2012 年 1 月 24 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 13

お知らせ

- 学部生の方，授業アンケートにご協力ください．科目番号 **5170** です．

前回までの訂正

- 講義資料 12, 1 ページ 6 行目：$U, \dots, V \Rightarrow U, V$

13　正規直交枠

■正規直交枠　次元 n のリーマン多様体 (M, g) 上の各点 p に対して，p の近傍 U と，U 上で定義された M の m 個ベクトル場 $\boldsymbol{e}_1,\dots, \boldsymbol{e}_n$ で，各 $q \in U$ に対して

$$\{\boldsymbol{e}_1(q), \dots, \boldsymbol{e}_n(q)\}$$

が T_qM の正規直交基底を与えるようなものが存在する．

実際，座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ 上の基底ベクトル場 $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ $(\partial_j = \partial/\partial x^j)$ にグラム・シュミットの直交化を行えばよい．

このようなベクトル場の組 $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ を (M, g) の (局所的な) **正規直交枠**という．

正規直交枠をひとつ固定したとき，U 上の n 個の 1 次微分形式 $\omega^1, \dots, \omega^n$ で

$$\omega^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j = \text{クロネッカーのデルタ} \tag{13.1}$$

となるものをとる．$\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ を正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の**双対枠**ということにする．

■接続形式　リーマン多様体 (M, g) のリーマン接続を ∇ と書く．領域 U 上で定義された正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ が与えられたとき，ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_X \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^n \omega^k_j(X)\boldsymbol{e}_k$$

とおくと，$\omega^k_j \colon \mathfrak{X}(U) \to \mathcal{F}(U)$ は U 上の 1 次微分形式を与える．実際，リーマン接続の性質から，関数 $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して

$$\nabla_{fX}\boldsymbol{e}_j = f\nabla_X \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^n \left(f\omega^k_j(X)\right)\boldsymbol{e}_k$$

となるので，$\omega^k_j(fX) = f\omega^k_j(X)$．すなわち ω は U 上の $(0,1)$-テンソルを与えている．

この ω^j_i $(i, j = 1, \dots, n)$ を，リーマン接続 ∇ の，枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する**接続形式**という．

2012 年 1 月 24 日

補題 13.1. リーマン接続の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する接続形式 ω_j^k は

$$\omega_j^k = -\omega_k^j \qquad (j,k=1,\dots,n) \qquad \text{とくに} \quad \omega_j^j = 0$$

を満たす.

証明： リーマン接続の性質と正規直交基底の性質から

$$\omega_j^k(X) = \langle \nabla_X \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k \rangle = X\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k\rangle - \langle \boldsymbol{e}_j, \nabla_X \boldsymbol{e}_k\rangle = X\delta_{jk} - \omega_k^j(X) = \omega_k^j(X).$$

ただし δ_{jk} はクロネッカーのデルタ記号である.

とくに，接続形式を並べることにより

$$\Omega = (\omega_i^j) : \mathfrak{so}(n) \text{ に値をとる 1 次微分形式} \tag{13.2}$$

が得られる．ただし $\mathfrak{so}(n)$ は n 次交代行列全体の集合，すなわち $\mathrm{SO}(n)$ のリー環である．この Ω のことも**接続形式**ということがある．とくに

$$\begin{aligned}(D\boldsymbol{e}_1,\dots,D\boldsymbol{e}_n) &= \left(\sum_{m=1}^n \omega_1^m \boldsymbol{e}_m, \dots, \sum_{m=1}^n \omega_n^m \boldsymbol{e}_m\right) = (\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix}\omega_1^1 & \dots & \omega_n^1\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^n & \dots & \omega_n^n\end{pmatrix}\\ &= (\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)\Omega\end{aligned} \tag{13.3}$$

が成り立つ.

補題 13.2. リーマン接続の $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する接続形式を ω_j^k，$\{\boldsymbol{e}_j\}$ の双対枠を ω^j とすると，

$$d\omega^j = -\sum_{k=1}^n \omega_k^j \wedge \omega^k = \sum_{k=1}^n \omega^k \wedge \omega_k^j$$

が成り立つ．ただし d は外微分である.

証明： 外微分 $d\omega^j$ は 2 次微分形式であることに注意すれば，外微分の定義から，

$$\begin{aligned}d\omega^j(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) &= \boldsymbol{e}_k\bigl(\omega^j(\boldsymbol{e}_l)\bigr) - \boldsymbol{e}_l\bigl(\omega^j(\boldsymbol{e}_k)\bigr) - \omega^j\bigl([\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l]\bigr)\\
&= \boldsymbol{e}_k\delta_l^j - \boldsymbol{e}_l\delta_k^j - \omega^j\bigl(\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_l - \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_k\bigr) = \omega^j\bigl(\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_l - \nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_k\bigr)\\
&= -\sum_{m=1}^n \omega^j\bigl(\omega_l^m(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_m - \omega_k^m(\boldsymbol{e}_l)\boldsymbol{e}_m\bigr) = -\omega_l^j(\boldsymbol{e}_k) + \omega_k^j(\boldsymbol{e}_l)\\
&= -\sum_{m=1}^n \bigl(\omega_m^j(\boldsymbol{e}_k)\omega^m(\boldsymbol{e}_l) - \omega_m^j(\boldsymbol{e}_l)\omega^m(\boldsymbol{e}_k)\bigr) = -\sum_{m=1}^n \omega_m^j \wedge \omega^m(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l).\end{aligned}$$

■ゲージ変換　リーマン多様体 (M,g) の領域 U 上で定義された正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ と，U 上の n 個のベクトル場の組 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ に対して，$\{\boldsymbol{a}_j\}$ が正規直交枠であるための必要十分条件は

$$(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)A \qquad \bigl(A\colon U \to \mathrm{O}(n) \text{ は } C^\infty\text{-級}\bigr) \tag{13.4}$$

なる写像 A が存在することである．ただし $\mathrm{O}(n)$ は n 次直交行列全体がなすリー群である．とくに式 (13.4) の A が $\mathrm{SO}(n)$ に値をとるとき，$\{\boldsymbol{a}_j\}$ と $\{\boldsymbol{e}_j\}$ は同じ**向き**を定める.

補題 13.3. 正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する接続形式 Ω と，(13.4) で与えられる枠 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ に関する接続形式 $\widetilde{\Omega}$ の間には,

$$\widetilde{\Omega} = A^{-1}\Omega A + A^{-1}dA$$

なる関係がある.

証明： 式 (13.3) より

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n) &= (\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)\widetilde{\Omega}\\
D(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n) &= D\big((\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)A\big)\\
&= D\big((\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)\big)A + (\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)dA = (\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)\Omega A + (\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)dA\\
&= (\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)A^{-1}\Omega A + (\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)A^{-1}dA = (\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)\big(A^{-1}\Omega A + A^{-1}dA\big)
\end{aligned}$$

■曲率形式　リーマン接続の接続形式 $\Omega = (\omega_i^j)$ に対して

$$\Gamma := d\Omega + \Omega\wedge\Omega = \left(d\omega_i^j + \sum_{m=1}^n \omega_i^m\wedge\omega_m^j\right) \tag{13.5}$$

で与えられる $\mathfrak{so}(n)$ に値をとる 2 次微分形式を，接続 ∇ の**曲率形式**という.

補題 13.4. 式 (13.5) で与えられた曲率形式 $\Gamma = (\Gamma_j^k)$ は

$$R(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = \sum_{m=1}^n \Gamma_k^m(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_m = \sum_{l=1}^n\big(d\omega_k^l + \sum_{s=1}^n \omega_m^l\wedge\omega_k^m\big)(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_l$$

を満たす.

系 13.5. リーマン多様体 (M,g) の断面曲率が一定で，その値が k となるための必要十分条件は

$$\big\langle\Gamma_k^l(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j),\boldsymbol{e}_l\big\rangle = k(\delta_{jl}\boldsymbol{e}_i - \delta_{il}\boldsymbol{e}_j)$$

となることである．ただし (Γ_k^l) は Ω の曲率形式，$\langle\ ,\ \rangle$ は g が与える内積である.

証明： 断面曲率が一定値 k を持つための必要十分条件は

$$R(X,Y)Z = k(\langle Y,Z\rangle Z - \langle X,Z\rangle Y)$$

を満たすことである.

系 13.6. リーマン多様体 (M,g) の各点の近傍 U と U 上の正規直交枠で，対応する接続形式が恒等的に 0 となるものが存在するための必要条件は (M,g) が平坦，すなわち曲率テンソルが恒等的に 0 になることである.

証明： まず正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ とその接続形式 Ω をとり，(13.4) のような正規直交枠 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の接続形式が

$$\widetilde{\Omega} = A^{-1}dA + A^{-1}\Omega A = 0$$

となるような行列値関数 $\Omega\colon U\to \mathrm{SO}(n)$ を見つければよい．これは $dA + \Omega A = 0$ という A に関する線形微分方程式だが，その適合条件は $\Gamma = 0$ となることである．とくに Ω は $\mathfrak{so}(n)$ に値をとる微分形式だから，単連結領域 U 上では方程式 $dA + \Omega A = 0$ は $\mathrm{SO}(n)$ に値をとるような解 A をもつ.

■平坦なリーマン多様体

定理 13.7. 平坦な n 次元リーマン多様体 (M,g) の単連結領域 U に対して，等長写像 $f\colon U\to \boldsymbol{R}^n$ が存在する．ただし $\boldsymbol{R}^n$ にはユークリッド計量が与えられているものとする．

証明： 簡単のため U 上の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ をとることができるものとしておく．このとき，$F\colon U\to \mathrm{SO}(n)$ で

$$dF = F\Omega$$

となるものが存在する．ただし Ω はリーマン接続の接続形式である．このようにして得られた $F=(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n)$ ($\boldsymbol{u}_j$ は U 上の $\boldsymbol{R}^n$ 値関数) に対して，$\boldsymbol{R}^n$ 値 1 次微分形式を

$$\alpha := \boldsymbol{u}_1\omega^1+\dots+\boldsymbol{u}_n\omega^n$$

と定める．ただし $\{\omega^j\}$ は $\{vecte_j\}$ の双対枠である．すると α は閉形式となるので $df=\alpha$ をみたす $f\colon U\to \boldsymbol{R}^n$ が存在する．これが求めるものである．

問題

13-1 補題 13.4 の証明を与えなさい (曲率テンソル，接続形式の定義式を書いていけばわかる).

13-2 系 13.6 の証明を完成させなさい.

13-3 定理 13.7 の証明を完成させなさい.