

2011 年 12 月 13 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 10

お知らせ

- 来年 1 月 10 日 (火) は「日中友好幾何学研究集会」が本学で開催されるため、休講とさせていただきます。研究集会の URL は <http://www.math.titech.ac.jp/kotaro/jc-geom/> です。

前回までの訂正

- 講義資料 9, 2 ページ下から 15 行目 : $(-\delta, \delta) \times (0, L) \Rightarrow (-\delta, \delta) \times [0, L]$

授業に関する御意見

- 我らが「グレート岡山」をお願いします。
山田のコメント： 何をお願いされたのであろうか。

質問と回答

質問： \cosh や \sinh がそう名付けられているのは双極空間の測地線の満たすべき方程式の解になっているからなのでしょう。また \cosh は「コッシュ」でいいと思いますが、 \sinh , \tanh はどう読むべきですか? (「シンシュ」「タンチ」は自然ですか?)

お答え： 前半 : $(\cosh t, \sinh t)$ が双曲線のパラメータ表示となっていることから来ていると思います。三角関数 \cos , \sin を「円関数」circular functions ということもあります。後半 : こういう jargon みたいなのは公の場で使わないほうがよいです。カッコ内の例は自然ではありません。

10 測地線と指数写像 (2)

前回はあまり進まなかったので、講義資料は前回の内容の一部を再録します：この節では、とくに断らない限り、線型接続 ∇ はリーマン多様体 (M, g) のリーマン接続 (レビ・チビタ接続) とする。以下、 g による内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 、接ベクトルの大きさを $|\cdot|$ と書く。

平行移動 曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ に沿うベクトル場 X が (接続 ∇ に関して) γ に沿って平行 *parallel* である、とは $\nabla_{d/dt} X = 0$ が恒等的に成り立つことである。

命題 10.1. 多様体 M 上の可微分曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ と、任意の $v \in T_{\gamma(a)}M$ に対して、 γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$ で $X(a) = v$ となるものが唯一存在する。

証明： $X = (X^1, \dots, X^m)$ は線型常微分方程式

$$(10.1) \quad \frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k} \Gamma_{ik}^j \frac{dx^i}{dt} X^k = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

の初期条件 $X^j(a) = v^j$ (v^j は v の成分) を満たす解である。

定義 10.2. 多様体 M 上の曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ の始点を $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$ とおくと、写像

$$P_\gamma: T_p M \ni v \mapsto P_\gamma v = X(b) \in T_q M \quad (X \text{ は命題 10.1 の結論に現れるベクトル場})$$

を γ に沿う平行移動という。

命題 10.3. 平行移動 $P_\gamma: T_p M \rightarrow T_q M$ は線型同型写像である。

証明：方程式 (10.1) は線型方程式であるから線型性が従う。さらに γ の逆向きの曲線は P_γ の逆写像を与えるので、同型が言える。

命題 10.4. 曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ とおく。このとき $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_v Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t^{-1} Y(\gamma(t)) - Y(p)}{t}$$

である。ただし P_t は $\gamma|_{[0,t]}$ に関する平行移動である。

とくに ∇ がリーマン接続の場合は、次が成り立つ：

命題 10.5. リーマン多様体 M 上の曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ に関する平行移動は内積をもつ線型空間 $T_{\gamma(a)}M$ と $T_{\gamma(b)}M$ の間の等長変換を与える。

証明：接ベクトル $X, Y \in T_{\gamma(a)}M$ に対して $X(a) = X$, $Y(a) = Y$ を満たし、 γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$, $Y(t)$ をとれば、 ∇ がリーマン接続であるから、 $X(t)$, $Y(t)$ の平行性より

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \langle \nabla_{d/dt} X(t), Y(t) \rangle + \langle X(t), \nabla_{d/dt} Y(t) \rangle = 0$$

が成り立つ。したがって $\langle X(t), Y(t) \rangle$ は γ に沿って定数なので、とくに

$$\langle P_\gamma(X), P_\gamma(Y) \rangle = \langle X(b), Y(b) \rangle = \langle X(a), Y(a) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

が成り立つ。

曲線 γ が測地線である, とは $\nabla_{d/dt}\dot{\gamma} = 0$ が成り立つ, すなわち速度ベクトル $\dot{\gamma}$ が γ に沿って平行となることであった. したがって, 命題 10.5 から次がわかる.

命題 10.6. リーマン多様体上の測地線 γ に対して

- (1) $|\dot{\gamma}|$ は一定である.
- (2) γ に沿う平行なベクトル場 $X(t)$ に対して $\langle \dot{\gamma}, X \rangle$ は一定である. とくにある 1 点で X と $\dot{\gamma}$ が直交しているならば, 至るところで直交している.

指数写像 常微分方程式の基本定理より任意の $X \in TM$ を初速度とする測地線が十分短い範囲で存在する. そこで $X \in T_p M$ に対して

$$(10.2) \quad \gamma_X = [\gamma_X(0) = p, \dot{\gamma}_X(0) = X \text{ を満たす測地線}] \quad X \in T_p M$$

とする. 定数 k に対して $\gamma_X(kt)$ もまた測地線であって, その初速度は kX であることから, 測地線の一意性を用いれば

$$(10.3) \quad \gamma_{kX}(t) = \gamma_X(kt)$$

を得る. ただし, t は左辺あるいは右辺が存在するようなパラメータの値である. いま

$$\delta_X := \sup\{\delta \in \mathbf{R}_+ \mid \gamma_X \text{ は区間 } [0, \delta) \text{ で定義される}\} > 0, \quad X \in T_p M$$

とおく. ここで $\{X \in T_p M \mid |X| = 1\}$ は球面と同相であるからコンパクトであることに注意すれば,

$$\delta := \inf\{\delta_X \mid X \in T_p M, |X| = 1\}$$

は正の数である. これを用いて, 内積が与えられた線型空間 $T_p M$ の原点の近傍

$$U_{p,\delta} := \{X \in T_p M \mid |X| < \delta\}$$

をとる.

ベクトル $X \in U_{p,\delta}$ に対して $\gamma_{X/|X|}$ は $[0, \delta)$ で定義されているから, γ_X の定義域は $[0, 1)$ を含む.

定義 10.7. これまでの記号の下,

$$\exp_p: U_{p,\delta} \ni X \mapsto \gamma_X(1) \in M$$

を点 p における指数写像 *exponential map* という.

定義から

$$(10.4) \quad \gamma_X(t) := \exp_p tX \quad (X \in T_p M)$$

が成り立つ.

例 10.8. 単位球面 $S^n(1)$ 上の点 p と $v \in T_p S^n(1)$ に対して

$$\exp_p v = (\cos kt)p + (\sin kt)\frac{v}{k} \quad k = |v|$$

である.

接空間 $T_p M$ は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ によってユークリッド空間と同一視される．そこで $T_p M$ の原点 0 における接空間 $T_0(T_p M)$ を $T_p M$ と同一視すれば, $(d \exp_p)_0$ は $T_p M$ から $T_p M$ への線型写像である．

補題 10.9.

$$(d \exp_p)_0 = \text{id} = \text{恒等写像.}$$

証明: $T_p M$ の原点を通る曲線 $\nu(t) = tX$ ($X \in T_p M$) を取ると, $\dot{\nu}(0) = X$ であるから,

$$(d \exp_p)_0(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(\nu(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p tX = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_X(t) = X$$

である．

したがって, 逆関数定理より, 十分小さな正の数 δ' に対して

$$\exp_p: T_p M \supset U_{p, \delta'} \rightarrow V_p = \exp_p(U_{p, \delta'}) \subset M$$

は可微分同相写像である．とくに $T_p M$ をユークリッド空間と同一視すれば, p の近傍 V_p から $T_p M$ への写像 \exp_p^{-1} は M の座標系を与える．これを正規座標系 *normal coordinate system* とよぶ．

指数写像とヤコビ場

定義 10.10. 測地線 $\gamma(t)$ に沿うベクトル場 $Y(t)$ が γ に沿う ヤコビ場 *Jacobi field* であるとは,

$$\nabla_{d/dt} \nabla_{d/dt} Y - R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = 0$$

を満たすことである．

補題 10.11. 測地線 $\gamma: [0, \delta] \rightarrow M$ を固定する．このとき, 任意のベクトル $Y_0, Z_0 \in T_p M$ ($p = \gamma(0)$) に対して γ に沿うヤコビ場 Y で $Y(0) = Y_0, \nabla_{d/dt} Y(0) = Z_0$ となるものがただ一つ存在する．

証明: 局所座標系を用いれば, $Y(t)$ がヤコビ場であるための必要十分条件は Y の成分 Y^j に関する 2 階の線型常微分方程式になる．

大きさ 1 の接ベクトルからなる集合

$$S_p M = \{X \in T_p M \mid |X| = 1\}$$

は $T_p M$ 内の球面と見なすことができる． $S_p M$ 内の曲線

$$\xi: (-\varepsilon, \varepsilon) \ni u \mapsto \xi(u) \in S_p M$$

に対して

$$(10.5) \quad F: [0, \delta] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (t, u) \mapsto F(t, u) = \exp_p t\xi(u) \in M$$

とおく．

補題 10.12. 式 (10.5) に対して, 測地線 $\gamma(t) = F(t, 0)$ に沿うベクトル場

$$Y(t) := \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{u=0} F(t, u)$$

は $\dot{\gamma}$ に直交し $Y(0) = 0$ となるヤコビ場である．

証明： $u = 0$ において

$$\begin{aligned}
 \nabla_{d/dt} Y &= \nabla_{\partial/\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial u} \exp_p t\xi(u) \right) \\
 &= \nabla_{\partial/\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial t} \exp_p t\xi(u) \right) \\
 &= \nabla_{\partial/\partial u} \dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) \\
 \nabla_{d/dt} \nabla_{d/dt} Y &= \nabla_{\partial/\partial t} \nabla_{\partial/\partial u} \dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) \\
 &= \nabla_{\partial/\partial u} \nabla_{\partial/\partial t} \dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) + R \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u} \right) \dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) \\
 &= \nabla_{\partial/\partial u} \nabla_{\partial/\partial t} \dot{\gamma}(t) + R(\dot{\gamma}(t), Y(t)) \dot{\gamma}(t) \\
 &= R(\dot{\gamma}(t), Y(t)) \dot{\gamma}(t)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。

ヤコビ場 Y が $\dot{\gamma}$ に直交することは

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle Y, \dot{\gamma} \rangle &= \langle \nabla_{d/dt} Y, \dot{\gamma} \rangle + \langle Y, \nabla_{d/dt} \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla_{d/dt} Y, \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla_{\partial/\partial u} \dot{\gamma}_{\xi(u)}, \dot{\gamma}_{\xi(u)} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{\gamma}_{\xi(u)}, \dot{\gamma}_{\xi(u)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} 1 = 0
 \end{aligned}$$

であることと $Y(0) = 0$ から得られる。

問題

10-1 T_pM に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$ を取り,

$$T_pM \ni X = x^1 e_1 + \dots + x^m e_m \leftrightarrow (x^1, \dots, x^m) \in \mathbf{R}^m$$

において T_pM を \mathbf{R}^m と同一視すると, (x^1, \dots, x^m) は p の回りの正規座標系と見なすことができる.
この座標系に関するクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k は点 p において 0 となることを示しなさい.

10-2 定義 10.10 のヤコビ場の方程式を, 局所座標を用いて表し, それが 2 階の線型常微分方程式であることを確かめなさい.

10-3 補題 10.12 の証明の式変形一つ一つの理由を確かめなさい.