2011 年 11 月 15 日 (2011 年 11 月 22 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 6

前回の補足

- 提出物についてのコメントを少し：(1) 一応，問題にある記号に合わせて答案を書いてください．座標の文字が違っていたり，座標変換の向きが逆だったりするものがありました．(2) 答案から推測しがたい文字，記号などは使わないでください．Levi-Civita 接続の一意性の証明の際に講義で用いた "φ" を説明なしに使ったかたがいらっしゃいましたが，一般的な記号とは思えないので，なんらかのコメントが必要でしょう．たとえば "講義資料何ページの..." など．(3) ひとつの語にいくつかの定義がある場合は，どれを用いたか明示してください．たとえば，$\boldsymbol{R}^3$ の球面座標は何通りかの表し方があるはずですので，どれを用いたかを明示する必要があります．

前回までの訂正

- 講義資料 4 ページ，脚注：$\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} k \\ ij \end{matrix}\right\}$
- 講義資料 6 ページ，問題 5-6: M と書いてあるのは S^n のことです．

質問と回答

質問： ∇ (ナブラ) は Δ (デルタ) の上下さかさまなようですが，$\triangle$ (ラプラシアン) と Δ は別のものですか? $\triangle$ (ラプラシアン) を alban (アルバン) と読んだりしますか?

お答え： 前半：ラプラシアンとデルタを別のフォントにする人もいますし，同じフォントにする人もいます．文脈依存です．後半：しません．

質問： T_pM と T_p^*M の同一視に使われる写像が $\#$, $\flat$ といった音楽で使われる記号なのはどうしてでしょうか.

お答え： $\boldsymbol{a} = \sum a^j(\partial/\partial x^j) \in T_pM$ に対応する T_p^*M の要素 α は $\alpha = \sum \alpha_j(dx^j)$, $\alpha_j = \sum g_{jk}a^k$ と表せます．このことを，"α は $\boldsymbol{a}$ の**添字を下げたもの**ということがあります．同様の状況で $a^j = \sum g^{jk}\alpha_k$ ですので，"$\boldsymbol{a}$ は α の**添字を上げたもの**" です．この下げる（上げる）に対応して $\#$ ($\flat$) を使うわけです．

6 曲率テンソル

■テンソル場 一般に，k 個の T_pM のテンソル積と l 個の T_p^*M のテンソル積から定まるベクトル束

$$TM^{\otimes k} \otimes T^*M^{\otimes l} = \overbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}^{k\text{ 個}} \otimes \overbrace{T^*M \otimes \dots T^*M}^{l\text{ 個}}$$

の切断を (k,l) **型テンソル場**という．以下の議論は，一般に (k,l) 型テンソル場に対して成り立つが，煩雑さを避けるため，特別なケースを考察する．

$T^*M \otimes T^*M$ **の場合** テンソル積の定義から，切断 $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ は双線型写像

$$\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M), \qquad \alpha(X,Y)(p) = \alpha_p(X_p, Y_p) \tag{6.1}$$

を与える．

補題 6.1. 双線型写像 $\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ が $\Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ の要素から (6.1) によって得られたものであるための必要十分条件は

$$\alpha(fX, Y) = \alpha(X, fY) = f\alpha(X,Y)$$

が成り立つことである．

$TM \otimes T^*M$ **の場合** 切断 $L \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$ を *1* **次変換**という．これは点 $p \in M$ に対して $L_p \in T_pM \otimes T_p^*M$ を与えるが，これは線型写像 $L_p\colon T_pM \to T_pM$ と見なすことができる．そこで，$TM \otimes T^*M$ のことを $\mathrm{Hom}(TM, TM)$ あるいは $\mathrm{End}(TM)$ と書くこともある．すると，

$$L\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \qquad L(X)_p = L_p(X_p) \tag{6.2}$$

が定まる．

補題 6.2. 双線型写像 $\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が $\Gamma(\mathrm{End}(TM))$ の要素から (6.2) によって得られたものであるための必要十分条件は

$$L(fX) = fL(X) \qquad (f \in \mathcal{F}(M))$$

が成り立つことである．

例 6.3. リーマン計量 g は $(0,2)$ 型テンソル場である．そこで g のことを**計量テンソル**と呼ぶこともある．

例 6.4. 二つの線型写像 $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ を

$$(X,Y) \longmapsto [X,Y], \qquad (X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

で定めると，これらは M 上のテンソル場を定めない．

例 6.5. 多様体 M 上の線型接続 ∇ に対して

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

2011 年 11 月 15 日 (2011 年 11 月 22 日訂正)

によって写像 $T\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を定義すると，これは $(1,2)$ 型テンソル場を与える．T を接続 T の**捩率テンソル** *torsion tensor* という．前回述べたようにリーマン接続の捩率テンソルは 0 である．このように $T=0$ となる接続のことを**捩れのない** *torsion free* 接続，あるいは対称接続という．

■交代形式　有限次元線型空間 V の双対空間 V^* の k 個のテンソル積 $W=V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ を考える．$\alpha\in W$ が**交代的**である，とは，任意の $X_1,\dots,X_k\in V$ と k 文字の置換 $\mu\in S_k$ に対して

$$\alpha(X_{\mu(1)},\dots,X_{\mu(k)})=(\operatorname{sign}\mu)\alpha(X_1,\dots,X_k)$$

が成り立つことである．ただし $\operatorname{sign}\mu$ は置換の符号である．交代的な W の要素を k **次交代形式**とよび，その全体を

$$\wedge^k(V^*)=\{\alpha\in\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{k\text{ 個}}\mid \alpha\text{ は交代的}\}$$

と書く．

■微分形式　ベクトル空間 T_pM 上の k 次交代形式全体の空間 $\wedge^k(T_p^*M)$ から多様体 M 上のベクトル束 $\wedge^k(T^*M)$ をつくることができる．このベクトル束の切断を k 次**微分形式**という．k 次微分形式全体の集合を

$$\Omega^k(M):=\Gamma(\wedge^k(T^*M))$$

と書く．

例 6.6. 今，(M,g) は向きづけられた（向きづけ可能であって，一つ向きが指定された）リーマン多様体とする．向きに同調した座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ をとり，T_pM の基底 $\{\partial/\partial x^j\}$ の双対基底を $\{dx^1,\dots,dx^m\}$ と書いておく．このとき，

$$\omega_g:=\sqrt{g}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,\qquad g=\det[g_{ij}]\qquad g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$$

とおくと，ω_g は向きに同調する座標のとり方によらない．この ω_g を M のリーマン計量 g から定まる**体積形式** *volume form* とよぶ．

例 6.7. 多様体 M 上の捩れのない二つの線型接続 $\nabla,\widetilde{\nabla}$ をとる．このとき

$$A(X,Y):=\widetilde{\nabla}_XY-\nabla_XY$$

により $A\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を定義すると，A は $(1,2)$ 型テンソルで，

$$A(X,Y)=A(Y,X)$$

が成り立つ．したがって A はベクトル束

$$S^2(T^*M)\otimes TM$$

の切断である．ただし $S^2(T^*M)$ は対称な $(0,2)$-テンソル束を表す．このような $S^2(T^*M)\otimes TM$ の切断を TM **に値をとる対称 2 次形式**とよび，そのようなものの全体を $S^2(M,TM)$ と書くことがある．

命題 6.8. 多様体 M の捩れのない線型接続 ∇ をひとつ固定する．このとき，任意の $A \in \Omega^2(M, TM)$ に対して

$$\nabla^A_X Y := \nabla_X Y + A(X, Y)$$

とおくと，∇^A もまた M 上の捩れのない線型接続である．

とくに，M 上の捩れのない線型接続は，$\Omega^2(M, TM)$ を付随するベクトル空間にもつような（無限次元）アファイン空間となっている．

■ベクトル場の共変微分　多様体 M 上に線型接続 ∇ が与えられているとき，ベクトル場 X, Y に対して $\nabla_X Y$ を Y の X 方向への**共変微分** *covariant derivative* ということがある．前回みたように

補題 6.9. ベクトル場 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ が $X_1(p) = X_2(p)$ を満たしているならば $\nabla_{X_1} Y(p) = \nabla_{X_2} Y(p)$.

したがって，$Y \in \mathfrak{X}(M)$, $v \in T_pM$ に対して, $X_p = v$ となるベクトル場 X を一つとり

$$\nabla_v Y = \nabla_X Y(p) \in T_pM$$

とおくことにより，「Y の p における v 方向の共変微分」を定めることができる．

とくに

$$\nabla Y : T_pM \ni v \longmapsto \nabla_v Y \in T_pM$$

とすれば，∇Y は T_pM の線型変換を与えている．すなわち

$$\nabla Y \in \Omega^1(M, TM)$$

であることがわかる．これを Y の共変微分ということもある．

局所座標 (x^j) に関する接続の係数を Γ^k_{ij} とする：

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

このとき，

$$\nabla_v Y = \sum_{j,k} v^j \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \sum_l \Gamma^k_{jl} Y^l \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad \left(v = \sum v^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

である．

共変微分 ∇Y が恒等的に 0 となるとき，ベクトル場 Y は接続 ∇ に関して**平行** *parallel* であるといわれる．

■テンソル場の共変微分　次に，線型接続 ∇ によるテンソル場の共変微分を定義する．再び記号の煩雑さを避けるため，特別な場合を見ることで，一般の場合を悟ってほしい．

(0,2) 型テンソルの場合　$\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ を $(0, 2)$ 型テンソルとする．このとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_X \alpha \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ を

$$\nabla_X \alpha(Y, Z) := X\big(\alpha(Y, Z)\big) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

で定義する．すると，補題 6.1 より $\nabla_X \alpha$ はまた $(0, 2)$ 型テンソルである．これを α の ∇ に関する X 方向の共変微分という．とくに $\nabla_{fX} \alpha = f \nabla_X \alpha$ が言えるから，$\nabla \alpha$ は $(0, 3)$ 型テンソルである．これを α の共変微分という．

局所座標 (x^j) に関する α の成分を α_{ij} と書く：

$$\alpha_{ij} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

このとき

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\alpha = \sum\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\alpha_{ij} - \Gamma^l_{kj}\alpha_{il} - \Gamma^l_{ik}\alpha_{lj}\right)dx^i \otimes dx^j$$

となる．このことを

$$\alpha_{ij;k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\alpha_{ij} - \sum_l\left(\Gamma^l_{kj}\alpha_{il} + \Gamma^l_{ik}\alpha_{lj}\right)$$

と書くことがある．

とくに，$\alpha \in \Omega^2(M)$ の場合，すなわち α が交代的であるとき，$\nabla_X\alpha$ もまた交代的になる．一般に k 次微分形式の共変微分は k 次微分形式である．

命題 6.10. リーマン多様体 (M, g) のリーマン接続を ∇ とする．

- リーマン計量は ∇ に関して平行である．
- とくに M が向きづけられているとき，g から誘導される体積要素 ω_g（例 6.6）は ∇ に関して平行である．

(1,1) 型テンソルの場合　$(1,1)$ 型テンソル $L \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ に対して，

$$(\nabla_X L)(Y) := \nabla_X\big(L(Y)\big) - L(\nabla_X Y)$$

と定めると，$\nabla_X L \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ となる．これにより L の共変微分 ∇L を求めることができる．

■線型接続の曲率テンソル　多様体 M 上に捩れのない線型接続 ∇ が与えられているとき，$\boldsymbol{R}\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ を

$$R(X, Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{6.3}$$

と定める．

補題 6.11. 式 (6.3) で与えられる R は M 上の $(1,3)$ 型テンソル場を与える．

証明： 関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して

$$R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) = f\big(R(X, Y)Z\big)$$

が成り立つ．

テンソル場 R を接続 ∇ の**曲率テンソル** *curvature tensor*，あるいは単に**曲率**という．

命題 6.12. 捩れのない線型接続 ∇ の曲率テンソル R は次を満たす：

(1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$.
(2) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
(ビアンキの第一恒等式 Bianchi's first identity).

(3) $(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0$
(ビアンキの第二恒等式).

証明： (1) は定義から直接わかる．(2) は，定義を直接書き下し，ブラケット積に関するヤコビの恒等式

(6.4) $$[X,[Y,Z]] + [Y,[X,Z]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

を用いればわかる．さらに (3) も定義を直接書き下せば（$T=0$ を用いて）わかる．

曲率テンソルの成分表示を与えよう．記号の煩雑さを避けるために，局所座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ から誘導される基底ベクトル場 $\partial/\partial x^j$ を ∂_j と書き，接続 ∇ の接続係数を Γ^k_{ij} と書く：

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma^k_{ji}\partial_k \qquad \Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}.$$

曲率テンソルの成分を

(6.5) $$R(\partial_i,\partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^m R^l_{kji}\partial_l$$

と書く[*1] と，これは接続係数を用いて

(6.6) $$R^l_{kji} = \Gamma^l_{kj,i} - \Gamma^l_{ki,j} + \sum_m \left(\Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj}\right) \qquad \Gamma^l_{kj,i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{kj}.$$

が成り立つ．

■アファイン座標系　多様体 M 上に捩れのない線型接続 ∇ が与えられているとする．このとき，∇ の接続係数 Γ^k_{ij} がすべて 0 になるような M の座標系を**アファイン座標系** *affine coordinate system* という．

例 6.13. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の標準計量 g_0 に関するリーマン接続を D と書くと，標準座標系 $(x^1,\dots,x^n)$ に対して

$$D_X Y = \sum_{j,l} X^j \frac{\partial Y^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l} \qquad X = \sum X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

となり，とくに $D_{\nabla_j}\nabla_k = 0$ となる．すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ の標準座標系は D に関するアファイン座標系である．一方，たとえば $\boldsymbol{R}^2$ の極座標系はアファイン座標系ではない．

どんな線型接続に対してもアファイン座標系が存在するわけではない．

定理 6.14. 多様体 M 上の捩れのない線型接続 ∇ が与えられているとき，M の各点の近傍で ∇ に関するアファイン座標系が存在するための必要十分条件は，∇ の曲率テンソルが 0 となることである．

曲率テンソルが 0 となるような接続 ∇ を**平坦な接続** *flat connection* という．定理 6.14 を証明するためには次の事実を用いる．[*2]：

[*1] 曲率テンソルの添字の付け方は書物によって様々である．複数の書物を参考にするときは注意されたい．ここでは「∂_k を ∂_j, ∂_i で微分する」という気持でこの順序にした．

[*2] 「フロベニウスの定理」はいろいろなバージョンがある．たとえばベクトル場の可積分性に関するフロベニウスの定理は多様体の入門書なら必ず記述があるが，ここに挙げる定理はその一つのヴァリエーションである．

補題 6.15 (フロベニウスの定理). $\boldsymbol{R}^n$ の単連結な開集合 D 上で定義された n 次正方行列に値をもつ n 個の滑らかな関数 $A_1, \dots, A_n$ が

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - A_i A_j + A_j A_i = O \qquad (1 \leqq i, j \leqq n) \tag{6.7}$$

を満たしているとする．このとき，任意の点 $p \in D$ と任意の n 次正則行列 P_0 に対して，D 上で定義された n 次正則行列に値をとる滑らかな関数 P で $P(p) = P_0$ かつ

$$\frac{\partial P}{\partial x^j} = P A_j \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{6.8}$$

を満たすものがただ一つ存在する．逆に (6.8) を満たす正則な P が存在するならば，A_i は (6.7) を満たす．

式 (6.7) は，(6.8) の両辺を x_i で微分した式と，その i, j を入れ替えた式をつくり，偏微分の順序交換可能性に注意して得られるものであることに注意しておく．(6.7) を (6.8) の**可積分条件**という．

■リーマン曲率テンソル　以下，(M, g) はリーマン多様体，g によって得られる内積を $\langle\ ,\ \rangle$, ∇ を (M, g) のリーマン接続とする．このとき，∇ の曲率テンソル R を**リーマン曲率テンソル**あるいは，単に曲率テンソルとよぶ．前回見たようにリーマン計量により TM と T^*M は同一視できるから，$(1, 3)$ 型テンソル R は $(0, 4)$ 型テンソルと同一視できる．これも（困ったことに）同じ R で表し，リーマン曲率テンソルという：

$$R(X, Y, Z, T) := \langle R(X, Y)Z, T\rangle\,. \tag{6.9}$$

命題 6.16. リーマン曲率テンソルは次の性質を持つ：

(1) $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$.
(2) $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$.
(3) $(\nabla_X R)(Y, Z, T, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, T, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, T, W) = 0$.
(4) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$.

証明： (1) の第 1 の等式は命題 6.12 の (1), (2) は命題 6.12 の (2), (3) は命題 6.12 の (3) と，計量 g が ∇ に関して平行であることからわかる．また，(1) の第 2 式は，

$$\langle R(X, Y)Z, T\rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, T\rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, T\rangle - \left\langle \nabla_{[X,Y]} Z, T\right\rangle$$

に，g の平行性 $\langle \nabla_V W, U\rangle = V\langle W, U\rangle - \langle W, \nabla_V U\rangle$ を使えば得られる．
最後に (4) を示す．(2) から

$$\begin{aligned}
R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0\\
R(T, X, Y, Z) + R(Y, T, X, Z) + R(X, Y, T, Z) = 0\\
R(T, Y, Z, X) + R(Y, Z, T, X) + R(Z, T, Y, X) = 0\\
R(T, Z, X, Y) + R(Z, X, T, Y) + R(X, T, Z, Y) = 0
\end{aligned}$$

を得るが，これらを加えあわせて (1) および (2) を用いれば結論が得られる．

いま（接続 ∇ の曲率テンソルとは限らない）$(0, 4)$ 型テンソル R が命題 6.16 の (1)–(3) の性質を満たしているとき，R は**曲率型テンソル**という．

問題

6-1 補題 6.1 を証明しなさい.

6-2 例 6.7 を確かめなさい.

6-3 命題 6.10 を証明しなさい.

6-4 補題 6.11 の証明を完全にしなさい.

6-5 フロベニウスの定理（とポアンカレの補題）を用いて定理 6.14 を証明しなさい.
ヒント：座標系 (x^j) に関する接続係数 $\{\Gamma^k_{ij}\}$ と座標系 (y^a) に関する接続係数 $\{\widetilde{\Gamma}^c_{ab}\}$ との間の関係

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{a,b,c} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^b}{\partial x^j} \widetilde{\Gamma}^c_{ab} + \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{\partial x^k}{\partial y^c}$$

を用いる.