2011 年 11 月 22 日 (2011 年 11 月 29 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 7

前回の補足

- 問題 6-1：一般に双線形写像 $\alpha\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathcal{F}(M)$ がが与えられたときに $\alpha_p(X_p,Y_p)$ が well-defined であるとは限りません．仮定を用いて，これが well-defined であることを示すのが問題です．

前回までの訂正

- 講義資料 6, 2 ページ，4 行目：
  (k,l) 型テンソル場に対して上で述べたことを一般化したいが，記号が煩雑になることを避けるため，次の 2 つの場合を見て一般的にはどうなるかを見てとって欲しい．
  ⇒ 以下の議論は，一般に (k,l) 型テンソル場に対して成り立つが，煩雑さを避けるため，特別なケースを考察する．
- 講義資料 6, 3 ページ，下から 6 行目：$A(X,Y)=-A(Y,X)$ ⇒ $A(X,Y)=A(Y,X)$
- 講義資料 6, 3 ページ，下から 4 行目：
  $\wedge^2(T^*M)\otimes TM$ の切断である．
  ⇒ $S^2(T^*M)\otimes TM$ の切断である．ただし $S^2(T^*M)$ は対称な $(0,2)$-テンソル束を表す．
- 講義資料 6, 3 ページ，下から 2 行目：
  このような $\wedge^2(T^*M)\otimes TM$ の切断を TM **に値をとる** *2* **次微分形式**とよび，そのようなものの全体を $\Omega^2(M,TM)$ と書く...
  ⇒ このような $S^2(T^*M)\otimes TM$ の切断を TM **に値をとる対称 2 次形式**とよび，そのようなものの全体を $S^2(M,TM)$ と書く...
- 講義資料 6, 7 ページ，命題 6.16 (1): $R(X,Y,Z,T)=)-R(Y,X,Z,T)\ldots$ ⇒ $R(X,Y,Z,T)=-R(Y,X,Z,T)$ ...

7 曲率テンソルと断面曲率

■リーマン曲率テンソル リーマン多様体 (M,g) の計量 g によって得られる内積を $\langle\ ,\ \rangle$, ∇ を (M,g) のリーマン接続とする．このとき，∇ の曲率テンソル R を**リーマン曲率テンソル**あるいは，単に曲率テンソルとよぶ．第 5 回講義で見たように，リーマン計量により TM と T^*M は同一視できるから，$(1,3)$ 型テンソル R は $(0,4)$ 型テンソルと同一視できる．これも（困ったことに）同じ R で表し，リーマン曲率テンソルという：

$$R(X,Y,Z,T) := \langle R(X,Y)Z,T\rangle\,. \tag{7.1}$$

命題 7.1 (曲率テンソルの対称性)**.** リーマン曲率テンソルは次の性質を持つ：

(1) $R(X,Y,Z,T) =) - R(Y,X,Z,T) = -R(X,Y,T,Z)$.
(2) $R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0$.
(3) $(\nabla_X R)(Y,Z,T,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,T,W) + (\nabla_Z R)(X,Y,T,W) = 0$.
(4) $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$.

証明： (1) の第 1 の等式は命題 6.12 の (1), (2) は命題 6.12 の (2), (3) は命題 6.12 (3) と，計量 g が ∇ に関して平行であることからわかる．また，(1) の第 2 式は,

$$\langle R(X,Y)Z,T\rangle = \langle \nabla_X\nabla_Y Z,T\rangle - \langle \nabla_Y\nabla_X Z,T\rangle - \left\langle \nabla_{[X,Y]}Z,T\right\rangle$$

に，g の平行性 $\langle \nabla_V W,U\rangle = V\langle W,U\rangle - \langle W,\nabla_V U\rangle$ を使えば得られる．
最後に (4) を示す．(2) から

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) &= 0\\
R(T,X,Y,Z) + R(Y,T,X,Z) + R(X,Y,T,Z) &= 0\\
R(T,Y,Z,X) + R(Y,Z,T,X) + R(Z,T,Y,X) &= 0\\
R(T,Z,X,Y) + R(Z,X,T,Y) + R(X,T,Z,Y) &= 0
\end{aligned}$$

を得るが，これらを加えあわせて (1) および (2) を用いれば結論が得られる．

いま（接続 ∇ の曲率テンソルとは限らない） $(0,4)$ 型テンソル R が命題 7.1 の (1), (2), (4) の性質を満たしているとき，R は**曲率型テンソル**という．

補題 7.2. 2 つの曲率型テンソル R, Q が

$$R(X,Y,Y,X) = Q(X,Y,Y,X) \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

を満たしているならば $R = Q$ である．

証明： $R(X+Z,Y,Y,X+Z) = Q(X+Z,Y,Y,X+Z)$ を展開すれば，$R(X,Y,Y,Z) = Q(X,Y,Y,Z)$ を得る．以後，パズルと思って頑張ると結論が得られる．

2011 年 11 月 22 日 (2011 年 11 月 29 日訂正)

■断面曲率 リーマン多様体 (M,g) の点 p における接空間 T_pM の 2 次元部分空間 Π_p を一つとる．Π_p の基底 $\{X,Y\}$ に対して

$$K(\Pi_p) := \frac{R(X,Y,Y,X)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \tag{7.2}$$

とすると，$K(\Pi_p)$ は Π_p の基底のとり方によらない．ただし R はリーマン曲率である．この $K(\Pi_p)$ を (M,g) の p における Π_p に関する**断面曲率** *sectional curvature* という．

一般に $\boldsymbol{R}^n$ の 2 次元部分空間全体の集合 $\mathrm{Gr}_2(\boldsymbol{R}^n)$ には $(2n-3)$ 次元のコンパクト多様体の構造が入る．これを $\boldsymbol{R}^n$ 上のの 2-グラスマン多様体という．多様体の各点で T_pM の 2-グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(T_pM)$ を考えることにより，ファイバーが $\mathrm{Gr}_2(\boldsymbol{R}^n)$ となるようなファイバー束（未定義）を考えることができる．これを $\mathrm{Gr}_2(M)$ と書くことにすれば，断面曲率 K は $\mathrm{Gr}_2(M)$ 上で定義された実数値関数である．

補題 7.2 より，断面曲率を指定することは曲率テンソルを指定することと同値である．

例 7.3. 2 次元リーマン多様体 (M,g) の断面曲率は M 上の関数になる．いま，局所座標系 $(u^1,u^2)=(u,v)$ に関して，計量 g が

$$g = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

で与えられているとき，断面曲率 K は

$$\begin{aligned} K = \frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2)}{4(EG-F^2)^2} &+ \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+ \frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)} \end{aligned}$$

となる．これは，曲面論におけるガウス曲率を第一基本量で表す式（ガウスの驚異の定理，たとえば梅原・山田「曲線と曲面」（裳華房）99 ページ）である．

そこで，2 次元リーマン多様体の断面曲率のことを**ガウス曲率**ということもある．

命題 7.4. リーマン多様体 (M,g) の断面曲率が定数 k ならば，曲率テンソルは

$$R(X,Y,Z,T) = k\bigl(\langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle\bigr)$$

を満たす．

証明： 結論の式の右辺は曲率型テンソルを与えている．さらに，断面曲率が k であることから $Z=Y, T=X$ のときは結論の等式が成り立つ．したがって，補題 7.2 より結論を得る．

断面曲率が一定のリーマン多様体を**定曲率リーマン多様体**とよぶ．

■リッチ曲率とスカラ曲率 リーマン多様体 (M,g) の点 p における接空間 T_pM の 1 次変換

$$\rho\colon T_pM \ni Z \longmapsto \rho(Z) \in T_pM$$

のトレースとは，T_pM の基底 $\{E_i\}$ に対して

$$\operatorname{tr}\rho = \sum_i \rho_i(E_i) \qquad \rho(X) = \sum_i \rho_i(X)E_i$$

で定まるスカラ $\operatorname{tr}\rho$ である．これは基底のとり方によらない．各点ごとにトレースとることにより，$(1,1)$ 型テンソルから関数をつくることができる．このような操作を**縮約** *contraction* という．

リーマン多様体 (M,g) 上のベクトル場 X, Y を固定すれば，$\rho\colon Z \longmapsto R(Z,X)Y$ は $(1,1)$ 型テンソルを与える．このトレースを

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \operatorname{tr}\{Z \longmapsto R(Z,X)Y\} \tag{7.3}$$

と書けば，これは双線型写像 $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathcal{F}(M)$ を与えるが，とくに，$(0,2)$ 型テンソルになる．これを**リッチ・テンソル** *Ricci tensor* という．命題 7.1 より Ric は対称であることがわかる：

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X).$$

とくに Ric は T_pM 上の 2 次形式を与える．T_pM 上の単位ベクトル v に対して

$$\mathrm{Ric}(v) := \mathrm{Ric}(v,v)$$

を v 方向の**リッチ曲率** *Ricci curvature* という．リーマン曲率を (**??**) のように成分表示すれば，

$$R_{ij} = \mathrm{Ric}(\partial_i,\partial_j) = \sum_l R^l_{jil} \tag{7.4}$$

である．

リッチ曲率は $(0,2)$ テンソルであるが，計量を用いて TM と T^*M を同一視すれば $(1,1)$ テンソルと見なすことができる：

$$\mathrm{Ric}^\#\colon X \longmapsto \bigl(\mathrm{Ric}(X,\cdot)\bigr)^\#.$$

このトレース S を**スカラ曲率** *scalar curvature* という．

$$S = \operatorname{tr}\mathrm{Ric}^\#\,. \tag{7.5}$$

局所的には

$$S = \sum_i \mathrm{Ric}(E_i,E_i) = \sum_{i,j} g^{ij}R_{ij}$$

である．ただし $\{E_i\}$ は T_pM の正規直交基底，(g^{ij}) はリーマン計量の（正規直交基底とは限らない基底に関する）成分 (g_{ij}) の逆行列である．

問題

7-1 命題 7.1 を証明しなさい．

7-2 補題 7.2 を証明しなさい．

7-3 式 (7.2) の右辺は Π_p の基底のとり方によらないことを示しなさい．

7-4 例 7.3 を確かめなさい．とくに等温座標系 $g = e^{2\sigma}(du^2+dv^2)$ のときは

$$K = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv})$$

であることを示しなさい．さらに，

$$g_+ = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}(du^2+dv^2), \qquad g_- = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}(du^2+dv^2)$$

のガウス曲率はそれぞれ 1 と -1 であることを確かめなさい．

7-5 2 次元リーマン多様体のスカラ曲率はガウス曲率の 2 倍であることを示しなさい．