2011 年 11 月 29 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 8

お知らせ

- 今回は，都合により提出物の受付をいたしません．申し訳ありません．

前回までの訂正

- 講義資料 7, 2 ページ，下から 4 行目：(1)–(3) の性質 $\Rightarrow$ (1), (2), (4) の性質

授業に関する御意見

- もし時間があれば 7-2 のパズルのヒントをください． **山田のコメント：** あとで，覚えていたら．
- 先生はパズルがすきですか? **山田のコメント：** あまり

8 定曲率空間

■曲線に沿うベクトル場と共変微分 多様体 M から多様体 N への可微分写像 $f\colon M \to N$ に対して，微分写像 $df\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ をまた f_* と書くことがある．この節では，式が「ごちゃごちゃ」になることを避けるために後者の記号を用いる．

数直線上の区間 I から多様体 M への可微分写像を M の**曲線**という．パラメータ（I の座標）を t と書くとき，曲線 $\gamma\colon I \to M$ に対して

$$\dot\gamma(t) := \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t \in T_{\gamma(t)}M$$

を γ の**速度ベクトル** という．M の局所座標 (x^j) を用いて $\gamma(t) = \bigl(x^j(t)\bigr)$ と書けば，

$$\dot\gamma(t) = \sum_j \frac{dx^j}{dt}(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)} = \sum_j \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

である．

曲線 $\gamma\colon I \to M$ に**沿うベクトル場**とは，可微分写像 $X\colon I \to TM$ で $\pi\circ X = \gamma$ （$\pi\colon TM \to M$ はベクトル束の射影）を満たすものである．局所座標を用いれば，

$$X = \sum_j X^j(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)} \qquad X^j\colon I \overset{C^\infty}{\to} \boldsymbol{R} \tag{8.1}$$

と書ける．とくに，速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ は γ に沿うベクトル場を与えている．

多様体 M 上に（捩れのない）線型接続 ∇ が与えられているとする．座標系 (x^j) に関する接続係数を Γ_{ij}^k とするとき，曲線 $\gamma(t)$ に沿う (8.1) のようなベクトル場 X の $\dot\gamma$ 方向の**共変微分**を

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}X := \sum_j\left(\frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k}\Gamma_{ik}^j\frac{dx^i}{dt}X^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)} \tag{8.2}$$

と定める．

■平行移動 曲線 $\gamma\colon I \to M$ に沿うベクトル場 X が (接続 ∇ に関して) γ に沿って**平行** *parallel* である，とは $\nabla_{d/dt}X = 0$ が恒等的に成り立つことである．

命題 8.1. 多様体 M 上の可微分曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ と，任意の $v \in T_{\gamma(a)}M$ に対して, γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$ で $X(a) = v$ となるものが唯一存在する．

証明： $X = (X^1,\dots,X^m)$ は線型常微分方程式

$$\frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k}\Gamma_{ik}^j\frac{dx^i}{dt}X^k = 0 \qquad (j = 1,\dots,m) \tag{8.3}$$

の初期条件 $X^j(a) = v^j$ (v^j は v の成分) を満たす解である．

2011 年 11 月 29 日

定義 8.2. 多様体 M 上の曲線 $\gamma\colon [a,b]\to M$ の始点を $p=\gamma(a)$, $q=\gamma(b)$ とおくとき，写像

$$P_\gamma\colon T_pM \ni v \longmapsto P_\gamma v = X(b)\in T_qM \qquad (X \text{ は命題 8.1 の結論に現れるベクトル場})$$

を γ **に沿う平行移動**という．

命題 8.3. 平行移動 $P_\gamma\colon T_pM\to T_qM$ は線型同型写像である．

証明： 方程式 (8.3) は線型方程式であるから線型性が従う．さらに γ の逆向きの曲線は P_γ の逆写像を与えるので，同型が言える．

命題 8.4. 曲線 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ に対して $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$ とおく．このとき $Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_v Y = \lim_{t\to 0}\frac{P_t^{-1}Y(\gamma(t)) - Y(p)}{t}$$

である．ただし P_t は $\gamma|_{[0,t]}$ に関する平行移動である．

■測地線　以下では，リーマン多様体 (M,g) のリーマン接続について考える．

定義 8.5. 曲線 $\gamma\colon I\to M$ が**測地線** *geodesic* である，とは $\nabla_{d/dt}\dot\gamma = 0$ が成り立つことである．

M の局所座標系 (x^j) を用いると，$\gamma=(x^j(t))$ が測地線であるための条件は

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \sum_k \Gamma^j_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \qquad (j=1,\dots,m) \tag{8.4}$$

である．これを**測地線の方程式**という．これは，平行移動の方程式と違って非線型なので，解が大域的に存在するとは限らない．解の存在と一意性の定理より

命題 8.6. 任意の点 $p\in M$ と $v\in T_pM$ に対して，$\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$ となる測地線 $\gamma\colon(-a,b)\to M$ がただ一つ存在する．ただし a, b は十分小さい正の数である．

命題 8.7. 測地線 $\gamma(t)$ の速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ の大きさは一定である．

証明： ∇ がリーマン接続であることから

$$\frac{d}{dt}\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 2\left\langle\nabla_{d/dt}\dot\gamma,\dot\gamma\right\rangle = 0$$

である．

とくに「測地線である」ということは曲線のパラメータの取り方に依存するが，$\gamma(t)$ が測地線なら，定数 k に対して $\gamma(kt)$ も測地線である．以下，とくに断らない限り，測地線 γ は弧長によりパラメータづけられているとする：$\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle=1$.

定理 8.8. リーマン多様体 M 上の 2 点 p, q を結ぶ曲線のうち，長さが最小のもの（すなわち長さ $d(p,q)$ の曲線）は測地線である．

証明は後回しにする．定理 8.8 の仮定を満たす測地線 γ を p と q を結ぶ**最短測地線**という．

定理 8.9 (Hopf-Rinow の定理)**.** リーマン多様体 (M,g) に対して，次は同値である：

(1) リーマン計量から定まる距離 d に関して (M,d) は完備である．
(2) M 上の一つの点 p を固定したとき，任意の $v\in T_pM$ に対して $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$ となる測地線 γ の定義域が $\boldsymbol{R}$ 全体まで拡張される．
(3) M 上の**任意の**点 p と任意の $v\in T_pM$ に対して $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$ となる測地線 γ の定義域が $\boldsymbol{R}$ 全体まで拡張される．
(4) M 上の任意の相異なる 2 点 p, q を結ぶ最短測地線が存在する．
(5) M 上の一つの点 p を固定したとき，閉距離球 $\{q\,|\,d(p,q)\leqq r\}$ はコンパクト．
(6) M 上の，任意の発散する道の長さは無限大である．

■空間型 (1) —ユークリッド空間

定義 8.10. 完備なリーマン多様体で，断面曲率が一定であるようなものを**空間型** *space form* という．

例 8.11. ユークリッド空間 $(\boldsymbol{R}^n,g_0)$ のリーマン接続（レビ・チビタ接続）を D とすると，標準座標系に関して $\Gamma_{ij}^k=0$ となっている．すなわち，標準座標系はアファイン座標系となっているから，D の曲率テンソルは消える．したがって $\boldsymbol{R}^n$ の断面曲率は恒等的に 0 となる．また，測地線が直線となるので，Hopf-Rinow の定理より $\boldsymbol{R}^n$ は完備.

したがって，$\boldsymbol{R}^n$ は単連結かつ平坦な空間型である．

■写像に沿う共変微分　平坦でない空間型を具体的に調べるために，曲線に沿う共変微分を一般化する．

定義 8.12. 多様体 M から N への可微分写像 $f\colon M\to N$ に対して, f に沿うベクトル場とは，可微分写像

$$X\colon M\to TN \qquad (\pi\circ X=f)$$

のことである．

さらに，$p\in M$, $v\in T_pM$ に対して $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$ を満たす M 上の曲線 γ を用いて

$$\nabla_vX=\nabla_{d/dt}X\circ\gamma$$

と定める．右辺は γ の取り方によらない.

補題 8.13. 定義 8.12 の状況で，N の接続 ∇ の捩率が消えているなら,

$$\nabla_Xf_*Y-\nabla_Yf_*X=f_*[X,Y]$$

が成り立つ.

■球面　正の定数 r に対して

$$M=S^n(r):=\left\{\boldsymbol{p}=(p^1,\dots,p^{n+1})\,\middle|\,\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle=\sum_{j=1}^{n+1}(p^j)^2=r^2\right\}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$$

とおくと，これはユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分多様体である．$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の計量から誘導される $S^n(r)$ の計量を g とする．

点 $\boldsymbol{p} \in M$ における接空間 $T_{\boldsymbol{p}}M$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内のベクトル $\boldsymbol{p}$ の直交補空間である．すなわち，次の直交直和分解

$$\boldsymbol{R}^{n+1} = T_{\boldsymbol{p}}M \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{p} \tag{8.5}$$

がある．

ベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ は，包含写像 $\iota\colon S^n(r) \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ に沿ったベクトル場である．ユークリッド空間の標準接続を D と書き，ベクトル場 $Y \in T_pM$ に対して，$D_Y X$ を (8.5) にしたがって

$$D_Y X := \nabla_Y X + h(X,Y)\boldsymbol{p} \qquad \nabla_Y X \in TM, \quad h(X,Y) \in \boldsymbol{R}$$

と分解する．とくに，$\langle D_Y X, \boldsymbol{p}\rangle = h(X,Y)\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle = r^2 h(X,Y)$ であるが，左辺は

$$\langle D_Y X, \boldsymbol{p}\rangle = Y\langle X, \boldsymbol{p}\rangle - \langle X, D_Y \boldsymbol{p}\rangle = -\langle X, Y\rangle$$

なので，$h(X,Y) = -r^{-2}\langle X,Y\rangle$．すなわち，

$$\nabla_Y X := D_Y X + \frac{1}{r^2}\langle X,Y\rangle \boldsymbol{p} \tag{8.6}$$

を得る．

補題 8.14. 式 (8.6) で定まる ∇ は誘導計量 g に関するリーマン接続である．

証明： まず $\nabla_X Y(\boldsymbol{p}) \in T_{\boldsymbol{p}}M$ であることを示す．式 (8.6) の両辺に $\boldsymbol{p}$ を内積すると $\langle \nabla_X Y, \boldsymbol{p}\rangle = 0$ となる．ここで $T_{\boldsymbol{p}}M = \{\boldsymbol{p}\}^{\perp}$ に注意すれば結論がわかる．
さらに，リーマン接続の性質

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \qquad X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

を示せばよい．

このリーマン接続 ∇ の曲率テンソルを計算する．D は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の平坦な接続であることと ∇ がリーマン接続であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= D_X\nabla_Y Z + \frac{1}{r^2}\langle X, \nabla_Y Z\rangle \boldsymbol{p} \\
&\quad - D_Y\nabla_X Z - \frac{1}{r^2}\langle Y, \nabla_X Z\rangle \boldsymbol{p} - D_{[X,Y]}Z - \frac{1}{r^2}\langle [X,Y], Z\rangle \boldsymbol{p} \\
&= D_X D_Y Z + \frac{1}{r^2} D_X\langle Y,Z\rangle \boldsymbol{p} + \frac{1}{r^2}\langle X, \nabla_Y Z\rangle \boldsymbol{p} \\
&\quad - D_Y D_X Z - \frac{1}{r^2} D_Y\langle X,Z\rangle \boldsymbol{p} - \frac{1}{r^2}\langle Y, \nabla_X Z\rangle \boldsymbol{p} \\
&\qquad\qquad - D_{[X,Y]}Z - \frac{1}{r^2}\langle [X,Y], Z\rangle \boldsymbol{p} \\
&= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\bigl(X\langle Y,Z\rangle \boldsymbol{p} + \langle Y,Z\rangle D_X\boldsymbol{p} - Y\langle X,Z\rangle \boldsymbol{p} - \langle X,Z\rangle D_Y\boldsymbol{p} - \langle [X,Y],Z\rangle \boldsymbol{p}\bigr) \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\bigl(\langle X, \nabla_Y Z\rangle \boldsymbol{p} - \langle Y, \nabla_X Z\rangle \boldsymbol{p}\bigr) \\
&= \frac{1}{r^2}\bigl(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\bigr)
\end{aligned}$$

である．このことから $S^n(r)$ の断面曲率が $1/r^2$ になることがわかる．

さらに，$S^n(r)$ はコンパクトであるから，Hopf-Rinow の定理より完備．したがって $S^n(r)$ は完備単連結な空間型である．

以下，簡単のために $r = 1$ とし，$S^n = S^n(1)$ と書く．このリーマン多様体の測地線を求めよう．点 $\boldsymbol{p} \in S^n$ と $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{p}}S^n$ は互いに直交する $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の単位ベクトルである．そこで

$$\gamma(t) := (\cos t)\boldsymbol{p} + (\sin t)\boldsymbol{v}$$

とおけば，$\gamma(t)$ は S^n 上の曲線となっている．実際，

$$\nabla_{d/dt}\dot{\gamma} = D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + \langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle\,\gamma = \ddot{\gamma} + \gamma = 0.$$

■双曲空間　球面と同じことを，ミンコフスキー空間の「球面」で行えば，負曲率空間型を構成することができる．

まず，ミンコフスキー空間 L^{n+1} のレビ・チビタ接続は，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ のリーマン接続 D と全く同じものであることに注意する．正の定数 r に対して

$$H^n(r) := \left\{\boldsymbol{p} \in L^{n+1} \mid \langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle = -\frac{1}{r^2}, p^0 > 0\right\}$$

とおく．ただし $\boldsymbol{p} = (p^0, \ldots, p^n)$ とおき，ミンコフスキー内積は第一座標が負の符号に対応するようとっている．

ここで，L^{n+1} のミンコフスキー内積を TH^n に制限すると，これは $H^n(r)$ のリーマン計量 g を与えている．球面の場合とほぼ同様に

$$\nabla_X Y := D_X Y - \frac{1}{r^2}\langle X, Y\rangle\,\boldsymbol{p}$$

とおけば，∇ が g のリーマン接続であることがわかる．この曲率テンソルを計算すれば $(H^2(r), g)$ が，負の定曲率 $-1/r^2$ をもつ単連結リーマン多様体であることがわかる．

さらに，$r = 1$ のとき，点 $\boldsymbol{p}$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{v}$ をとると，$\langle\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ だから

$$\gamma(t) := (\cosh t)\boldsymbol{p} + (\sinh t)\boldsymbol{v}$$

は，$\boldsymbol{p}$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で出発する $H^2(r)$ 上の測地線である．とくに $\gamma(t)$ の定義域は $\boldsymbol{R}$ だから，完備性が言える．