元多様体 M から n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ （$n > m$）へのはめ込み $f\colon M \to \boldsymbol{R}^n$ を考え，$\boldsymbol{R}^n$ の標準計量から f によって誘導される M のリーマン計量を g とする．

各点 $p \in M$ に対して，微分写像

$$(df)_p\colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^n$$

は単射であるから，$(df)_p\bigl(T_pM\bigr)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の線型部分空間である．そこで，その直交補空間を N_p とすると N_p は $\boldsymbol{R}^n$ の $n-m$ 次元部分空間で

$$\boldsymbol{R}^n = T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n = (df)_p\bigl(T_pM\bigr) \oplus N_p \qquad N_p := \bigl((df)_p(T_pM)\bigr)^{\perp} \tag{5.6}$$

と直和分解できる．N_p を p におけるはめ込み f の**法空間** *normal space*，$N = \cup_p N_p$ を**法束** *normal bundle* とよぶ．

ベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\widetilde{Y} = df(Y)$ は対応

$$\widetilde{Y}\colon M \ni p \longmapsto (df)_p(Y) \in T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^n$$

を与えている．このような対応を，**写像 f に沿ったベクトル場**という．

さて，$\widetilde{Y} = (Y^1, \dots, Y^n)$ と成分表示すると，各 Y^j は M 上の関数であるから，

$$D_X\widetilde{Y} = \bigl(dY^1(X), \dots, dY^n(X)\bigr)$$

はまた f に沿った $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル場となるから，とくに各点 $p \in M$ で $D_X\widetilde{Y}(p) \in \boldsymbol{R}^n = T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n$．そこで直和分解 (5.6) にしたがって

$$D_X\widetilde{Y} = A + B \qquad A \in (df)_p(T_pM), \quad B \in N_p$$

と分解すると，$(df)_p$ が単射であることから，

$$D_X\widetilde{Y} = (df)_p(\nabla_X Y(p)) + \alpha_p(X,Y) \qquad \nabla_X Y(p) \in T_pM, \quad \alpha_p(X,Y) \in N_p \tag{5.7}$$

を満たす $\nabla_X Y(p)$ がただ一つ存在する．すると

$$M \ni p \longmapsto \nabla_X Y(p) \in T_pM$$

は滑らかなベクトル場を与えるので，写像

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

が定義された．この ∇ が (M,g) のリーマン接続に他ならない．

問題

5-1 (1) 公式 (5.3) を示しなさい.

(2) 座標系 (x^j) に関するクリストッフェル記号 $\{\Gamma^k_{ij}\}$ と座標系 (y^a) に関するクリストッフェル記号 $\{\widetilde{\Gamma}^c_{ab}\}$ との間には

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{a,b,c} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^b}{\partial x^j} \widetilde{\Gamma}^c_{ab} + \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{\partial x^k}{\partial y^c}$$

なる関係があることを示しなさい.

5-2 正の値をとる関数 $\rho \in \mathcal{F}(M)$ を用いて $\tilde{g} = \rho g$ とすると，$\tilde{g}$ はリーマン計量となる．これをリーマン計量 g と**共形的** *conformal* な計量という．g と $\tilde{g}$ のレビ・チビタ接続をそれぞれ $\nabla, \widetilde{\nabla}$ とすると，

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2} \big((X \log \rho) Y + (Y \log \rho) X - g(X,Y)(d \log \rho)^{\sharp} \big)$$

が成り立つことを示しなさい.

5-3 2 次元リーマン多様体 (M,g) の局所座標 (u^1,u^2) が**等温座標系** *isothermal coordinate system* あるいは**共形座標系**であるとは，この座標に関してリーマン計量 g が

$$g = e^{\sigma} \big((du^1)^2 + (du^2)^2 \big) \qquad \sigma = \sigma(u^1,u^2) \text{ は滑らかな関数}$$

と表せることである.（2 次元リーマン多様体の場合，任意の点の近傍で等温座標系をとることができる.）この座標に関するクリストッフェルの記号を求めよ.

5-4 $\boldsymbol{R}^2$ ($\boldsymbol{R}^3$) の極座標（球面座標，円筒座標）に関するクリストッフェル記号を求めよ.

5-5 例 5.6 に書いてあることを確かめなさい.

5-6 ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分多様体としての単位球面

$$S^n = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1 \}$$

を考える．ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準内積である．以下，$T_p\boldsymbol{R}^{n+1}$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同一視する．包含写像 $\iota\colon S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ ははめ込みであるが，とくに $d\iota\colon T_pS^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ は単射になるので，$T_pS^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ と見なしておく.

(1) $p \in S^n$ に対して,

$$T_pS^n = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \langle x, p \rangle = 0 \}, \qquad N_p = \boldsymbol{R}p$$

であることを示しなさい．ただし $p \in S^n$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルと見なしている.

(2) S^n のレビ・チビタ接続を ∇ とすると，任意の $X, Y \in S^n$ に対して

$$\nabla_X Y = dY(X) + \langle X, Y \rangle\, p$$

となることを示しなさい.

(3) S^n の様々な座標系について，クリストッフェル記号を計算しなさい.