

幾何学特論第四講義資料 12

お知らせ

- あけましておめでとうございます。先週は日中友好幾何学研究集会のため休講とさせていただきます。ご迷惑をおかけいたしました。

12 フロベニウスの定理

フロベニウスの定理 領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ の点 $x_0 \in D$ を固定し, D 上でなめらかな行列値関数

$$U, \dots, V: D \longrightarrow M(n, \mathbf{R})$$

を用いて, つぎの線形微分方程式を考える

$$(12.1) \quad \frac{\partial F}{\partial u} = FU, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = FV, \quad F(x_0) = a \in \text{GL}(n, \mathbf{R})$$

ただし $M(n, \mathbf{R})$ は n 次正方行列全体の集合, $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ は n 次正則行列全体の集合, F は $M_n(\mathbf{R})$ に値をとる未知関数とする。

微分形式を用いれば, 方程式 (12.1) を座標不変な形で表すことができる:

$$(12.2) \quad dF = F\alpha \quad \alpha = U du + V dv.$$

こうしたほうが以下の議論は見通しがよくなるが, 微分形式に不慣れな人のため, (12.1) のまま扱うことにしよう。

補題 12.1. 行列値関数 F が領域 D 上で方程式 (12.1) を満たしているとする。(区分的) なめらかな道

$$\gamma: [0, 1] \ni t \longmapsto \gamma(t) = (u(t), v(t)) \in D$$

に対して $F_\gamma(t) := F \circ \gamma(t)$ とおけば, F_γ は常微分方程式

$$(12.3) \quad \frac{d}{dt} F_\gamma = F_\gamma \left(U \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

をみたす。

補題 12.2. 行列値関数 F が (12.1) を満たすならば $\det F$ は 0 にならない。さらに

- U, V のトレースが 0 かつ $a \in \text{SL}(n, \mathbf{R})$ ならば $F(x) \in \text{SL}(n, \mathbf{R})$ ($x \in D$) が常に成り立つ。
- U, V が交代行列, かつ $a \in \text{SO}(n)$ ならば $F(x) \in \text{SO}(n)$ が常に成り立つ。

- U, V が

$$UY + Y^t U = O, \quad VY + Y^t V = O, \quad Y = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$$

を満たし, かつ $a \in \text{SO}_+(1, n-1)$ ならば $F(x) \in \text{SO}_+(1, n-1)$ が常に成り立つ.

証明. 補題 12.1 のような道 γ で $\gamma(0) = x_0$ となるものをとる. このとき $f(t) = \det F_\gamma(t)$ とおくと

$$\frac{df}{dt} = \text{tr} \tilde{F}_\gamma \frac{dF_\gamma}{dt} = \text{tr} \left(\tilde{F}_\gamma \mathcal{F}_\gamma (U\dot{u} + V\dot{v}) \right) = \det F_\gamma \text{tr} (U\dot{u} + V\dot{v}) = f(t) \text{tr} (U\dot{u} + V\dot{v})$$

なので

$$f(t) = f(0) \exp \int_0^t \text{tr} (U\dot{u} + V\dot{v}) dt$$

となり, $f(0) = \det F(x_0) = \det a \neq 0$ から $f(t) \neq 0$ を得る. γ の終点は任意にとれるので, 最初の主張が示された. さらに $\text{tr} U = \text{tr} V = 0$ なら $f(t)$ は定数なので, 2 番めの主張も成り立つ.

次に U, V が交代行列の場合を考えると

$$\frac{d}{dt} (F_\gamma^t F_\gamma) = 0$$

であることがわかるが, $t = 0$ で $a^t a = \text{id}$ であるから F_γ が直交行列であることがわかる. とくに $\text{tr} U = \text{tr} V = 0$ だから $\det F_\gamma = \det a = 1$ となり, 第 3 の主張を得る.

第 4 の主張は, $A \in \text{SO}_+(3, 1)$ であるための条件が $AY^t A = Y$, $\det A = 1$ かつ $a_{00} > 0$ ($A = (a_{ij})$ であることから上と同様にしてわかる. \square)

補題 12.3. 方程式 (12.1) が解 F をもつならば

$$(12.4) \quad U_v - V_u - UV + VU = 0$$

が成り立つ.

証明. 2 つの方程式を微分して

$$F_{uv} = (F_u)_v = F(VU + U_v), \quad F_{vu} = (F_v)_u = F(UV + V_u)$$

が等しいことと F が正則となることから結論が得られる. \square

定理 12.4 (フロベニウスの定理). 領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ が単連結であるとする. このとき, D 上で定義された滑らかな行列値関数 U, V が (12.4) を満たすならば, 方程式 (12.1) を満たす行列値関数 $F: D \rightarrow \text{GL}(n, \mathbf{R})$ がただ一つ存在する.

注意 12.5. • 方程式 (12.1) の係数行列と未知関数を複素数を成分にもつ行列としても同様の結果が成り立つ. とくに

- $\text{tr} U = \text{tr} V = 0$ かつ $a \in \text{SL}(n, \mathbf{C})$ ならば, 解 F も $\text{SL}(n, \mathbf{C})$ に値をとる.
- U, V が歪エルミート行列かつ $a \in \text{SU}(n, \mathbf{C})$ ならば, 解 F も $\text{SU}(n)$ に値をとる. ここで, 正交行列 A が歪エルミートであるとは $A + A^* = O$ が成り立つことである.

- 独立変数 (u, v) を複素変数 $z = u + iv, \bar{z} = u - iv$ として, 方程式

$$F_z = FZ, \quad F_{\bar{z}} = F\bar{W}$$

を考えても同様の結果が得られる. とくに $W = -Z^*$, $\text{tr} Z = 0$ かつ初期値が $\text{SU}(n)$ の元ならば F は $\text{SU}(n)$ に値をつ.

- 方程式

$$F_u = UF, \quad F_v = VF$$

の形についても同様のことが成り立つ。

フロベニウスの定理の証明 定理??に証明を与えよう。いま, x_0 と $x \in D$ を結ぶなめらかな道

$$\gamma: [0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t) = (u(t), v(t)) \in D \quad \gamma(0) = x_0, \quad \gamma(1) = x$$

をとり, 常微分方程式 (12.3) を考える。線形常微分方程式の解の存在と一意性の定理から, 初期条件 $F_\gamma(0) = a$ を満たす解 F_γ がただ一つ存在する。

補題 12.6. $F_\gamma(1)$ は γ の終点 x のみに依存する。

証明. 2点 x_0, x を結ぶ二つの道

$$\gamma_0(t) = (u_0(t), v_0(t)), \quad \gamma_1(t) = (u_1(t), v_1(t)) \quad (\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = x_0, \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = x)$$

をとる。領域 D の単連結性より, 滑らかな写像

$$\Gamma: [0, 1] \times [0, 1] \ni (s, t) \mapsto \Gamma(s, t) \in D \quad \text{で}$$

$$\Gamma(0, t) = \gamma_0(t), \quad \Gamma(1, t) = \gamma_1(t), \quad \Gamma(s, 0) = x_0, \quad \Gamma(1, 0) = x$$

となるものをとることができる。いま $\gamma_s(t) = \gamma(t)$ において, 道 γ_s に対して方程式 (12.3) を考え, その解を

$$F(s, t) = F_{\gamma_s}(t) \quad F(s, 0) = a$$

と書く。さらに $\gamma_s(t) = (u(s, t), v(s, t))$ において

$$S = U u_s + V v_s, \quad T = U u_t + V v_t$$

とすると, 積分可能条件と $\Gamma(s, 0)$ と $\Gamma(s, 1)$ が定数であることから

$$(12.5) \quad S_t - T_s - ST + TS = 0, \quad S(s, 0) = S(s, 1) = 0$$

が成り立つことがわかる。

$F_t = FT$ であることから,

$$\begin{aligned} F_{st} &= F_s T + F T_s = F_s T + F(S_t - ST + TS) \\ &= F_s T + F S_t - FST + FTS \\ &= F_s T + (FS)_t - F_t S - FST + FTS = F_s T + (FS)_t - FTS - FST + FTS \\ &= F_s T + (FS)_t - FST = (F_s - FS)T + (FS)_t \end{aligned}$$

となるので,

$$(F_s - FS)_t = (F_s - FS)T$$

が成り立つ。これは $F_s - FS$ を未知関数とする, (12.3) と同じ微分方程式であるから, 解の一意性より

$$F_s - FS = bF$$

をみたく b が存在する . ここで $t = 0$ を代入すると $F(s, 0) = a$ だから $F_s(s, 0) = 0$, また $S(s, 0) = 0$ なので $b = 0$ でなければならない . したがって

$$F_s = FS$$

が成り立つ . とくに $S(s, 1) = 0$ であるから $F_s(s, 1) = 0$. したがって $F(s, 1)$ は s によらないので

$$F_{\gamma_2}(1) = F(1, 1) = F(0, 1) = F_{\gamma_1}(1).$$

□

そこで ,

$$(12.6) \quad F(x) = F_\gamma(1) \quad (\gamma \text{ は } x_0 \text{ と } x_1 \text{ を結ぶ道})$$

と定めると $F: D \rightarrow M(n, \mathbf{R})$ が得られた .

これが求めるものであることは演習問題としておく .

問題

12-1 12.6 が結論を満たすことを確かめなさい .

12-2 定理 12.4 を高次元化したもののステートメントを書きなさい .