2011 年 12 月 6 日 (2011 年 12 月 13 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 9

9　測地線と指数写像

この節では，とくに断らない限り，線型接続 ∇ はリーマン多様体 (M, g) のリーマン接続（レビ・チビタ接続）とする．以下，g による内積を $\langle\ ,\ \rangle$，接ベクトルの大きさを $|\cdot|$ と書く．

■平行移動　曲線 $\gamma\colon I \to M$ に沿うベクトル場 X が (接続 ∇ に関して) γ に沿って**平行** *parallel* である，とは $\nabla_{d/dt}X = 0$ が恒等的に成り立つことである．

命題 9.1. 多様体 M 上の可微分曲線 $\gamma\colon [a, b] \to M$ と，任意の $v \in T_{\gamma(a)}M$ に対して, γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$ で $X(a) = v$ となるものが唯一存在する．

証明： $X = (X^1, \dots, X^m)$ は線型常微分方程式

$$\frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k} \Gamma^j_{ik} \frac{dx^i}{dt} X^k = 0 \qquad (j = 1, \dots, m) \tag{9.1}$$

の初期条件 $X^j(a) = v^j$ (v^j は v の成分) を満たす解である．

定義 9.2. 多様体 M 上の曲線 $\gamma\colon [a, b] \to M$ の始点を $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$ とおくとき，写像

$$P_\gamma\colon T_pM \ni v \longmapsto P_\gamma v = X(b) \in T_qM \qquad (X \text{ は命題 9.1 の結論に現れるベクトル場})$$

を γ **に沿う平行移動**という．

命題 9.3. 平行移動 $P_\gamma\colon T_pM \to T_qM$ は線型同型写像である．

証明： 方程式 (9.1) は線型方程式であるから線型性が従う．さらに γ の逆向きの曲線は P_γ の逆写像を与えるので，同型が言える．

命題 9.4. 曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$ とおく．このとき $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_v Y = \lim_{t \to 0} \frac{P_t^{-1} Y(\gamma(t)) - Y(p)}{t}$$

である．ただし P_t は $\gamma|_{[0,t]}$ に関する平行移動である．

とくに ∇ がリーマン接続の場合は，次が成り立つ：

命題 9.5. リーマン多様体 M 上の曲線 $\gamma\colon [a, b] \to M$ に関する平行移動は内積をもつ線型空間 $T_{\gamma(a)}M$ と $T_{\gamma(b)}M$ の間の等長変換を与える．

2011 年 12 月 6 日 (2011 年 12 月 13 日訂正)

証明： 接ベクトル $X, Y \in T_{\gamma(a)}M$ に対して $X(a) = X$, $Y(a) = Y$ を満たし，γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$, $Y(t)$ をとれば，∇ がリーマン接続であるから，$X(t)$, $Y(t)$ の平行性より

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \left\langle \nabla_{d/dt}X(t), Y(t)\right\rangle + \left\langle X(t), \nabla_{d/dt}Y(t)\right\rangle = 0$$

が成り立つ．したがって $\langle X(t), Y(t)\rangle$ は γ に沿って定数なので，とくに

$$\langle P_\gamma(X), P_\gamma(Y)\rangle = \langle X(b), Y(b)\rangle = \langle X(a), Y(a)\rangle = \langle X, Y\rangle$$

が成り立つ．

曲線 γ が測地線である，とは $\nabla_{d/dt}\dot\gamma = 0$ が成り立つ，すなわち速度ベクトル $\dot\gamma$ が γ に沿って平行となることであった．したがって，命題 9.5 から次がわかる．

命題 9.6. リーマン多様体上の測地線 γ に対して

(1) $|\dot\gamma|$ は一定である．
(2) γ に沿う平行なベクトル場 $X(t)$ に対して $\langle\dot\gamma, X\rangle$ は一定である．とくにある 1 点で X と $\dot\gamma$ が直交しているならば，至るところで直交している．

■測地線　測地線であるという性質はパラメータのとり方に依存する．とくに測地線のパラメータは弧長パラメータの定数倍でなければならない．さらに，測地線 $\gamma(t)$ に対して $\tilde\gamma(t) = \gamma(kt)$ (k は定数) はまた測地線である．したがって，測地線は，測地線である，という性質を保ったまま弧長パラメータで表すことができる．

命題 9.7. リーマン多様体 (M, g) 上の 2 点を結ぶ最短線が存在するならば，それは（パラメータを取り直せば）測地線となる．

証明： 曲線 $\gamma(t)$ が 2 点 $p, q \in M$ を結ぶ最短線とする．とくに，パラメータを取り替えることで，t は弧長パラメータ $(0 \leqq t \leqq L)$ として一般性を失わない．
曲線 γ の（端を固定した）**変分** *variation* とは，可微分写像

$$F\colon (-\delta, \delta) \times [0, L] \ni (\varepsilon, t) \longmapsto F(\varepsilon, t) = \gamma_\varepsilon(t) \in M,$$
$$F(0, t) = \gamma_0(t) = \gamma(t),$$
$$F(\varepsilon, 0) = \gamma_\varepsilon(0) = \gamma(0) = p, \quad F(\varepsilon, L) = \gamma_\varepsilon(L) = \gamma(L) = q$$

を満たすものである．各 ε に対して γ_ε は曲線 γ を端点を固定して変形した曲線と思うことができる．ただし t は γ_ε の弧長パラメータとは限らない．
変分 F に対して

$$V(t) = \left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F(\varepsilon, t)$$

で与えられる γ に沿ったベクトル場を F の変分ベクトル場という．$\gamma_\varepsilon(0)$, $\gamma_\varepsilon(L)$ は ε によらずに一定であるから，$V(0) = V(L) = 0$ であることがわかる．
逆に，$V(0) = V(L)$ を満たす任意の γ に沿うベクトル場 V に対して, それを変分ベクトル場にもつ γ の変分が存在する．実際，もし γ の像が一つの座標系 (x^j) で覆えるときは，$V = \sum V^j(t)\partial_j$ と書いて

$$F(\varepsilon, t) = \left(x^1(t) + \varepsilon V^1, \dots, x^m(t) + \varepsilon V^m\right) \qquad \gamma(t) = \left(x^1(t), \dots x^m(t)\right)$$

とおけばよい．一枚の座標系で覆えないときは,（曲線の像の）単位の分割を用いてこのような変分を「つなげる」．
さて，曲線 γ の最短性より，γ_ε の長さは γ より短くない．したがって

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = 0 \qquad \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = \int_0^L |\dot\gamma_\varepsilon(t)|\, dt$$

が，任意の変分 $\{\gamma_\varepsilon\}$ に対して成立する．ただし $\mathcal{L}(\gamma)$ は曲線 γ の長さである．この式の左辺の微分を計算しよう：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\int_0^L \langle\dot\gamma_\varepsilon,\dot\gamma_\varepsilon\rangle^{1/2}\,dt\\
&=\int_0^L \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\langle\dot\gamma_\varepsilon,\dot\gamma_\varepsilon\rangle^{1/2}\,dt\\
&=\int_0^L \frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}\langle\dot\gamma_\varepsilon,\dot\gamma_\varepsilon\rangle}{2\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2}}\,dt\\
&=\int_0^L \left\langle\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}\dot\gamma_\varepsilon,\dot\gamma_\varepsilon\right\rangle\big|_{\varepsilon=0}\,dt\\
&=\int_0^L \left\langle\nabla_{\partial/\partial t}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\gamma_\varepsilon,\dot\gamma\right\rangle dt\\
&=\int_0^L \left\langle\nabla_{\partial/\partial t}V(t),\dot\gamma\right\rangle dt\\
&=\int_0^L \left[\frac{d}{dt}\langle V(t),\dot\gamma\rangle-\left\langle V(t),\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle\right] dt\\
&=\langle V(t),\dot\gamma\rangle\big|_0^L-\int_0^L\left\langle V(t),\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle dt\\
&=-\int_0^L\left\langle V(t),\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle dt
\end{aligned}$$

となる．仮定より，この右辺の値がいかなる変分に対しても 0 とならなければならない．そこで $\varphi(0)=\varphi(L)=0$ をみたす正の値をとる実数値関数 $\varphi(t)$ をとり，$V=\varphi\nabla_{d/dt}\dot\gamma$ とおけば，

$$\int_0^L\left\langle V(t),\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle dt=\int_0^L\varphi(t)\left\langle\nabla_{d/dt}\dot\gamma,\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle dt=0$$

を得る．φ の正値性と計量の正値性から，これが成り立つためには $\nabla_{d/dt}\dot\gamma=0$ でなければならない．

■指数写像　常微分方程式の基本定理より任意の $X\in TM$ を初速度とする測地線が十分短い範囲で存在する．そこで $X\in T_pM$ に対して

(9.2) $$\gamma_X=[\gamma_X(0)=p,\ \dot\gamma_X(0)=X\ \text{を満たす測地線}]\qquad X\in T_pM$$

とする．定数 k に対して $\gamma_X(kt)$ もまた測地線であって，その初速度は kX であることから，測地線の一意性を用いれば

(9.3) $$\gamma_{kX}(t)=\gamma_X(kt)$$

を得る．ただし，t は左辺あるいは右辺が存在するようなパラメータの値である．いま

$$\delta_X:=\sup\bigl\{\delta\in\boldsymbol{R}_+\,|\,\gamma_X\ \text{は区間}\ [0,\delta)\ \text{で定義される}\bigr\}>0,\qquad X\in T_pM$$

とおく．ここで $\{X\in T_pM\ |X|=1\}$ は球面と同相であるからコンパクトであることに注意すれば，

$$\delta:=\inf\bigl\{\delta_X\,|\,X\in T_pM,|X|=1\bigr\}$$

は正の数である．これを用いて，内積が与えられた線型空間 T_pM の原点の近傍

$$U_{p,\delta}:=\{X\in T_pM\,|\,|X|<\delta\}$$

をとる．

ベクトル $X\in U_{p,\delta}$ に対して $\gamma_{X/|X|}$ は $[0,\delta)$ で定義されているから，γ_X の定義域は $[0,1)$ を含む．

定義 9.8. これまでの記号の下，

$$\exp_p\colon U_{p,\delta} \ni X \longmapsto \gamma_X(1) \in M$$

を点 p における**指数写像** *exponential map* という．

定義から

$$\gamma_X(t) := \exp_p tX \qquad (X \in T_pM) \tag{9.4}$$

が成り立つ．

例 9.9. 単位球面 $S^n(1)$ 上の点 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{p}}S^n(1)$ に対して

$$\exp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{v} = (\cos kt)\boldsymbol{p} + (\sin kt)\frac{\boldsymbol{v}}{k} \qquad k = |\boldsymbol{v}|$$

である．

接空間 T_pM は内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によってユークリッド空間と同一視される．そこで T_pM の原点 0 における接空間 $T_0(T_pM)$ を T_pM と同一視すれば，$(d\exp_p)_0$ は T_pM から T_pM への線型写像である．

補題 9.10.

$$\bigl(d\exp_p\bigr)_0 = \mathrm{id} = \text{恒等写像}.$$

証明： T_pM の原点を通る曲線 $\nu(t) = tX$ $(X \in T_pM)$ を取ると，$\dot\nu(0) = X$ であるから，

$$\bigl(d\exp_p\bigr)_0(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p\left(\nu(t)\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p tX = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_X(t) = X$$

である．

したがって，逆関数定理より，十分小さな正の数 δ' に対して

$$\exp_p\colon T_pM \supset U_{p,\delta'} \to V_p = \exp_p(U_{p,\delta'}) \subset M$$

は可微分同相写像である．とくに T_pM をユークリッド空間と同一視すれば，p の近傍 V_p から T_pM への写像 $\exp_p^{-1}$ は M の座標系を与える．これを**正規座標系** *normal coordinate system* とよぶ．

■指数写像とヤコビ場

定義 9.11. 測地線 $\gamma(t)$ に沿うベクトル場 $Y(t)$ が γ に沿う **ヤコビ場** *Jacobi field* であるとは，

$$\nabla_{d/dt}\nabla_{d/dt}Y - R(\dot\gamma, Y)\dot\gamma = 0$$

を満たすことである．

補題 9.12. 測地線 $\gamma : [0,\delta) \to M$ を固定する．このとき，任意のベクトル Y_0, $Z_0 \in T_pM$ $(p = \gamma(0))$ に対して γ に沿うヤコビ場 Y で $Y(0) = Y_0$, $\nabla_{d/dt}Y(0) = Z_0$ となるものがただ一つ存在する．

証明： 局所座標系を用いれば，$Y(t)$ がヤコビ場であるための必要十分条件は Y の成分 Y^j に関する 2 階の線型常微分方程式になる．

大きさ 1 の接ベクトルからなる集合

$$S_pM = \{X \in T_pM \mid |X| = 1\}$$

は T_pM 内の球面と見なすことができる．S_pM 内の曲線

$$\xi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \ni u \longmapsto \xi(u) \in S_pM$$

に対して

$$F\colon [0, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (t, u) \longmapsto F(t, u) = \exp_p t\xi(u) \in M \tag{9.5}$$

とおく．

補題 9.13. 式 (9.5) に対して，測地線 $\gamma(t) = F(t, 0)$ に沿うベクトル場

$$Y(t) := \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=0} F(t, u)$$

は $\dot\gamma$ に直交し $Y(0) = 0$ となるヤコビ場である．

証明： $u = 0$ において

$$\begin{aligned}
\nabla_{d/dt} Y &= \nabla_{\partial/\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial u}\exp_p t\xi(u)\right)\\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial t}\exp_p t\xi(u)\right)\\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\dot\gamma_{\xi(u)}(t)\\
\nabla_{d/dt}\nabla_{d/dt} Y &= \nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial u}\dot\gamma_{\xi(u)}(t)\\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\nabla_{\partial/\partial t}\dot\gamma_{\xi(u)}(t) + R\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u}\right)\dot\gamma_{\xi(u)}(t)\\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\nabla_{\partial/\partial t}\dot\gamma(t) + R\left(\dot\gamma(t), Y(t)\right)\dot\gamma(t)\\
&= R\left(\dot\gamma(t), Y(t)\right)\dot\gamma(t)
\end{aligned}$$

が成り立つ．
ヤコビ場 Y が $\dot\gamma$ に直交することは

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle Y, \dot\gamma\rangle &= \left\langle \nabla_{d/dt} Y, \dot\gamma\right\rangle + \left\langle Y, \nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle = \left\langle \nabla_{d/dt} Y, \dot\gamma\right\rangle = \left\langle \nabla_{\partial/\partial u}\dot\gamma_{\xi(u)}, \dot\gamma_{\xi(u)}\right\rangle\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \dot\gamma_{\xi(u)}, \dot\gamma_{\xi(u)}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u} 1 = 0
\end{aligned}$$

であることと $Y(0) = 0$ から得られる．

問題

9-1 命題 9.7 の証明のための式変形を詳細に追いなさい．とくに一つ一つの等号が成り立つ理由を確かめなさい．

9-2 T_pM に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m\}$ を取り，

$$T_pM \ni X = x^1\boldsymbol{e_1} + \dots x^m\boldsymbol{e}_m \leftrightarrow (x^1,\dots,x^m) \in \boldsymbol{R}^m$$

において T_pM を $\boldsymbol{R}^m$ と同一視すると，$(x^1,\dots,x^m)$ は p の回りの正規座標系と見なすことができる．この座標系に関するクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k は点 p において 0 となることを示しなさい．

9-3 定義 9.11 のヤコビ場の方程式を，局所座標を用いて表し，それが 2 階の線型常微分方程式であることを確かめなさい．

9-4 補題 9.13 の証明の式変形一つ一つの理由を確かめなさい．

9-5 (問題追加) 双曲平面

$$(D,g) = \left(D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2, x^2+y^2 < 1\}, g = \frac{4\,dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2}\right)$$

の 2 点 $(0,0)$ と $(0,L)$ $(0 < L < 1)$ を結ぶ最短線は測地線になることを確かめなさい．

9-6 (問題追加) 双極空間 H^n をミンコフスキー空間 $\boldsymbol{R}_1^{n+1}$ の双曲面とみなす．双曲空間上の 2 点を結ぶ最短線は測地線であることを用いて $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H^n \subset \boldsymbol{R}_1^{n+1}$ の距離は $\cosh^{-1}(-\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle)$ となることを示しなさい．