2011 年 12 月 20 日 (2011 年 12 月 21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 11

お知らせ

- 今回は提出物の受付をいたしません.
- 2011 年 1 月 10 日 (火) は「日中友好幾何学研究集会」が本学 (百年記念館/ ガンダムビル/蒲鉾) で開催されるため, 休講とさせていただきます. 研究集会の URL は http://www.math.titech.ac.jp/ kotaro/jc-geom/ です.
- 良いお年をお迎えください.

11 断面曲率の幾何学的意味

とくに断らない限り (M,g) は n 次元リーマン多様体とする.

■指数写像 (復習) 点 $p\in M$ を一つ固定すると，$\boldsymbol{v}\in T_pM$ を一つとるごとに，時刻 $t=0$ で p を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する測地線がただ一つ存在する．それを $\gamma_{p,\boldsymbol{v}}$ と表す：

$$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M,\qquad \gamma_{p,\boldsymbol{v}}(0)=p,\quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{v}.$$

ただし $\varepsilon=\varepsilon(p,\boldsymbol{v})$ は正の数である.

補題 11.1. 任意の 0 でない定数 c に対して $\gamma_{p,c\boldsymbol{v}}(t)=\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(ct)$ が成り立つ.

> **証明：** 測地線の方程式の t に関する同次性から，一般に $\gamma(t)$ が測地線なら $\gamma(ct)$ も測地線になる．いま $\gamma_1(t)=\gamma_{p,c\boldsymbol{v}}(t)$, $\gamma_2(t)=\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(ct)$ とすると，$\gamma_j(t)$ $(j=1,2)$ はともに測地線で，$t=0$ で点 p を速度 $c\boldsymbol{v}$ で通過する．したがって，初期値に対する測地線の一意性より結論を得る.

常微分方程式の基本定理の証明における解が存在する範囲に関する議論から次を得る：

補題 11.2. 十分小さい正の数 δ が存在して，$\boldsymbol{v}\in T_pM$ が $|\boldsymbol{v}|<\delta$ を満たすならば，$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}$ の定義域は $[-1,1]$ を含む.

以下，接空間 T_pM の原点の δ-近傍と単位球面を

$$B_0(\delta):=\{\boldsymbol{v}\in T_pM\,|\,|\boldsymbol{v}|<\delta\},\qquad S_pM:=\{\boldsymbol{v}\in T_pM\,|\,|\boldsymbol{v}|=1\}$$

と表す.

定義 11.3. 補題 11.2 の δ に対して

$$\exp_p\colon T_pM\supset B_0(\delta)\ni\boldsymbol{v}\longmapsto\exp_p(\boldsymbol{v})=\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(1)\in M$$

が定義される．これを p における**指数写像**という.

とくに，補題 11.1 から

$$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(t)=\gamma_{p,t\boldsymbol{v}}(1)=\exp_p(t\boldsymbol{v})\tag{11.1}$$

が成り立つ．すなわち $\exp_p(t,\boldsymbol{v})$ は $t=0$ で p を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する測地線を与える.

定理 11.4. 十分小さい正の数 ε が存在して，$\exp_p\colon B_0(\varepsilon)\to\exp_p\bigl(B_0(\varepsilon)\bigr)\subset M$ は微分同相写像である.

> **証明：** 微分可能性は，常微分方程式の初期値に関する微分可能性から得られる．さらに，$\boldsymbol{v}\in T_0(T_pM)=T_pM$ に対して，T_pM 上の曲線 $s\boldsymbol{v}$ を考えると，
>
> $$\bigl(d\exp_p\bigr)_0(\boldsymbol{v})=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\exp_p\bigl(s\boldsymbol{v}\bigr)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\gamma_{p,s\boldsymbol{v}}(1)==\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(s)=\boldsymbol{v}.$$
>
> したがって $(d\exp_p)_0=\mathrm{id}$. とくに，これは可逆な線形写像だから，逆関数定理より $\exp_p$ は原点の近傍で微分同相.

2011 年 12 月 20 日 (2011 年 12 月 21 日訂正)

例 11.5.
- $(M,g)=(\boldsymbol{R}^n,g_0)$ (ユークリッド空間) とすると，$T_pM=\boldsymbol{R}^n$ であって，
$$\exp_p(t\boldsymbol{v})=p+t\boldsymbol{v}.$$
- $(M,g)=(S^n,g_0)$ を単位球面とし，$S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ とみなすと，$T_pS^n=\{p\}^\perp$ であって，
$$\exp_p(t\boldsymbol{v})=(\cos t)p+(\sin t)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}.$$
- $(M,g)=(H^n,g_0)$ を双曲空間とし，$H^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ とみなすと，$T_pH^n=\{p\}^\perp$ であって，
$$\exp_p(t\boldsymbol{v})=(\cosh t)p+(\sinh t)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}.$$
- S^3 と 2 次ユニタリ群 $\mathrm{SU}(2)$ を
$$\mathrm{SU}(2)=\left\{\begin{pmatrix}p & -\bar q\\ q & \bar p\end{pmatrix}\,;\,p\bar p+q\bar q=1\right\}\longleftrightarrow S^3=\{(p,q)\in\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{R}^4\,;\,p\bar p+q\bar q=1\}$$
と同一視すると，単位行列 $\mathrm{id}\in\mathrm{SU}(2)$ における指数写像 $\exp_{\mathrm{id}}$ は行列指数関数と一致する．

■ヤコビ場 (復習) 曲線 $\gamma\colon[0,L]\to M$ が測地線であるとし，γ の変分
$$F(s,t)\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,L]\longrightarrow M,\qquad \gamma_s(t):=F(s,t),\quad \gamma_0(t)=\gamma(t) \tag{11.2}$$
を考え，その変分ベクトル場を
$$V(t):=\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\gamma_s(t)$$
とおく．

補題 11.6. 変分 (11.2) の各 s に対して γ_s が測地線ならば，その変分ベクトル場 V は
$$\nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}}V-R(\dot\gamma,V)\dot\gamma=0 \tag{11.3}$$
を満たす．ただし R は (M,g) の曲率テンソルである．

定理 11.7. 測地線 γ が $\gamma(0)=p$ を満たすとき，任意の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in T_pM$ に対して，γ に沿う (γ の定義域全体で定義される) ヤコビ場 V で
$$V(0)=\boldsymbol{a},\qquad \nabla_{\frac{d}{dt}}V(0)=\boldsymbol{b}$$
となるものが ただ一つ存在する．

証明： ヤコビ場が満たすべき微分方程式 (11.3) は (V の各成分に関する) 2 階の線形同次微分方程式であるから，任意の初期条件 $V(0)$, $\dot V(0)$ に対して，ただ一つの解が存在する．

とくに，γ に沿うヤコビ場全体は $2n$ 次元の線形空間をなす．

注意 11.8. 接空間上の単位球面 S_pM 上の曲線 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(s)$ に対して
$$F(s,t)=\exp_p\bigl(t\boldsymbol{v}(s)\bigr)$$
とおくと，$F(s,*)$ は測地線であるから，
$$V(s,t):=\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)$$
とおけば，各 s に対して $V(s,t)$ は $\gamma_{p,\boldsymbol{v}(s)}$ に沿うヤコビ場を与えている．とくに $F(s,0)=p$ であるから $V(s,0)=0$.

■定曲率空間のヤコビ場　ここでは (M,g) を断面曲率が一定 k であるようなリーマン多様体とする．このとき，曲率テンソル R は

$$R(X,Y)Z = k(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y) \tag{11.4}$$

と書ける．

点 $p\in M$ をひとつ固定し，$\boldsymbol{v}\in T_pM$ を単位ベクトルとする．このとき，点 p を速度 $\boldsymbol{v}$ で出発する測地線 γ は $\gamma(t)=\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(t)=\exp_p(t\boldsymbol{v})$ で与えられる．とくに測地線は速さが一定だから

$$\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 1 \tag{11.5}$$

が成り立つ．

いま $\boldsymbol{x}\in T_pM\setminus\{0\}$ を $\boldsymbol{v}$ に直交するように選ぶと，γ に沿う平行ベクトル場 $X(t)$ で $X(0)=\boldsymbol{x}$ となるものが唯一存在する．とくに，X の平行性と γ が測地線であることから

$$\frac{d}{dt}\langle X(t),\dot\gamma(t)\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{d}{dt}}X,\dot\gamma(t)\right\rangle + \left\langle X(t),\nabla_{\frac{d}{dt}}\dot\gamma(t)\right\rangle = 0.$$

したがって，

$$\langle X(t),\dot\gamma(t)\rangle = \langle X(0),\dot\gamma(0)\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle = 0 \tag{11.6}$$

が成り立つ．そこで, t についてなめらかな関数 $\varphi(t)$ を用いて $V(t):=\varphi(t)X(t)$ とおき，

$$J(t) := \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}}V(t) - R(\dot\gamma(t),V(t))\dot\gamma(t)$$

とすると，X の平行性, (11.4), (11.6) と (11.5) から

$$\begin{aligned} J &= \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}} - k\bigl(\langle V,\dot\gamma\rangle\bigr)\dot\gamma - \langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle V\bigr) = \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}}V + kV \\ &= \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}}\bigl(\varphi X\bigr) + k\varphi X \\ &= \nabla_{\frac{d}{dt}}\bigl(\dot\varphi X + \varphi\nabla_{\frac{d}{dx}}X\bigr) + k\varphi X = \nabla_{\frac{d}{dt}}\bigl(\dot\varphi X\bigr) + k\varphi X \\ &= (\ddot\varphi + k\varphi)X \end{aligned}$$

を得る．とくに X は 0 にならないから，$V(t)=\varphi(t)X(t)$ がヤコビ場であるための必要十分条件は

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + k\varphi(t) = 0 \tag{11.7}$$

である．

とくに $k=c^2>0$, $k=0$, $k=-c^2<0$ のとき，(11.7) の一般解はそれぞれ, A, B を任意定数として

$$A\sin ct + B\cos ct, \qquad At+B, \qquad A\sinh ct + B\cosh ct$$

となる．

命題 11.9. 定曲率 k のリーマン多様体 (M,g) 上の点 p を速度 $\boldsymbol{v}\in S_pM$ で出発する測地線 γ に沿うヤコビ場 V で $V(0)=0$, $\nabla_{\frac{d}{dt}}V(0)=\boldsymbol{x}$ となるものは

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{c}(\sin ct)X(t) & (k=c^2>0 \text{ のとき}) \\ (tX(t)) & (k=0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{c}(\sinh ct)X(t) & (k=-c^2<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．とくに，$|X(t)|$ は t によらない定数だから

$$|V(t)| = \begin{cases} \frac{1}{c}|\sin ct|\,|\boldsymbol{x}| & (k = c^2 > 0 \text{ のとき}) \\ |t|\,|\boldsymbol{x}| & (k = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{c}|\sinh ct|\,|\boldsymbol{x}| & (k = -c^2 < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．

■円周の長さ　一般のリーマン多様体 (M, g) の議論に戻る．単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 \in T_pM$ に対して

$$\boldsymbol{x}(s) = (\cos s)\boldsymbol{e}_1 + (\sin s)\boldsymbol{e}_2$$

は T_pM 内の単位球面 S_pM の大円を与える．指数写像は T_pM の原点の近傍で微分同相を与えるから，十分小さい正の数 t に対して

$$\sigma_t(s) := \exp_p(t\boldsymbol{s}) \qquad (-\pi < s \leqq \pi) \tag{11.8}$$

は多様体 M 上の半径 t の円周を与える．

命題 11.10. 式 (11.8) で与えられる円周の長さ $L(t)$ は

$$L(r) = 2\pi t - \frac{K}{3}\pi t^3 + o(t^3) \qquad (t \to 0)$$

を満たす．ただし K は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ で与えられる T_pM の平面に関する断面曲率である．

証明： 曲線 $\sigma_t(s)$ の速度ベクトルは

$$V(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\exp_p\bigl(t\boldsymbol{x}(s)\bigr) \qquad (\boldsymbol{x}(s) = \cos s\boldsymbol{e}_1 + \sin s\boldsymbol{e}_2)$$

で与えられる．いま，$\boldsymbol{x}(s)$ の速度ベクトルを

$$\boldsymbol{y}(s) = \dot{\boldsymbol{x}}(s) = -\sin s\boldsymbol{e}_1 + \cos s\boldsymbol{e}_2$$

とおいておく．
とくに $\exp_p(0) = p$ であるから $V(s, 0) = 0$ が成り立つので

$$\langle V, V\rangle\,|_{t=0} = 0.$$

また，

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\langle V, V\rangle = 2\left\langle V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V\right\rangle|_{t=0} = 0$$

である．さらに，

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right|_{t=0}\langle V, V\rangle = 2\left.\left\langle V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V\right\rangle\right|_{t=0} + 2\left.\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V\right\rangle\right|_{t=0} = 2\left.\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V\right\rangle\right|_{t=0}$$

である．ここで，リーマン接続の性質 (ねじれをもたない) から

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial s}\exp_p\bigl(t\boldsymbol{x}(s)\bigr) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial t}\exp_p\bigl(t\boldsymbol{x}(s)\bigr) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}(d\exp_p)_{t\boldsymbol{v}(s)}\left(\frac{\partial t\boldsymbol{x}}{\partial t}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}(d\exp_p)_{t\boldsymbol{v}(s)}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

とくに $t=0$ のとき $(d\exp_p)_0 = \mathrm{id}$ だから

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V\Big|_{t=0} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \boldsymbol{x}(s) = \frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{y}(s)$$

したがって,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \langle V, V\rangle = 2$$

となる．さらに，$V(s,t)$ は (t に関して) ヤコビの微分方程式を満たす：

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V - R(\dot\gamma, V)\dot\gamma = 0.$$

これを用いて, $\gamma = \gamma_{p,\boldsymbol{x}(s)}$ とおけば, $V|_{t=0} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\langle V, V\rangle\Big|_{t=0} &= 3\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \nabla\right\rangle_{\frac{\partial}{\partial t}V}\Big|_{t=0} \\ &= 3\left\langle R(\dot\gamma, V)\dot\gamma, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V\right\rangle\Big|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

さらに

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\langle V, V\rangle\Big|_{t=0} = 8\left\langle R(\dot\gamma, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V)\dot\gamma, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V\right\rangle\Big|_{t=0} = 8\langle R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = -8R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}).$$

ここで $\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}$ がはる T_pM の平面は $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ がはる平面と一致し，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は互いに直交する単位ベクトルだから,

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\langle V, V\rangle\Big|_{t=0} = -8K$$

が成り立つ．ただし K は $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ がはる平面に関する断面曲率である．
以上から

$$\langle V, V\rangle = t^2 - \frac{1}{3}t^4 K + O(t^4)$$

が成り立つので,

$$|V| = t\sqrt{1 - \frac{1}{3}Kt^2 + O(t^2)} = t\left(1 - \frac{1}{6}Kt^2 + O(t^2)\right).$$

したがって

$$L(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |V|\,ds = 2\pi t - \frac{\pi t^3}{3}K + O(t^3)$$

となり，結論が得られた．