2012 年 1 月 31 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 14

お知らせ

- 今回で講義は終了です．予定まで進みませんでしたが，少しでも皆様のお役に立てれば幸いです．
- 成績は，提出物にて評価いたします．原則として，提出が 2 回以下の方は単位がでません．

前回までの訂正

- 講義資料 13, 1 ページ 10 行目：次元 m の $\Rightarrow$ 次元 n の
- 講義資料 13, 2 ページ，下から 8 行目：$-\omega^j(\ )\Rightarrow = -\,\omega^j(\ )$
- 講義資料 13, 2 ページ，下から 7 行目：$-\omega^j_l(\boldsymbol{e}_k)\omega^j_k(\boldsymbol{e}_l)\ \Rightarrow\ -\omega^j_l(\boldsymbol{e}_k)+\omega^j_k(\boldsymbol{e}_l)$
- 講義資料 13, 3 ページ, 補題 13.4 のステートメント：

$$R(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k=\sum_{m=1}^{n}\Gamma^m_k(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_m=\sum_{l=1}^{n}\Big(d\omega^l_k+\sum_{s=1}^{n}\omega^l_s\wedge\omega^s_k\Big)(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_l$$

- 講義資料 13, 3 ページ, 系 13.5 のステートメント：

$$d\omega^i_k+\sum_{s=1}^{n}\omega^i_s\wedge\omega^s_j=k\omega^i\wedge\omega^j$$

- 講義資料 13, 4 ページ，下から 6 行目：$vecte_j\ \Rightarrow\ \boldsymbol{e}_j$

授業に関する御意見

- 先生が理想とされる授業評価アンケートとは，どのようなものでしょうか？（そもそもアンケートを行うことが不要だとお考えかもしれませんが）．また，それをこの授業で試してみてはいかがでしょう．
  山田のコメント： 試験．授業の内容がきちんと定着していれば，学生がどう思おうと授業は成功．だから試験が最高の授業評価だと思う．やってみる？

質問と回答

質問： 今回使った Frobenius の定理と，以前紹介したベクトル場のカッコ積に関する条件がでてくる Frobenius の定理は何か関係があるのでしょうか．

お答え： “積分可能条件” という点で “同じこと” をやっています．同じこと，ということを理解するのはすこし大変ですが．

14 定曲率空間

この科目の講義の最初に予告した定理に証明を与える.

定理 14.1. 単連結な n 次元リーマン多様体 (M^n, g) の断面曲率が κ で一定ならば等長写像 $f\colon M^n \to M^n(\kappa)$ が存在する．ただし

$$M^n(k) = \begin{cases} \text{曲率 } \kappa \text{ の } n \text{ 次元球面} & (\kappa > 0) \\ n \text{ 次元ユークリッド空間} & (k = 0) \\ \text{曲率 } \kappa \text{ の } n \text{ 次元双曲空間} & (\kappa < 0) \end{cases}$$

である.

とくに $k = 0$ の場合は前回示した.

■準備 以下, M^n 上に, リーマン計量 g に関する正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を取り, その双対枠 $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ および接続形式 $\Omega = (\omega_i^j)$ を取っておく．前回みたように, 次が成り立つ.

$$g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}, \qquad \omega^j(\boldsymbol{e}_k) = \delta_k^j, \qquad \nabla \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^n \omega_j^k \boldsymbol{e}_k, \qquad d\omega^j = \sum_{k=1}^n \omega^k \wedge \omega_k^j. \tag{14.1}$$

すると, 前回みたように (M^n, g) の断面曲率が一定の値 κ であるための必要十分条件は

$$d\omega_k^i + \sum_{s=1}^n \omega_s^i \wedge \omega_j^s = \kappa \omega^i \wedge \omega^j \tag{14.2}$$

である.

■正曲率の場合 計量を定数倍することにより, $\kappa = 1$ としてよい.

定曲率 1 の n 次元球面は

$$S^n = M^n(1) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1\} \tag{14.3}$$

に $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のユークリッド計量から誘導される計量を入れたものとみなすことができる．はめ込み

$$f\colon M^n \ni p \longmapsto f(p) \in S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1} \tag{14.4}$$

が, リーマン多様体 (M^n, g) から S^n への等長はめ込みならば,

$$g(X, Y) = (f^* \langle \ , \ \rangle)(X, Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle \tag{14.5}$$

が成り立っている．いま, M^n の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に対して

$$\boldsymbol{a}_j := df(\boldsymbol{e}_j) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{14.6}$$

とおくと, (14.5) から, 各点 $p \in M^n$ に対して

$$\{\boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\}$$

2012 年 1 月 31 日

は $T_{f(p)}S^n$ の正規直交基底を与える．さらに

$$\boldsymbol{a}_0 := f$$

とおくと，$T_{f(p)}S^n = \big(\boldsymbol{a}_0(p)\big)^{\perp}$ となることから，

$$F(p) := \big(\boldsymbol{a}_0(p), \boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\big)$$

は $T_{f(p)}\boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R}^{n+1}$ の正規直交基底を与えている．したがって $F(p)$ は $n+1$ 次の直交行列を与えている．したがって写像 $F\colon M^n \to \mathrm{O}(n+1)$ が得られた．ただし $\mathrm{O}(n+1)$ は $(n+1)$ 次直交行列全体の集合（リー群）である．これを，等長はめ込み f の**適合枠**という．必要なら $\boldsymbol{e}_j$ の順番を取り替えることにより $\det F(p) = 1$ として一般性を失わない：

$$F\colon M^n \ni p \longmapsto F(p) = \big(\boldsymbol{a}_0(p), \boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\big) \in \mathrm{O}(n+1), \qquad \big(\boldsymbol{a}_0 = f\big) \tag{14.7}$$

補題 14.2. 式 (14.7) の適合枠は

$$dF = F\widetilde{\Omega}, \qquad \widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^1 & \dots & -\omega^n \\ \omega^1 & & & \\ \vdots & & \Omega & \\ \omega^n & & & \end{pmatrix} \tag{14.8}$$

を満たす．ただし ω^j, $\Omega = (\omega^j_i)$ はそれぞれ $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の双対枠，接続形式 (式 (14.1)) である．

証明： 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準計量であり，これに関するレビ・チビタ接続 D は $DX = dX$ (ベクトル場を $\boldsymbol{R}^{n+1}$-値関数と思ったときの微分) である．ここで，レビ・チビタ接続は，内積，方向微分およびベクトル場のカッコ積で表されることを思い出すと，(14.5), (14.1) から，

$$\langle d\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k\rangle = g(\nabla \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = g\left(\sum_{l=1}^n \omega_j^l \boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_k\right) = \omega_j^k.$$

また，

$$\langle d\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_0\rangle = d\,\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_0\rangle - \langle \boldsymbol{a}_j, d\boldsymbol{a}_0\rangle = -\,\langle \boldsymbol{a}_j, df\rangle = -\,\langle df(\boldsymbol{e}_j), df\rangle = -g(\boldsymbol{e}_j, *) = -\omega^j.$$

したがって

$$d\boldsymbol{a}_j = -\omega^j \boldsymbol{a}_0 + \sum_{l=1}^n \omega_j^k \boldsymbol{a}_k \qquad (j = 1, \dots, n).$$

一方，$df(X)$ は $f = \boldsymbol{a}_0$ に直交するから，

$$d\boldsymbol{a}_0 = df = \langle df, \boldsymbol{a}_1\rangle\, \boldsymbol{a}_1 + \dots + \langle df, \boldsymbol{a}_n\rangle\, \boldsymbol{a}_n = \sum_{k=1}^n \omega^k \boldsymbol{a}_k.$$

以上を行列表示すると結論が得られる．

ここで，式 (14.8) の $\widetilde{\Omega}$ は，M^n のリーマン計量 (と正規直交枠) のみから定まることに注意する．

補題 14.3. リーマン計量 g の断面曲率が 1 ならば，(14.8) の $\widetilde{\Omega}$ は

$$d\widetilde{\Omega} + \widetilde{\Omega} \wedge \Omega = 0$$

を満たす．

証明： 式 (14.1) と (**??**) の $\kappa = 1$ の場合を用いて頑張ればよい．

命題 14.4. 単連結リーマン多様体 (M^n, g) の断面曲率が一定で 1, かつ M^n 上の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ が存在する[*1] とする．点 $p_0 \in M^n$ をひとつ固定すると，(14.8) と初期条件 $F(p_0) = \mathrm{id}$ を満たす $F\colon M^n \to \mathrm{SO}(n+1)$ がただ一つ存在する．F の第一列を $f\colon M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ とすると，f は (M^n, g) から $S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ への等長はめ込みを与えている．

証明. 補題 14.3 より，微分方程式 (14.8) は適合条件を満たすので，M^n の単連結性から $F(p_0) = \mathrm{id}$ かつ (14.8) を満たす $F\colon M^n \to \mathrm{M}(n+1, \boldsymbol{R})$ ($n+1$ 次の行列に値をとる関数) がただひとつ存在する．とくに Ω は交代行列に値をとるので，

$$d(F^tF) = dF^tF + F^t(dF) = F(\Omega + {}^t\Omega)^tF = 0$$

である．したがって

$$F(p)^t(F(p)) = F(p_0)^t(F(p_0)) = \mathrm{id}$$

がすべての点 $p \in M^n$ で成り立つので $F\colon M^n \to \mathrm{O}(n+1)$ である．とくに，直交行列の行列式は 1 または -1 なので，det の連続性から

$$\det F(p) = \det F(p_0) = \det \mathrm{id} = 1$$

となる．すなわち，ここで得られた F は $\mathrm{SO}(n+1)$ に値をとる．ここで $F = (\boldsymbol{a}_0, \dots, \boldsymbol{a}_n)$，$f = \boldsymbol{a}_0$ とおくと，直交行列の列ベクトルは正規直交系をなすのでとくに $f = |\boldsymbol{a}_0| = 1$. したがって $f\colon M^n \to S^n$ とみなすことができる．ここで

$$df = d\boldsymbol{a}_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega^k \boldsymbol{a}_k \qquad \text{だから} \qquad df(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} \omega^k(\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{a}_k = \delta_j^k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_k.$$

すなわち

$$f^* \langle\ ,\ \rangle (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = \langle df(\boldsymbol{e}_j), df(\boldsymbol{e}_k)\rangle = \langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k\rangle = \delta_{jk} = g(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$$

なので f は等長写像を与えている． □

■負曲率の場合　計量を定数倍することにより，$\kappa = -1$ としてよい．

定曲率 -1 の n 次元双曲空間は

$$H^n = M^n(-11) = \{\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}_1^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = -1, x_0 > 0\} \tag{14.9}$$

に $\boldsymbol{R}_1^{n+1}$ のミンコフスキー計量 $\langle\ ,\ \rangle$ から誘導される計量を入れたものとみなすことができる．ただし

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = {}^t\boldsymbol{x} Y \boldsymbol{y} \qquad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{14.10}$$

で与えられるミンコフスキー計量である．ここで，

$$\mathrm{O}(n,1) := \{A \in \mathrm{M}(n+1)\,;\, {}^tAYA = Y\}$$

[*1] この仮定ははずすことができる．

とおくと，$A \in \mathrm{O}(n,1)$ に対して

$$\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^{n+1}_1)$$

が成り立つ．ここで $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,\dots,n} \in \mathrm{O}(n,1)$ とすると，

$$\det A = \pm 1, \qquad a_{00} \neq 0 \tag{14.11}$$

が成り立つ．そこで

$$\mathrm{SO}_+(n,1) := \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n,1) \,|\, a_{00} > 0, \det A = 1\} \tag{14.12}$$

とおく．これはリー群 $\mathrm{O}(n,1)$ の，単位元を含む連結成分である．

はめ込み

$$f\colon M^n \ni p \longmapsto f(p) \in H^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}_1 \tag{14.13}$$

が，リーマン多様体 (M^n, g) から S^n への等長はめ込みであるとする．このとき，M^n の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に対して

$$\boldsymbol{a}_j := df(\boldsymbol{e}_j) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{14.14}$$

とおくと，

$$\{\boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\}$$

は $T_{f(p)}H^n$ の正規直交基底を与える．さらに

$$\boldsymbol{a}_0 := f$$

とおくと，$T_{f(p)}S^n = \bigl(\boldsymbol{a}_0(p)\bigr)^{\perp}$ となる (ミンコフスキー内積における直交補空間) ことから，

$$F(p) := \bigl(\boldsymbol{a}_0(p), \boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\bigr)$$

は $T_{f(p)}\boldsymbol{R}^{n+1}_1 = \boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の正規直交基底を与えている．とくに

$$\langle \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0\rangle = -1, \qquad \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i\rangle = 1 \quad (i = 1, \dots, n), \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j\rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

が成り立つ．さらに H^n の定義から，$f_0 > 0$ であるから，必要なら $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の順番を入れ替えることで $F\colon M^n \to \mathrm{SO}_+(n,1)$ としてよい．これを，等長はめ込み f の**適合枠**という．

補題 14.5. 等長はめ込み $f\colon M^n \to H^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の適合枠は

$$dF = F\widetilde{\Omega}, \qquad \widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \dots & \omega^n \\ \omega^1 & & & \\ \vdots & & \Omega & \\ \omega^n & & & \end{pmatrix} \tag{14.15}$$

を満たす．ただし ω^j, $\Omega = (\omega_i^j)$ はそれぞれ $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の双対枠，接続形式 (式 (14.1)) である．

証明： ほとんど補題 14.5 と同様だが，$\langle \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0 \rangle = -1$ に注意すると

$$\langle d\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_0 \rangle = -\omega^j$$

したがって

$$d\boldsymbol{a}_j = +\omega^j \boldsymbol{a}_0 + \sum_{l=1}^{n} \omega_j^k \boldsymbol{a}_k \qquad (j = 1, \dots, n)$$

が成り立つ.

補題 14.6. リーマン計量 g の断面曲率が 1 ならば，(14.15) の $\widetilde{\Omega}$ は

$$d\widetilde{\Omega} + \widetilde{\Omega} \wedge \Omega = 0$$

を満たす.

したがって，次が得られる.

命題 14.7. 単連結リーマン多様体 (M^n, g) の断面曲率が一定で -1, かつ M^n 上の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ が存在するとする．点 $p_0 \in M^n$ をひとつ固定すると，(14.15) と初期条件 $F(p_0) = \mathrm{id}$ を満たす $F\colon M^n \to \mathrm{SO}_+(n,1)$ がただ一つ存在する．F の第一列を $f\colon M^n \to \boldsymbol{R}_1^{n+1}$ とすると，f は (M^n, g) から $H^n \subset \boldsymbol{R}_1^{n+1}$ への等長はめ込みを与えている.