幾何学特論第四
講義ノート

東京工業大学 理学部/理工学研究科
2011 年度後期

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

1　多重線形写像と内積

■双対空間　実数体を係数とする有限次元線型空間 V に対して

$$V^* := \{\alpha\colon V \to \boldsymbol{R} \mid \alpha \text{ は線型写像}\}$$

に通常の方法で和とスカラ倍を定義して得られる線型空間を V の**双対空間**（そうつい） *dual space* という．V の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ に対して $\sigma^j \in V^*$ $(j = 1, \dots, n)$ を

(1.1)
$$\sigma^j(\boldsymbol{v}) = v^j, \qquad \text{ただし} \quad \boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + \dots + v^n\boldsymbol{e}_n$$

とおくと，

(1.2)
$$[\sigma^1, \dots, \sigma^n]$$

は V^* の基底となる．これを基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する**双対基底** *dual basis* という．とくに

$$\sigma^j(\boldsymbol{e}_k) = \delta^j_k = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

が成り立つ．

今，$[\boldsymbol{f}_k]$ を V のもう一つの基底とすると，

$$\boldsymbol{f}_k = \sum_{j=1}^{n} a^j_k \boldsymbol{e}_j \qquad (k = 1, \dots, n),$$

行列を用いれば

(1.3)
$$[\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n] = [\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]A \qquad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}$$

と書ける．ここで a^j_k は実数で，行列 A は n 次正則行列である．この A を基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ から $[\boldsymbol{f}_k]$ への**基底変換行列**とよぶ．

ここで $[\boldsymbol{e}_j]$ の双対基底を $[\sigma^j]$, $[\boldsymbol{f}_k]$ の双対基底を $[\mu^k]$ とすれば

(1.4)
$$\sigma^j = \sum_{k=1}^{n} a^j_k \mu^k \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \vdots \\ \sigma^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

有限次元線型空間 V とその双対空間 V^* は次元が一致するから，線型空間として同型である．例えば対応

$$V \ni \boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + \dots + v^n\boldsymbol{e}_n \longleftrightarrow v^1\sigma^1 + \dots + v^n\sigma^n \in V^*$$

は同型を与えるが，これは基底の取り方に依存するので，V と V^* の自然な同型とは言えない．しかし，V と V^* の双対 $(V^*)^*$ の間には次のような同型が存在する：

2011 年 10 月 4 日 (2011 年 10 月 11 日訂正)

補題 1.1. 写像

$$\iota\colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \iota(\boldsymbol{v}) = \xi \in (V^*)^*, \qquad \xi(\alpha) = \alpha(\boldsymbol{v}) \quad \bigl(\alpha \in V^*\bigr)$$

は線型同型写像である．

この写像の定義は基底を用いていないから，V と $(V^*)^*$ は自然に同型になるといってよい．以下，同型写像 ι を通して V と $(V^*)^*$ を同一視することにする．補題 1.1 の ξ を $\boldsymbol{v}$ と同一視すれば $\boldsymbol{v}(\alpha) = \alpha(\boldsymbol{v})$ なので

$$\alpha(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}(\alpha) = \langle \alpha, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \alpha \rangle$$

などと書くことがある．

■多重線型写像

定義 1.2. 線型空間 U, V, W に対して，写像 $\varphi\colon V \times W \to U$ が**双線型** *bilinear* であるとは，

- 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ を固定したとき $\varphi(\boldsymbol{a}, \cdot)\colon W \to U$ が線型写像,
- 任意の $\boldsymbol{p} \in W$ を固定したとき $\varphi(\cdot, \boldsymbol{p})\colon V \to U$ が線型写像

となることである．とくに，$U = \boldsymbol{R}$ のとき，φ は**双線型形式** *bilinear form* とよぶことがある．

3 つ以上の線型空間 $V_1, \dots, V_m$ の直積から線型空間 U への写像が m **重線型** であるということも同様に定義する．

線型空間 V, W の双対空間の元 $\alpha \in V^*, \psi \in W^*$ に対して

$$\alpha \otimes \psi\colon V \times W \ni (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}) \longmapsto \alpha(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{R}$$

と定めると $\alpha \otimes \psi$ は双線型形式である．ただし右辺は $\alpha(\boldsymbol{a})$ と $\psi(\boldsymbol{p})$ の実数としての積である．この $\alpha \otimes \psi$ を α と ψ の**テンソル積**という．$V \times W$ 上の双線型形式全体の集合に和とスカラ倍の構造を入れて得られる線型空間を

$$V^* \otimes W^* := \bigl\{\varphi\colon V \times W \to \boldsymbol{R} \mid \varphi \text{ は双線型}\bigr\}$$

を V^* と W^* の**テンソル積** *tensor product* という．テンソル積 $\alpha \otimes \psi$ は $V^* \otimes W^*$ の要素であるが，$V^* \otimes W^*$ の要素がすべてこの形で書けるわけではない．

煩雑さを避けるため，$V = W$ の場合を考える：

補題 1.3. 有限次元線型空間 V の双対空間 V^* の基底 $[\sigma^1, \dots, \sigma^n]$ に対して

$$\bigl\{\sigma^i \otimes \sigma^j \mid 1 \leqq i, j \leqq n\bigr\}$$

は $V^* \otimes V^*$ の基底を与える．とくに，$V^* \otimes V^*$ は n^2 次元線型空間である．

■1 次変換　線型空間 V から W への線型写像全体の集合に線型空間の構造を与えたものを

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \bigl\{T\colon V \to W \mid T \text{ は線型写像}\bigr\}$$

と書く．とくに $\mathrm{Hom}(V, V)$ は V 上の 1 次変換全体の集合である．

補題 1.4. 線型写像 $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して $\varphi_T \colon V \times W^* \to \boldsymbol{R}$ を

$$\varphi_T \colon V \times W^* \ni (\boldsymbol{v}, \alpha) \longmapsto \varphi_T(\boldsymbol{v}, \alpha) = \alpha\,(T(\boldsymbol{v})) \in \boldsymbol{R}$$

で定めると，$\varphi_T \in V^* \otimes W$ で，対応 $\mathrm{Hom}(V, W) \ni T \mapsto \varphi_T \in V^* \otimes W$ は同型写像である．

とくに $V^* \otimes V$ は $\mathrm{Hom}(V, V)$ と同一視することができる．

■対称双線形形式と 2 次形式　双線型形式 $\varphi \in V^* \otimes V^*$ が**対称**であるとは $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ が任意の $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ に対して成り立つことである．$\alpha, \beta \in V^*$ に対して

$$\alpha \cdot \beta := \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha)$$

とおくと，これは対称双線形形式である．この "$\cdot$" を**対称積**とよぶ．

補題 1.5. n 次元線型空間 V 上の対称双線形形式全体の集合は $V^* \otimes V^*$ の $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次元部分空間である．とくに，$[\sigma^j]$ を V^* の基底とするとき，

$$\left\{\sigma^j \cdot \sigma^k \mid 1 \leqq j \leqq k \leqq n\right\}$$

は V 上の対称双線形形式全体の空間の基底を与える．

とくに $[\boldsymbol{e}_j]$ を V の基底，$[\sigma^j]$ をその双対基底とするとき，対称双線形形式 φ に対して $\varphi_{ij} := \varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ とおくと，

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}\, \sigma^i \cdot \sigma^i + 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \varphi_{ij}\, \sigma^i \cdot \sigma^j \tag{1.5}$$

と表される．このとき $\Phi := (\varphi_{ij})$ は対称行列となるが，これを対称双線形形式 φ の基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する表現行列とよぶ．

補題 1.6. 2 次形式 φ の基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する表現行列を Φ とするとき，

- Φ の固有値はすべて実数，
- Φ は直交行列によって対角化可能，かつ
- Φ の n 個の固有値のうち正のものの個数，負のものの個数，0 の個数は基底の取り方によらない．

対称双線形形式 $\varphi \in V^* \otimes V^*$ に対して，対応 $V \ni \boldsymbol{v} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{R}$ を φ に対応する 2 **次形式** *quadratic form* という．

補題 1.7. 線形空間 V 上の対称双線形形式 φ と ψ に対応する 2 次形式が一致するならば $\varphi = \psi$ である．

したがって，以下，対称双線形形式と 2 次形式を区別しなかったりする．

■内積

定義 1.8. 線型空間 V 上の対称双線形形式 (2 次形式) φ が

- **非退化**であるとは，「任意の $\boldsymbol{v}$ に対して $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}) = 0$ が成り立つならば $\boldsymbol{a} = 0$ が成り立つ」ことである．
- **正値**（正定値）とは，任意の $\boldsymbol{v} \neq 0$ に対して $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$ が成り立つことである．

- **負値**（負定値）とは，任意の $\boldsymbol{v} \neq 0$ に対して $\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) < 0$ が成り立つことである．

正値あるいは負値の 2 次形式は非退化である．正値でも負値でもない非退化 2 次形式を**不定値**という．

補題 1.9. 2 次形式 φ の，ある基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する表現行列 Φ の正の固有値の個数を p, 負の固有値の個数を q，零固有値の個数を r とする．

- φ が非退化であるための必要十分条件は $r = 0$ である．
- φ が正値であるための必要十分条件は $q = r = 0$ である．
- φ が負値であるための必要十分条件は $p = r = 0$ である．

定義 1.10. V 上の非退化 2 次形式 φ の表現行列の正の固有値の個数を p，負の固有値の個数を q とするとき，(p, q) （$p + q = \dim V$) を φ の**符号数**という．

定義 1.11. n 次元線型空間 V 上の非退化 2 次形式を V の**内積**という．

通常， V の内積といえば正値のものを指すことが多い．ここでは（一時的に）不定値のものも含めて内積とよぶが，これらを区別するときには**正値内積**，**不定値内積**とということにする．

補題 1.12. 次元が n であるような線型空間 V に与えられた内積 φ に対して，次を満たす V の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ が存在する：$\varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ ただし $\varepsilon_i = \pm 1$, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号である．

証明は Gram-Schmidt の直交化による．補題 1.12 のような基底を，内積 φ に関する**正規直交基**という．とくに，$\varepsilon_i = 1, \varepsilon_i = -1$ となるような添字 i の個数をそれぞれ p, q とすると，内積の符号数は (p, q) となる．

例 1.13. G を n 次対称行列，$\varphi_G \colon \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi_G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := {}^t\boldsymbol{v} G \boldsymbol{w}$ で定めると，φ_G は双線型形式である．とくに φ_G が内積を与えるための必要十分条件は G が正則行列となることで， このとき，G の正の固有値の個数を p とすると φ_G の符号数は $(p, n - p)$ である．

G が単位行列のとき，φ_G は $\boldsymbol{R}^n$ の通常の内積 $\varphi_G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = v^1 w^1 + \dots + v^n w^n$ となる．これを**ユークリッド内積**という．また，$G = \operatorname{diag}\{-1, \dots, -1, 1, \dots, 1\}$ (-1 を q 個，1 を $n - q$ 個並べた対角行列) とすると

$$\varphi_G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -\sum_{j=1}^{q} v^j w^j + \sum_{j=q+1}^{n} v^j w^j$$

となる．$\boldsymbol{R}^n$ にこのような内積を与えたものを $\boldsymbol{R}^n_q$ と書く．

とくに φ を明示する必要がない場合は，$\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ のことを $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ などと書くこともある．

命題 1.14. 有限次元線型空間 V に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとき，V から双対空間 V^* への写像

$$\flat \colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v}^\flat = \langle \boldsymbol{v}, \cdot \rangle \in V^*$$

は線型空間の同型を与える．

■ミンコフスキー空間　例 1.13 でとくに $q = 1$ の場合，$\boldsymbol{R}^n_1$ を n 次元**ミンコフスキー空間** *Minkowski space* という．この内積を (ミンコフスキー内積) を $\langle\ ,\ \rangle$ と書き，習慣にしたがって $n = m + 1$ として $\boldsymbol{R}^{m+1}$ の

要素を $\boldsymbol{x} = {}^t(x^0, x^1, \dots, x^m)$ と書くことにすると，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -x^0 y^0 + \sum_{j=1}^{m} x^j y^j \qquad \boldsymbol{x} = {}^t(x^0, x^1, \dots, x^m), \quad \boldsymbol{y} = {}^t(y^0, y^1, \dots, y^m)$$

と表すことができる．

定義 1.15. ベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{m+1}_1 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ が**空間的** *spacelike*, **時間的** *timelike*, **光的** *lightlike* であるとは，それぞれ $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle < 0$, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ が成り立つことである．光的ベクトルは**等方的** *isotoropic*, **零的** *null* ともよばれる．また，便宜上，零ベクトルは空間的であるとする．

命題 1.16.

- $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{m+1}_1$ が時間的であるとき，直交補空間 $\boldsymbol{v}^\perp = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{m+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = 0\}$ は，空間的ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^{m+1}_1$ の m 次元部分空間である．とくに，ミンコフスキー内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $\boldsymbol{v}^\perp$ への制限は，$\boldsymbol{v}^\perp$ の正値な内積を与える．
- 光的ベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{m+1}_1$ の直交補空間 $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\boldsymbol{v}$ を含む $\boldsymbol{R}^{m+1}_1$ の m 次元部分空間で, 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $\boldsymbol{v}^\perp$ への制限は半正値である．

問題

1-1 補題 1.6 を示しなさい．
1-2 補題 1.7 を示しなさい．
1-3 補題 1.9 を示しなさい．
1-4 命題 1.16 を示しなさい．
1-5 有限次元線型空間 V に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとき $\mathrm{Hom}(V, V)$ と $V^* \otimes V^*$ に自然な同型写像が定義できることを示しなさい．

2　リーマン多様体

■多様体　可微分多様体 *differentiable manifold* とは，ハウスドルフ位相空間 M と M 上の C^∞ 級**アトラス** *atlas* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$ の組のことである．ただし，各添字 $\alpha \in A$ に対して $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は M の開集合 U_α と同相写像 $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \boldsymbol{R}^n$ の組で次を満たすものである：(1) $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$, (2) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は $U_\alpha \cap U_\beta$ が空でない限り可微分同相写像である．この n を多様体 M の**次元** *dimension* といい，$n = \dim M$ と書く．

可微分多様体のことを単に多様体ということがある．さらに，多様体 $(M, \mathcal{A})$ のことを，アトラスを明示せずに多様体 M と書くのが普通である．

アトラス $\mathcal{A}$ の要素 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は M の**局所座標系** *local coordinate system* あるいは**チャート** *chart* とよぶ．とくに点 $p \in U_\alpha$ に対して $\varphi_\alpha(p)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の要素であるから，$\varphi_\alpha(p) = \bigl(x^1(p), \dots, x^n(p)\bigr)$ と書いて (x^j) を M の局所座標系とよぶことが多い．

可微分多様体 M 上の関数 $f\colon M \to \boldsymbol{R}$ が C^∞ 級であるとは任意のチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対して $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \boldsymbol{R}^n$ 上で定義された可微分関数となることである．ここで $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は，関数 f の，局所座標 $\varphi_\alpha = (x^j)$ による表現と見なすことができることに注意する．C^∞ 級関数のことを単に**可微分関数** *differential function* という．M 上可微分関数全体の集合 $\mathcal{F}(M)$ には，通常の関数の和・積を用いて可換環の構造を入れることができる．

多様体 $(M, \mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$ に対して，M の開集合 U と同相写像 $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \boldsymbol{R}^n$ が**適合的**とは，任意の α に対して $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ が微分同相写像となることである．通常，多様体 M のアトラス $\mathcal{A}$ としては，極大のものをとる．すなわち，(U, φ) が $\mathcal{A}$ と適合的なら $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ が成り立つものとする．

■パラコンパクト性と単位の分割

定義 2.1. 位相空間 M が**パラコンパクト** *paracompact* であるとは，M の任意の開被覆 $\{U_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ に対して次をみたす開被覆 $\{V_\beta \,|\, \beta \in B\}$ が存在することである：

- 各 $\beta \in B$ に対して $V_\beta \subset U_\alpha$ を満たす $\alpha \in A$ が存在する．
- 任意の β に対して $V_{\beta'} \cap V_\beta \neq \emptyset$ となる $\beta' \in B$ は有限個である．

多様体 M がパラコンパクトであるとは，M が位相空間としてパラコンパクトとなることである．

補題 2.2. パラコンパクト多様体の部分多様体はパラコンパクトである．また，パラコンパクト多様体同士の積多様体はまたパラコンパクトである．

命題 2.3 (単位の分割)**.** パラコンパクト多様体 M 上の可微分関数 $\eta_\beta \in \mathcal{F}(M)$ の族 $\{\eta_\beta\}$ で次を満たすものが存在する：

- 各 β に対して $0 \leqq \eta_\beta \leqq 1$.
- 各 β に対して $V_\beta = \{p \in M \,|\, \eta_\beta(p) \neq 0\}$ とおくと，$\overline{V_\beta}$ はコンパクトで，一つの局所座標系の定義域に含まれる．

2011 年 10 月 11 日

- 各 β に対して $V_\beta \cap V_{\beta'} \neq \emptyset$ を満たす β' は有限個.
- $\sum_{\beta\in B} \eta_\beta = 1$.

この 最後の条件の総和は，3 番目の条件より有限和となる．命題 2.3 の $\{\eta_\beta\}$ を M 上の**単位の分割** *partition of unity* という．単位の分割の証明は，たとえば，松島与三「多様体入門」II 章 §14 を見よ.

■接空間と余接空間　多様体 M 上の点 p を固定するとき，線型写像 $X\colon \mathcal{F}(M) \to \boldsymbol{R}$ でライプニッツ・ルール $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$ を満たすものを M の p における**接ベクトル** *tangent vector* とよぶ．p を含む M の局所座標系 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ をとり,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p : \mathcal{F}(M) \ni f \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p f = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j}(\varphi(p)) \in \boldsymbol{R}$$

は p における接ベクトルである．M の p における接ベクトル全体の集合を M の p における**接空間**あるいは**接ベクトル空間**といい，T_pM と書く．多様体 M の次元を n とすれば, T_pM は

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right] \tag{2.1}$$

で生成される n 次元線型空間である．もう一つの局所座標系 $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ に対して座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}\colon (x^j) \mapsto (y^l)$ を考えれば,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p \tag{2.2}$$

となる．一方，$X \in T_pM$ を

$$X = \sum_{j=1}^n X^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{k=1}^n \tilde{X}^k \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p \qquad \text{とすれば} \qquad \tilde{X}^k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p) X^j \tag{2.3}$$

が成り立つ.

線型空間 T_pM の双対空間を T_p^*M と書き，M の p における**余接空間** *cotangent space* という．とくに，基底 (2.1) の双対基底を

$$\left[(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\right] \tag{2.4}$$

と書く．(2.2) を用いれば,

$$(dy^k)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p)(dx^j)_p \tag{2.5}$$

を得る.

■接束とベクトル場　多様体 M 上の各点における接空間を集めて得られる集合

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$$

を M の**接束** *tangent bundle* という．TM から M への自然な射影を π と書く：$\pi(X) = p$ $(X \in T_pM)$. M の各チャート $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ に対して

$$\tilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \ni X = \sum_{j=1}^n X^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \longmapsto \left(\varphi(p), X^1, \dots, X^n\right) \in \varphi(U) \times \boldsymbol{R}^n$$

を TM の座標系と見なすことにより，TM には $2n$ 次元多様体の構造を入れることができる．

可微分写像 $X\colon M \to TM$ が $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ (M の恒等写像) を満たすとき，X を**ベクトル場**とよぶ．すなわ，X は M の各点 p に対して T_pM の要素を対応させる「滑らかな」対応である．局所座標系を用いれば

$$X = \sum_{j=1}^{n} X^j(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (\ X^j(x^1, \dots, x^n) \text{ は } (x^k) \text{ の可微分関数}) \tag{2.6}$$

と書ける．ただし $\partial/\partial x^j$ は $p \mapsto (\partial/\partial x^j)_p$ で与えられる局所的なベクトル場である．

■接束から誘導されるベクトル束　接束と同様にして $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$ に $2n$ 次元多様体の構造を入れて**余接束** *cotangent bundle* という．また，余接空間のテンソル積を用いて，たとえば

$$T^*M \otimes T^*M := \bigcup_{p\in M} T_p^*M \otimes T_p^*M$$

などを考えることができる．

一般に，多様体 E, M，可微分な全射 $\pi\colon E \to M$ の組が次を満たすとき，(E, M, π) を M 上の**ベクトル束** *vector bundle* という：

- 各 $p \in M$ に対して $E_p = \pi^{-1}(p)$ には N 次元線型空間の構造が与えられている（したがって，M の次元を n とすると E の次元は $N + n$ となる）．
- M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と可微分同相写像 $\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^N$ の族 $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}$ で, $\tilde{\varphi}_\alpha|_{E_p}\colon E_p \to \{p\} \times \boldsymbol{R}^N \simeq \boldsymbol{R}^N$ が線型同型写像となるものが存在する．

ここで挙げた $TM, T^*M, T^*M \otimes T^*M$ などは M 上のベクトル束である．

ベクトル束 (E, M, π)（簡単のためにベクトル束 E と書くこともある）の**切断** *section* とは,

$$\xi\colon M \longrightarrow E \qquad \pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$$

となる可微分写像のことである．とくに，ベクトル場は接束の切断である．ベクトル束 E の切断全体の集合を $\Gamma(E)$ と書く．習慣にしたがって，ベクトル場全体の集合 $\Gamma(TM)$ は $\mathfrak{X}(M)$ とも書く．

一般に $\Gamma(E)$ は線型空間の構造をもつ．さらに，$\mathcal{F}(M)$ を係数環とする加群の構造を持っている．

■リーマン計量　多様体 M 上のベクトル束

$$S(T^*M \otimes T^*M) = \cup_{p\in M} S(T_p^*M \otimes T_p^*M), \qquad S(T_p^*M \otimes T_p^*M) = (\ T_pM \text{ 上の対称双線形形式全体})$$

の切断を，M 上の対称 2 次形式の場，あるいは単に 2 次形式という．

補題 2.4. 多様体 M の各点 p に，T_pM の 2 次形式 Q_p を対応させる規則 $Q\colon p \mapsto Q_p$ 与えられているとき，Q が $S(T^*M \otimes T^*M)$ の（滑らかな）切断となるための必要十分条件は，任意の滑らかなベクトル場 X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $M \ni p \mapsto Q_p(X_p, Y_p) \in \boldsymbol{R}$ が可微分関数となることである．

証明. M の局所座標系 $(U, \varphi = (x^j))$ に対して $E = S(T_p^*M \otimes T_p^*M)$ の基底を $\left[(dx^j)_p \cdot (dx^k)_p \,|\, 1 \leqq j \leqq k \leqq n\right]$ ととることができる．ただし $\cdot$ は対称積である．E の可微分多様体としての構造は，この基底に関する成分を用いて定義する．いま,

$$Q_{ij}(p) = Q_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)$$

とおけば，$Q_{ij}=Q_{ji}$ だから

$$Q_p=\sum_{i,j=1}^{n} Q_{ij}(p)\,(dx^i)_p\otimes(dx^j)_p=\sum_{j=1}^{n} Q_{jj}(p)\,(dx^j)_p\cdot(dx^j)_p+2\sum_{1\leqq j<k\leqq n} Q_{jk}(p)\,(dx^j)_p\cdot(dx^k)_p$$

とおけるので，E のチャートの定義のしかたより，Q が M から E への可微分写像となるための必要十分条件は各 Q_{ij} が可微分となることである．この事実と，ベクトル場の局所表示を用いれば結論が得られる． □

定義 2.5. 多様体 M 上の**リーマン計量** *Riemannian metric*（**擬リーマン計量** *pseudo Riemannian metric*）とは，$S(T^*M\otimes T^*M)$ の切断 g で，各点 p で g_p が T_pM の正値（非退化）な内積を与えるものである．

多様体 M と M 上のリーマン計量 g の組 (M,g) を**リーマン多様体** *Riemannian manifold* とよぶ.

以下，(M,g) をリーマン多様体とする．M の局所座標系 $(U,(x^j))$ に対して

$$g=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i\otimes dx^j \qquad g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

と表すと，g_{ij} は U 上の滑らかな関数で，行列 (g_{ij}) は正値な対称行列である．

リーマン計量 g を明示する必要がない場合は，$g(X,Y)$ のことを $\langle X,Y\rangle$ と表すこともある.

定理 2.6. 任意のパラコンパクト多様体上にリーマン計量が存在する.

証明. 命題 2.3 の単位の分割 $\{\eta_\beta\}$ をとり，$V_\beta=\{p\in M\,|\,\eta_\beta(p)\neq 0\}$ とする．各 β に対して V_β はひとつの局所座標系に入るので，その座標を (x^j) とおき，$g_\beta:=\sum_{i=1}^{n} dx^i\otimes dx^i$ とおくと，g_β は V_β 上のリーマン計量である．V_β の外では η_β は 0 になるので，$\eta_\beta g_\beta$ は M 全体で定義された 2 次形式となるが，$g\colon=\sum_\beta \eta_\beta g_\beta$ とおけば，g が正値になる． □

■リーマン多様体の例 (1)

例 2.7 (ユークリッド空間)**.** $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元多様体と見なすとき，$T_p\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ と同一視できる．すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ の標準座標系を $(x^1,\dots,x^n)$ とするとき，

$$T_p\boldsymbol{R}^n\ni X=\sum X^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\leftrightarrow(X^1,\dots,X^n)\in\boldsymbol{R}^n.$$

したがって $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な内積を $T_p\boldsymbol{R}^n$ の内積と見なすことにより $\boldsymbol{R}^n$ にリーマン計量 g_0 を与えることができる．標準座標を用いれば $g_0=dx^1\otimes dx^1+dx^2\otimes dx^2+\cdots+dx^n\otimes dx^n$ である.

例 2.8 (部分多様体)**.** 多様体 N の部分集合 M が N の部分多様体となっているとすると，各 $p\in M$ に対して T_pM は T_pN の線型部分空間となっている．もし N にリーマン計量が g 与えられているならば，g_p を T_pM に制限すれば，これは T_pM の内積を与えているので M にリーマン計量を与えることになる．これを N のリーマン計量から誘導される M の計量とよぶ.

例 2.9 (球面)**.** ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準座標系を $(x^1,\dots,x^{n+1})$ とするとき，陰関数定理より

$$S^n:=\left\{\boldsymbol{x}=(x^1,\dots,x^{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\;\middle|\;\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\sum_{j=1}^{n+1}(x^j)^2=1\ a\right\}$$

は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の n 次元部分多様体となる．したがって $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準計量から S^n のリーマン計量が誘導される．これを S^n の標準計量という．

例 2.10 (双曲空間)**.** ミンコフスキー空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ は集合として $\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同一視されるから，それによって多様体とみなすことができる．このとき，$H^n_\pm := \{\boldsymbol{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \boldsymbol{R}^{n+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -1\}$ とおくと，陰関数定理よりこれは $\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の部分多様体である．$H^n_\pm$ は連結ではないので，その連結成分

$$H^n := \{\boldsymbol{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \boldsymbol{R}^{n+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -1, x^0 > 0\}$$

をとると，$\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の連結な部分多様体 H^n が得られる．

点 $\boldsymbol{x} \in H^n$ に対して $T_{\boldsymbol{x}}H^n = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{n+1}_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = 0\} = \boldsymbol{x}^\perp$ となる．とくに，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $T_{\boldsymbol{x}}H^n$ への制限は正値なので，H^n 上に **リーマン計量** g_H が得られたことになる．リーマン多様体 (H^n, g_H) を**双曲空間** *hyperbolic space* とよぶ．

問題

2-1 (M, g) をリーマン多様体，$(x^1, \dots, x^n)$, $(y^1, \dots, y^n)$ を局所座標系とする．

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{k,l=1}^n \tilde{g}_{kl} dy^k \otimes dy^l \qquad \text{と表すとき，} \qquad \tilde{g}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} g_{ij}$$

が成り立つことを確かめなさい．

2-2 $\boldsymbol{R}^2$ のユークリッド計量 g_0 の極座標 (r, θ) に関する成分表示を求めなさい．

2-3 S^n の開集合 $U = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n \,|\, x^{n+1} \neq -1\}$ 上で座標系 $\xi^j = x^j/(x^{n+1} + 1)$ $(j = 1, \dots, n)$ をとる（南極からの立体射影）．S^n の標準計量を座標系 (ξ^j) を用いて表示しなさい．

2-4 例 2.10 について

(1) H^n は $\boldsymbol{R}^n$ と微分同相であることを示しなさい．

(2) $\varphi\colon H^n \to \boldsymbol{R}^n$ を

$$\varphi(x^0, \dots, x^n) = (\xi^1, \dots, \xi^n) = \frac{1}{1 + x^0}(x^1, \dots, x^n)$$

とおくと，

$$\varphi(H^n) = B^n = \{(\xi^1, \dots, \xi^n) \in \boldsymbol{R}^n \mid \sum (\xi^j)^2 < 1\}$$

で，φ は H^n から B^n の可微分同相写像であることを示しなさい（立体射影）．

(3) 上の問いの (ξ^k) を H^n の座標と見なし, その座標に関する計量 g_H の表示を求めなさい．この座標による双曲空間の表示を Poincaré モデルとよぶ．

(4) $\psi\colon H^n \to \boldsymbol{R}^n$ を

$$\psi(x^0, \dots, x^n) = (\eta^1, \dots, \eta^n) = \frac{1}{x^0 - x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}, 1)$$

とおくと，

$$\psi(H^n) = \boldsymbol{R}^n_+ = \{(\eta^1, \dots, \eta^n) \,|\, \eta^n > 0\}$$

で，ψ は H^n から $\boldsymbol{R}^n_+$ の可微分同相写像であることを示しなさい．

(5) 上の問いの (η^k) を H^n の座標と見なし, その座標に関する計量 g_H の表示を求めなさい．この座標による双曲空間の表示を上半空間モデルとよぶ．

3　等長写像

■関数の微分　多様体 M の点 p における接ベクトル $X \in T_pM$ は $\mathcal{F}(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への写像と見なすことができたが，ここで, 関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ を固定して，

$$(df)_p \colon T_pM \ni X \longmapsto (df)_p(X) := Xf \in \boldsymbol{R} \tag{3.1}$$

と定めると，$(df)_p$ は T_pM から $\boldsymbol{R}$ への線型写像となる．言い換えれば $(df)_p \in T_p^*M$．さらに，点 $p \in M$ に対して $(df)_p \in T_p^*M$ を対応させる写像 $df \colon M \to T^*M$ は余接束の切断を与えている．一般に，余接束の切断を **（１次）微分形式**とよぶが，1 次微分形式 df のことを，関数 f の**微分** *differential* とよぶ.

補題 3.1. 多様体 M のチャート $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ に対して，

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j$$

が成り立つ.

■写像の微分　二つの可微分多様体 M, N の間の写像 $f \colon M \to N$ が**可微分** *differentiable* であるとは，任意の可微分関数 $g \in \mathcal{F}(N)$ に対して，$g \circ f$ が M 上の可微分関数となることである．M から N への可微分写像全体の集合を $C^\infty(M, N)$ と書くことにする.

補題 3.2. 写像 $f \colon M \to N$ が可微分であるための必要十分条件は，任意の点 $p \in M$ に対して p を含む M のチャート (U, φ) と $f(p)$ を含む N のチャート (V, ψ) に対して

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \boldsymbol{R}^m \supset \varphi\bigl(U \cap f^{-1}(V)\bigr) \longrightarrow \psi(V) \subset \boldsymbol{R}^n$$

が可微分写像となることである．ここで $m = \dim M$, $n = \dim N$ である.

可微分写像 $f \colon M \to N$ が与えられたとき，各点 $p \in M$，$X \in T_pM$ に対して

$$(df)_p(X) \colon \mathcal{F}(N) \ni g \longmapsto (d(g \circ f))_p(X) \in \boldsymbol{R}$$

と定義すると，$(df)_p(X) \in T_{f(p)}N$ となることがわかる．このようにして得られる $(df)_p \colon T_pM \to T_{f(p)}N$ を写像 f の p における**微分** *differential* という.

補題 3.3. 写像 $f \colon M \to N$ の点 p における微分 $(df)_p$ は T_pM から $T_{f(p)}N$ への線型写像を与える．とくに，p の近傍における M のチャート $(U, \varphi = (x^j))$ と $f(p)$ の近傍における N のチャート $(V, \psi = (y^k))$ をとれば，基底

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right], \qquad \left[\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_{f(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_{f(p)}\right]$$

2011 年 10 月 25 日

この講義では「可微分」を C^∞-級の意味で用いる.

に関する $(df)_p$ の表現行列は

$$
\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(\varphi(p)) & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}(\varphi(p)) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}(\varphi(p)) & \dots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m}(\varphi(p))
\end{pmatrix} \tag{3.2}
$$

で与えられる．ただし

$$f^k = y^k \circ f \circ \varphi^{-1}$$

である．

とくに，$\boldsymbol{R}$ の区間 $I = (a, b)$ から多様体 M への可微分写像 $\gamma\colon (a, b) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ を M 上の**曲線**とよぶ．I のパラメータ（座標）を t とするとき，

$$\dot\gamma(t) := (d\gamma)_t \left(\frac{d}{dt}\right) \in T_{\gamma(t)}M$$

を曲線 γ の接ベクトルあるいは速度ベクトルとよぶ．M のチャート $\varphi = (x^j)$ に対して $\varphi \circ \gamma = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ と書くと，

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^m \frac{dx^j}{dt}(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)}$$

である．

補題 3.4. 多様体 M の任意の点 p と接ベクトル $X \in T_pM$ に対して，M 上の曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ で

$$\gamma(0) = p, \qquad \dot\gamma(0) = X$$

となるものが存在する．さらに，このような曲線 γ に対して

$$Xg = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \circ \gamma(t) \qquad g \in \mathcal{F}(M)$$

が成り立つ．また，可微分写像 $f\colon M \to N$ に対して，

$$(df)_p(X) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(0)$$

である．

■誘導計量　記号を簡単にするために，可微分写像 $f\colon M \to N$ の p における微分 $(df)_p$ のことを $(f_*)_p$ と書く．さらに，p を明示せずに $df = f_*$ と書くこともある．

定義 3.5. 多様体 M から多様体 N への可微分写像 $f\colon M \to N$ が**はめ込み** *immersion* であるとは，M の各点 p で微分 $(df)_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射となることである．

とくに，はめ込み $f\colon M \to N$ が存在するならば，$\dim M \leqq \dim N$ である．

多様体 N 上の 2 次形式 $g \in \Gamma(S(T^*N \otimes T^*N))$ が与えられているとき，可微分写像 $f\colon M \to N$ によって

$$(f^*g)_p(X, Y) := g_{f(p)}(f_*X, f_*Y) \qquad X, Y \in T_pM$$

で与えられる $(f^*g)_p\colon T_pM \times T_pM \to \boldsymbol{R}$ は T_pM 上の 2 次形式を与えている．さらに p を動かせば M 上の 2 次形式

$$f^*g \in \Gamma(S(T^*M \otimes T^*M))$$

を得る．これを 2 次形式 g の写像 f による**引き戻し** *pull-back* という．

補題 3.6. (N, g) をリーマン多様体とする．写像 $f\colon M \to N$ による g の引き戻しが M 上のリーマン計量を与えるための必要十分条件は f がはめ込みとなることである．

証明. f^*g が M 上の 2 次形式であることは容易にわかる（？）から，f^*g が正値であることと f がはめ込みであることの同値性を示せばよい．

まず f をはめ込みとしよう．g が正値であることから，任意の $X \in T_pM$ に対して

$$f^*g(X, X) = g(f_*X, f_*X) \geqq 0, \qquad (\text{等号成立は } f_*X = 0 \text{ のとき})$$

であるが，仮定より f_* は単射であるから，$f_*X = 0$ ならば $X = 0$．したがって f^*g は正値.

逆に f^*g が正値とする．いま $X \in \operatorname{Ker}(f_*)_p \subset T_pM$ をとると，

$$f^*g(X, X) = g(f_*X, f_*X) = g(0, 0) = 0$$

であるから，$f^*g(X, X) = 0$．ここで f^*g は正値だから $X = 0$．したがって $\operatorname{Ker} f_* = \{0\}$ となり，f_* は単射． □

定義 3.7. 多様体 M からリーマン多様体 (N, g) へのはめ込み $f\colon M \to N$ によって得られる M 上のリーマン計量 f^*g を f による**誘導計量**とよぶ.

例 3.8. D を $\boldsymbol{R}^2$ の領域とし，D の座標を (u, v) と表す．このとき，D から $\boldsymbol{R}^3$ への可微分写像 $f\colon D \to \boldsymbol{R}^3$ がはめ込みであるための必要十分条件は

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$$

が D の各点 (u, v) で 1 次独立となることである．

このとき，

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\rangle, \qquad F(u, v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle,$$
$$G(u, v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

とおき，

$$\begin{aligned} g &= E\,du \cdot du + 2F\,du \cdot dv + G\,dv \cdot dv \\ &= E\,du \otimes du + F\,du \otimes dv + F\,dv \otimes du + G\,dv \otimes dv \end{aligned}$$

とおくと，g は $\boldsymbol{R}^3$ の標準計量 $\langle\ ,\ \rangle$ の f による引き戻しである．

この $g = f^*\langle\ ,\ \rangle$ を曲面の**第一基本形式**とよぶことがある．

この講義では，2 次元多様体 M の $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込み $f\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ のことを**曲面** *surface* という．曲面は局所的には例 3.8 のように表される．

注意 3.9. 補題 3.6 は，g が擬リーマン計量の場合は正しくない．

■等長写像・等長変換　リーマン多様体 (M,g) から (N,h) への可微分写像 $f\colon M\to N$ が**等長的** *isometric* であるとは，$g=f^*h$ が成り立つことである．とくに $f\colon M\to N$ が微分同相写像であり，かつ等長的であるとき，f を**等長写像** *isometry* とよび，等長写像が存在するような二つのリーマン多様体を**等長的** *isometric* とよぶ．リーマン幾何学では，等長的なリーマン多様体を区別しない（区別できない）．

リーマン多様体 (M,g) から自分自身への等長的な可微分同相写像 $f\colon M\to M$ を (M,g) の**等長変換**という．(M,g) の等長変換全体の集合は写像の合成に関して群をなす．これを (M,g) の**等長変換群**という．

例 3.10. n 次の直交行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して

$$f_{A,\boldsymbol{b}}\colon \boldsymbol{R}^n\ni\boldsymbol{x}\longmapsto A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$$

とおくと，$f_{A,\boldsymbol{b}}$ は n 次元ユークリッド空間の等長変換である．

また，$(n+1)$ 次直交行列 A をとり，

$$g_A\colon S^n\ni\boldsymbol{x}\longmapsto A\boldsymbol{x}\in S^n$$

とおけば，g_A は球面 S^n の等長変換である．ただし，S^n 上の点は第 2 回の例のように，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルと見なしている．

同様に，$n+1$ 次正方行列 A で

$$^t\!AYA=Y \qquad Y=\begin{pmatrix}-1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}$$

を満たすものとすると，$\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ は第 2 回に挙げた双曲空間の等長変換である．

問題

3-1 補題 3.6 を証明しなさい．

3-2 例 3.8 を確かめなさい．

3-3 ミンコフスキー空間への $\boldsymbol{R}^n$ の領域のはめ込みで，ミンコフスキー計量の引き戻しで得られる 2 次形式が非退化でないようなものを挙げ，注意 3.9 を確かめなさい．

3-4 リーマン多様体 (M,g) から (N,h) への写像 $f\colon M\to N$ が等長的ならば，f ははめ込みであることを示しなさい．

3-5 リーマン多様体の等長変換全体の集合は写像の合成に関して群をなすことを示しなさい．

3-6 例 3.10 を確かめなさい．

3-7 ユークリッド空間の等長変換は例 3.10 に挙げた $f_{A,\boldsymbol{b}}$ に限ることを示しなさい．球面，双曲空間でも同様のことを試みなさい．

4　弧長と体積

リーマン多様体 (M,g) のリーマン計量 g から定まる内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書くことにする．とくに

$$|X| = \sqrt{\langle X, X\rangle} \qquad (X \in TM)$$

を接ベクトル X の大きさという．

さらに，M の局所座標系 $\bigl(U, (x^1, \dots, x^m)\bigr)$ における計量 g の表現を

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

としておく。

なお，本節では擬リーマン計量は考えない．

■曲線の弧長　リーマン多様体 (M,g) の滑らかな曲線

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$$

の**弧長** *arc length* とは

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\, dt \tag{4.1}$$

のことである．ただし，$\dot\gamma = d\gamma/dt$ は γ の速度ベクトルである．とくに局所座標近傍 U 内の曲線を

$$\gamma(t) = \bigl(x^1(t), \dots, x^m(t)\bigr) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

と書けば,

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt$$

である．弧長は曲線のパラメータの取り方によらない．

曲線 γ が正則であるとは，$\dot\gamma(t) \neq 0$ がすべての t に対して成り立つことである．正則な曲線 γ は，適当にパラメータを取り替えることによって $|\dot\gamma| = 1$ とすることができる．このようなパラメータを**弧長パラメータ**という．

■距離

補題 4.1. 連結な多様体 M 上の任意の異なる 2 点 p, q に対して，p と q を結ぶ滑らかな曲線 γ が存在する．

証明： まず，多様体は局所弧状連結な位相空間であるから，連結性から弧状連結性が従う．したがって p，q を結ぶ連続曲線 γ_0 が存在する．この曲線の像はコンパクトであるから，有限個の局所座標近傍で覆うことができる．各々の座標近傍は $\boldsymbol{R}^m$ の円板と可微分同相であるから，この座標系の中で γ_0 を滑らかな曲線に修正すればよい．

2011 年 11 月 1 日 (2011 年 11 月 08 日訂正)

連結な多様体 M の 2 点 p, q に対して

$$\mathcal{C}_{p,q} := \bigl\{p,\, q \text{ を結ぶ } M \text{ 上の滑らかな曲線}\bigr\}$$

とおく．補題 4.1 より $\mathcal{C}_{p,q}$ は空でない．そこで

$$d(p,q) := \inf\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{p,q}\} \tag{4.2}$$

とおく．

命題 4.2. 連結なリーマン多様体 (M,g) に対して (4.2) で定義される $d\colon M \times M \to \boldsymbol{R}$ は M の距離を与える．さらに d が定める位相は M の多様体としての位相と同じものである．

証明： まず $\mathcal{L}(\gamma) \geqq 0$ であるから (4.2) の右辺の "inf" をとるべき集合は下に有界である．したがって $d\colon M \times M \to \boldsymbol{R}$ は well-defined であり，とくに $d(p,q) \geqq 0$ が従う．さらに $d(p,p) = 0$, $d(p,q) = d(q,p)$, $d(p,r) \leqq d(p,q) + d(q,r)$ は容易に示すことができる．

次に「$p \neq q$ ならば $d(p,q) > 0$」を示そう．$p \neq q$ とすると，M がハウスドルフであることから，p の近傍 U と q の近傍 V で共通部分をもたないものが存在する．必要なら U を小さくとって $\bigl(U,(x^1,\dots,x^m)\bigr)$ が局所座標系で,

$$p = (0,\dots,0), \qquad U = \{(x^1,\dots,x^m) \mid (x^1)^2 + \dots (x^m)^2 < r^2\}$$

としてよい．とくに閉包 $\overline{U}$ はコンパクトである．

ここで $S^{m-1} \subset \boldsymbol{R}^m$ を $m-1$ 次元球面（単位ベクトルの全体）に対して

$$F\colon \overline{U} \times S^{m-1} \ni (x^1,\dots,x^m; v^1,\dots,v^m) \longmapsto \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(x^1,\dots,x^m) v^i v^j \in \boldsymbol{R} \tag{4.3}$$

を考えると，F はコンパクト位相空間 $\overline{U} \times S^{m-1}$ 上で定義された連続関数であるから，最大・最小値の定理より $\overline{U}$ で最小値をとる．さらに (g_{ij}) が正定値行列であるから，$F(x^j; v^j) > 0$ が成り立つので，その最小値は正の数となる：

$$F(x^1,\dots,x^m; v^1,\dots,v^m) \geqq c^2 > 0 \qquad \text{on } \overline{U} \times S^{m-1}. \tag{4.4}$$

ここで $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$ が区間 $[a,b]$ で定義されていると，γ の終点は q であるから，区間 $[a,b]$ のどこかで U からはみ出さなければならない．そこで

$$\tau := \inf\{t \mid \gamma(t) \notin U\}$$

とすると，$a < \tau < b$ であり,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\gamma) &= \int_a^b \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt \\
&\geqq \int_a^\tau \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt \\
&= \int_a^\tau \sqrt{\sum g_{ij}(x^1,\dots,x^m)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt \\
&= \int_a^\tau \sqrt{F(x^1,\dots,x^m; v^1,\dots,v^m)}\sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\,dt \\
&\qquad\qquad \left(v^j = \frac{dx^j}{dt}\Bigg/\sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

座標関数 $\varphi\colon U \to \boldsymbol{R}^m$ を省略している．本当は $\varphi(p) = (0,\dots,0)$, $\varphi(U) = \dots$.

$$\geqq c\int_a^\tau \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\,dt$$

を得る．ただし $\bigl(x^1(t),\ldots,x^m(t)\bigr)$ は曲線 $\gamma(t)$ の座標系 U 上での表示である．この最後の式はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ 上で測った曲線 $\gamma|_{[a,\tau]}$ の長さであるから，

$$\mathcal{L}(\gamma) \geqq c|\gamma(\tau)-\gamma(a)|$$

が成り立つ．ただし，右辺の $|\ \cdot\ |$ は $\boldsymbol{R}^m$ のベクトルとしての大きさである．ここで τ の定義から $\gamma(\tau)\in\partial U$ となるが，U が（$\boldsymbol{R}^m$ の開集合として）半径 r の円板であって，$\gamma(a)=p=(0,\ldots,0)$ となることから

$$\mathcal{L}(\gamma) \geqq c|\gamma(\tau)-\gamma(a)| \geqq cr$$

となる．右辺は γ の取り方によらないから，

$$d(p,q) \geqq cr > 0$$

となる．以上より d が距離となることが示された．
最後に，M の多様体としての位相を $\mathcal{O}$，d が定める M の位相を $\mathcal{O}_d$ としたとき $\mathcal{O}=\mathcal{O}_d$ であることを示す．それには点 p の，位相 $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}_d$) に関する任意の近傍 U に対して，$\mathcal{O}_d$ ($\mathcal{O}$) に関する p の近傍 V で $V\subset U$ となるものが存在することを示せばよいが，これは演習問題としておこう．

系 4.3. パラコンパクト多様体は正規位相空間である．

証明： すでに見たように，多様体 M 上にはリーマン計量が存在するから，それによって距離 d が定まる．M の位相は距離 d から定まる位相であるから，正規空間となる．

以後，リーマン多様体にはこのようにして距離が与えられているとする．

■完備性　距離空間 (X,d) が**完備** *complete* であるとは，X の任意のコーシー列が X 内の点に収束することであった．

定義 4.4. 区間 $[a,b)$ で定義された多様体 M 上の曲線 $\gamma(t)$ が**発散する道** *divergent path* であるとは，任意のコンパクト集合 $K\subset M$ に対してある $\tau\in(a,b)$ をとると $\gamma|_{[\tau,b)}$ の像が $M\setminus K$ に含まれるようにできることである．

命題 4.5 (Hopf-Rinow の定理)**.** リーマン多様体 (M,g) が，（g から定義される距離 d に関して）完備であるための必要十分条件は，任意の発散する道 $\gamma\colon[a,b)\to M$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} \langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt=+\infty$$

となることである．

証明は後日与える．

系 4.6. コンパクトなリーマン多様体は完備である．

以後，このフレーズは省略される

■体積と積分　リーマン多様体 (M, g) のコンパクト集合 Ω が座標近傍 $\bigl(U, (x^1, \dots, x^m)\bigr)$ に含まれているとする．このとき，Ω の**体積**とは m 重積分

$$(4.5) \qquad \mathrm{Vol}(\Omega) := \int \cdots \int_\Omega \sqrt{g}\, dx^1 \, \dots \, dx^m \qquad g = \det(g_{ij})$$

のことである．この積分はパラメータの取り方によらない．

さらに，Ω を含む領域で定義された連続関数 f に対して，その積分を

$$(4.6) \qquad \int_\Omega f\, dv_g := \int \cdots \int_\Omega f \sqrt{g}\, dx^1 \, \dots \, dx^m$$

と定義する．この積分要素

$$(4.7) \qquad dv_g = \sqrt{g}\, dx^1 \, \dots \, dx^m$$

を M のリーマン計量 g から誘導される**体積要素** *volume form* という．

領域 Ω が一つの座標系に含まれないときは，Ω を座標近傍による局所有限な被覆で覆って，1 の分割を用いて (4.6) を「つなげれば」よい．

とくに M がコンパクトのとき，

$$\mathrm{Vol}(M, g) := \int_M dv_g$$

を M の**体積**という．習慣にしたがって M の次元が 2 のときは**面積**ともいう．

問題

4-1「曲線の弧長がパラメータの取り方にのよらない」ことを正確に述べ，証明しなさい．また「正則な曲線は弧長パラメータで表すことができる」ことを示しなさい．

4-2 連結かつ局所弧状連結な位相空間は弧状連結であることを示しなさい．

4-3 補題 4.1 の証明を完全にしなさい．

4-4 式 (4.2) で定義された d に対して $d(p,q) \geqq 0$, $d(p,p) = 0$, $d(p,q) = d(q,p)$, $d(p,r) \leqq d(p,q) + d(q,r)$ であることを示しなさい．

4-5 距離 (4.2) によって定まるリーマン多様体の位相が，多様体としての位相と一致することを示しなさい．

4-6 双曲空間は完備であることを，命題 4.5 を用いて証明しなさい．

4-7 (4.5) の積分が局所座標系の取り方によらないことを示しなさい．

4-8 大域的な積分の定義で「領域 Ω が一つの座標系に含まれないときは，Ω を座標近傍による局所有限な被覆で覆って，1 の分割を用いて (4.6) を「つなげれば」よい.」ということを具体的に述べなさい．

4-9 球面 S^2, S^3 の体積を求めなさい．

5　リーマン接続

この節では (M, g) を（擬）リーマン多様体とし，g から定まる内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書く．

■ベクトル場の交換子　多様体 M のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して Xf はまた M 上の関数である．そこで $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

により $[X, Y]\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ を定義すると，これは線型写像で，さらに

$$[X, Y](fg) = f([X, Y]g) + g([X, Y]f) \qquad (f, g \in \mathcal{F}(M))$$

が成り立つことがわかるから，$[X, Y]$ は M 上のベクトル場である．したがって，対応

$$[\ ,\ ]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y) \longmapsto [X, Y] \in \mathfrak{X}(M) \tag{5.1}$$

が得られる．これをベクトル場の**交換子積**または**リー括弧積** *Lie bracket* とよぶ．次のことは容易にわかる：

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= -[Y, X], \\
[aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \\
[X, aY + bZ] &= a[X, Y] + b[X, Z], \\
[X, fY] &= f[X, Y] + (Xf)Y, \\
[fX, Y] &= f[X, Y] - (Yf)X, \\
[X, [Y, Z]] &+ [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.
\end{aligned}$$

ただし $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$, $f \in \mathcal{F}(M)$ である．

M の局所座標系 (x^j) を用いて

$$X = \sum_{j=1}^{m} X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と書くと，

$$[X, Y] = \sum_{j,k=1}^{m} \left(X^k \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

となる．とくに

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] = 0$$

である．

2011 年 11 月 8 日 (2011 年 11 月 15 日訂正)

■内積による接空間と余接空間の同一視　内積を用いると，接空間 T_pM と余接空間 T_p^*M を（座標によらずに）自然に同一視できる．実際，$X \in T_pM$ に対して

$$X^\flat \colon T_pM \ni Y \longmapsto X^\flat(Y) = \langle X, Y\rangle \in \boldsymbol{R}$$

とおくと $X^\flat$ は線型写像であるから $X^\flat \in T_p^*M$ である．このようにして写像

$$\flat \colon T_pM \ni X \longmapsto X^\flat \in T_p^*M$$

が定義されるが，これは線型写像となることが容易にわかる．さらに $\mathrm{Ker}(\flat) = \{0\}$ となり，T_pX と T_p^*X は同じ次元なので，$\flat$ は全単射，すなわち，線型同型写像となっている．そこで $\flat$ の逆写像を

$$\sharp \colon T_p^*M \ni \alpha \longmapsto \alpha^\sharp \in T_pM$$

と書く．この写像 $\sharp$, $\flat$ の定義は局所座標を用いていないので，リーマン多様体上自然に定義される．

局所座標 (x^j) に関する g の成分を g_{ij} とおくと，行列 (g_{ij}) は正則行列なので，逆行列が存在する．それを (g^{ij}) (添字が上) と書く：

$$\sum_{k=1}^m g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

このとき，

$$X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \text{に対して} \qquad X^\flat = \sum_{i,j} g_{ij}X^j dx^i,$$
$$\alpha = \sum_j \alpha_j dx^j \qquad \text{に対して} \qquad \alpha^\sharp = \sum_{i,j} g^{ij}\alpha_i \frac{\partial}{\partial x^j}$$

が成り立つ．

■リーマン接続

定理 5.1. M 上の二つのベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対してベクトル場 $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ を対応させる写像

$$\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

で次を満たすものがただ一つ存在する：

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
- $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

証明： 一意性を示す：結論を満たす ∇ が存在したとする．このとき

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$
$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$
$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

が成り立つ．この第一式と第二式の和から第三式を引くと，

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &+ Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle \\ &= \langle 2\nabla_X Y + \nabla_Y X - \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle \\ &= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle + \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle \end{aligned}$$

となるから，

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle[X,Y],Z\rangle - \langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle \tag{5.2}$$

を得る．とくに，1 次微分形式 $\varphi\in\Gamma(T^*M)$ を

$$\varphi\colon Z\longmapsto\frac{1}{2}\bigl(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle[X,Y],Z\rangle - \langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle\bigr)$$

で定義すると，$\nabla_X Y=\varphi^{\#}$ である．φ は，M の可微分多様体としての構造（交換子積）とリーマン計量 g だけから決まるから，∇ の一意性が従う．さらに $\nabla_X Y=\varphi^{\sharp}$ とおくことで，存在も言えた．

補題 5.2. 定理 5.1 の ∇ は次の性質をもつ：

(1) $\nabla\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ は双線型写像．
(2) 任意の $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ と $f\in\mathcal{F}(M)$ に対して $\nabla_{fX}Y=f\nabla_X Y$．
(3) 任意の $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ と $f\in\mathcal{F}(M)$ に対して $\nabla_X fY=f\nabla_X Y+(Xf)Y$．
(4) ベクトル場 $X_1,X_2\in\mathfrak{X}(M)$ が $X_1(p)=X_2(p)$ を満たしているならば $\nabla_{X_1}Y(p)=\nabla_{X_2}Y(p)$．

証明： 定理 5.1 の証明中の式 (5.2) から (1)–(3) は従う．
これらから (4) を示す：∇ の線型性から $X(p)=0$ ならば $\nabla_X Y(p)=0$ となることを示せば十分．$X=\sum X^j(\partial/\partial x^j)$ とおくと，$X(p)=0$ より $X^j(p)=0$．これと (2) より結論を得る．

定義 5.3. 一般に（リーマンとは限らない）多様体 M に対して，補題 5.2 の (1)–(3) を満たす $\nabla\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を M の（あるいは TM の）**線型接続** *linear connection* あるいは**アファイン接続** *affine connection* という．さらに定理 5.1 の 5.1 を満たすような ∇ を**捩れのない** *torsion free* 線型接続という．

一般に，多様体 M 上の捩れのない線型接続は無数に存在するが，リーマン計量が与えられているときは，その中から定理 5.1 により，標準的な線型接続が一つ指定されている，と考えることができる．

定義 5.4. 定理 5.1 で与えられる M 上の線型接続 ∇ を計量 g から定まる **リーマン接続** *Riemannian connection* あるいは**レビ・チビタ接続** *Levi-Civita connection* とよぶ．

多様体 M の局所座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ に関する，リーマン計量 g の成分が (g_{ij}) と表されているとする:

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle.$$

このとき，(5.2) を用いれば

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^m\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k},\qquad \Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^m g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \tag{5.3}$$

となることがわかる．この Γ_{ij}^k をリーマン接続の**接続係数** あるいは**クリストッフェル記号** *Christoffel's symbol* とよぶ．リーマン接続は捩れのない接続であるから，

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k \tag{5.4}$$

が成り立つ．

一般の線型接続の係数を Γ_{ij}^k，リーマン接続の係数（クリストッフェル記号）を $\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}$ と書く流儀もある．

これを用いれば，局所座標系 (x^j) のもと，

$$\nabla_X Y = \sum X^j \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} Y^i \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{5.5}$$

となることがわかる．

例 5.5. $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な計量 g_0 に関するレビ・チビタ接続 D は

$$D_X Y = dY(X) = \bigl(dY^1(X), \dots, dY^n(X)\bigr)$$

で与えられる．ただし $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル場 Y は $Y = \bigl(Y^1, \dots, Y^n\bigr)$ と成分表示されているものとする．とくに $\boldsymbol{R}^n$ の標準座標に関するクリストッフェル記号は 0 である．

例 5.6. m 次元多様体 M から n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ （$n > m$）へのはめ込み $f\colon M \to \boldsymbol{R}^n$ を考え，$\boldsymbol{R}^n$ の標準計量から f によって誘導される M のリーマン計量を g とする．

各点 $p \in M$ に対して，微分写像

$$(df)_p\colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^n$$

は単射であるから，$(df)_p\bigl(T_pM\bigr)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の線型部分空間である．そこで，その直交補空間を N_p とすると N_p は $\boldsymbol{R}^n$ の $n-m$ 次元部分空間で

$$\boldsymbol{R}^n = T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n = (df)_p\bigl(T_pM\bigr) \oplus N_p \qquad N_p := \bigl((df)_p(T_pM)\bigr)^{\perp} \tag{5.6}$$

と直和分解できる．N_p を p におけるはめ込み f の**法空間** *normal space*，$N = \cup_p N_p$ を**法束** *normal bundle* とよぶ．

ベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\widetilde{Y} = df(Y)$ は対応

$$\widetilde{Y}\colon M \ni p \longmapsto (df)_p(Y) \in T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^n$$

を与えている．このような対応を，**写像 f に沿ったベクトル場**という．

さて，$\widetilde{Y} = (Y^1, \dots, Y^n)$ と成分表示すると，各 Y^j は M 上の関数であるから，

$$D_X\widetilde{Y} = \bigl(dY^1(X), \dots, dY^n(X)\bigr)$$

はまた f に沿った $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル場となるから，とくに各点 $p \in M$ で $D_X\widetilde{Y}(p) \in \boldsymbol{R}^n = T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n$．そこで直和分解 (5.6) にしたがって

$$D_X\widetilde{Y} = A + B \qquad A \in (df)_p(T_pM), \quad B \in N_p$$

と分解すると，$(df)_p$ が単射であることから，

$$D_X\widetilde{Y} = (df)_p(\nabla_X Y(p)) + \alpha_p(X,Y) \qquad \nabla_X Y(p) \in T_pM, \quad \alpha_p(X,Y) \in N_p \tag{5.7}$$

を満たす $\nabla_X Y(p)$ がただ一つ存在する．すると

$$M \ni p \longmapsto \nabla_X Y(p) \in T_pM$$

は滑らかなベクトル場を与えるので，写像

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

が定義された．この ∇ が (M,g) のリーマン接続に他ならない．

問題

5-1 (1) 公式 (5.3) を示しなさい.

(2) 座標系 (x^j) に関するクリストッフェル記号 $\{\Gamma^k_{ij}\}$ と座標系 (y^a) に関するクリストッフェル記号 $\{\widetilde{\Gamma}^c_{ab}\}$ との間には

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{a,b,c} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^b}{\partial x^j} \widetilde{\Gamma}^c_{ab} + \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{\partial x^k}{\partial y^c}$$

なる関係があることを示しなさい.

5-2 正の値をとる関数 $\rho \in \mathcal{F}(M)$ を用いて $\tilde{g} = \rho g$ とすると, $\tilde{g}$ はリーマン計量となる. これをリーマン計量 g と**共形的** *conformal* な計量という. g と $\tilde{g}$ のレビ・チビタ接続をそれぞれ $\nabla, \widetilde{\nabla}$ とすると,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2} \big((X \log \rho) Y + (Y \log \rho) X - g(X, Y)(d \log \rho)^\sharp \big)$$

が成り立つことを示しなさい.

5-3 2 次元リーマン多様体 (M, g) の局所座標 (u^1, u^2) が**等温座標系** *isothermal coordinate system* あるいは**共形座標系**であるとは, この座標に関してリーマン計量 g が

$$g = e^\sigma \big((du^1)^2 + (du^2)^2 \big) \qquad \sigma = \sigma(u^1, u^2) \text{ は滑らかな関数}$$

と表せることである. (2 次元リーマン多様体の場合, 任意の点の近傍で等温座標系をとることができる.) この座標に関するクリストッフェルの記号を求めよ.

5-4 $\boldsymbol{R}^2$ ($\boldsymbol{R}^3$) の極座標 (球面座標, 円筒座標) に関するクリストッフェル記号を求めよ.

5-5 例 5.6 に書いてあることを確かめなさい.

5-6 ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分多様体としての単位球面

$$S^n = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1 \}$$

を考える. ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準内積である. 以下, $T_p\boldsymbol{R}^{n+1}$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同一視する. 包含写像 $\iota \colon S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ ははめ込みであるが, とくに $d\iota \colon T_pS^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ は単射になるので, $T_pS^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ と見なしておく.

(1) $p \in S^n$ に対して,

$$T_pS^n = \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \langle x, p \rangle = 0 \}, \qquad N_p = \boldsymbol{R}p$$

であることを示しなさい. ただし $p \in S^n$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルと見なしている.

(2) S^n のレビ・チビタ接続を ∇ とすると, 任意の $X, Y \in S^n$ に対して

$$\nabla_X Y = dY(X) + \langle X, Y \rangle\, p$$

となることを示しなさい.

(3) S^n の様々な座標系について, クリストッフェル記号を計算しなさい.

6　曲率テンソル

■テンソル場　一般に，k 個の T_pM のテンソル積と l 個の T_p^*M のテンソル積から定まるベクトル束

$$TM^{\otimes k} \otimes T^*M^{\otimes l} = \overbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}^{k\text{ 個}} \otimes \overbrace{T^*M \otimes \dots T^*M}^{l\text{ 個}}$$

の切断を (k,l) **型テンソル場**という．以下の議論は，一般に (k,l) 型テンソル場に対して成り立つが，煩雑さを避けるため，特別なケースを考察する．

$T^*M \otimes T^*M$ の場合　テンソル積の定義から，切断 $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ は双線型写像

$$\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M), \qquad \alpha(X,Y)(p) = \alpha_p(X_p, Y_p) \tag{6.1}$$

を与える．

補題 6.1. 双線型写像 $\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ が $\Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ の要素から (6.1) によって得られたものであるための必要十分条件は

$$\alpha(fX,Y) = \alpha(X,fY) = f\alpha(X,Y)$$

が成り立つことである．

$TM \otimes T^*M$ の場合　切断 $L \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$ を *1* **次変換**という．これは点 $p \in M$ に対して $L_p \in T_pM \otimes T_p^*M$ を与えるが，これは線型写像 $L_p\colon T_pM \to T_pM$ と見なすことができる．そこで，$TM \otimes T^*M$ のことを $\mathrm{Hom}(TM,TM)$ あるいは $\mathrm{End}(TM)$ と書くこともある．すると，

$$L\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \qquad L(X)_p = L_p(X_p) \tag{6.2}$$

が定まる．

補題 6.2. 双線型写像 $\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が $\Gamma(\mathrm{End}(TM))$ の要素から (6.2) によって得られたものであるための必要十分条件は

$$L(fX) = fL(X) \qquad (f \in \mathcal{F}(M))$$

が成り立つことである．

例 6.3. リーマン計量 g は $(0,2)$ 型テンソル場である．そこで g のことを**計量テンソル**と呼ぶこともある．

例 6.4. 二つの線型写像 $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ を

$$(X,Y) \longmapsto [X,Y], \qquad (X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

で定めると，これらは M 上のテンソル場を定めない．

例 6.5. 多様体 M 上の線型接続 ∇ に対して

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

2011 年 11 月 15 日 (2011 年 11 月 22 日訂正)

によって写像 $T\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を定義すると，これは $(1,2)$ 型テンソル場を与える．T を接続 T の**捩率テンソル** *torsion tensor* という．前回述べたようにリーマン接続の捩率テンソルは 0 である．このように $T=0$ となる接続のことを**捩れのない** *torsion free* 接続，あるいは対称接続という．

■交代形式　有限次元線型空間 V の双対空間 V^* の k 個のテンソル積 $W=V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ を考える．$\alpha\in W$ が**交代的**である，とは，任意の $X_1,\dots,X_k\in V$ と k 文字の置換 $\mu\in S_k$ に対して

$$\alpha(X_{\mu(1)},\dots,X_{\mu(k)})=(\operatorname{sign}\mu)\alpha(X_1,\dots,X_k)$$

が成り立つことである．ただし $\operatorname{sign}\mu$ は置換の符号である．交代的な W の要素を k **次交代形式**とよび，その全体を

$$\wedge^k(V^*)=\bigl\{\alpha\in\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{k\text{ 個}}\,|\,\alpha\text{ は交代的}\bigr\}$$

と書く．

■微分形式　ベクトル空間 T_pM 上の k 次交代形式全体の空間 $\wedge^k(T_p^*M)$ から多様体 M 上のベクトル束 $\wedge^k(T^*M)$ をつくることができる．このベクトル束の切断を k 次**微分形式**という．k 次微分形式全体の集合を

$$\Omega^k(M):=\Gamma(\wedge^k(T^*M))$$

と書く．

例 6.6. 今，(M,g) は向きづけられた（向きづけ可能であって，一つ向きが指定された）リーマン多様体とする．向きに同調した座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ をとり，T_pM の基底 $\{\partial/\partial x^j\}$ の双対基底を $\{dx^1,\dots,dx^m\}$ と書いておく．このとき，

$$\omega_g:=\sqrt{g}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,\qquad g=\det[g_{ij}]\qquad g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$$

とおくと，ω_g は向きに同調する座標のとり方によらない．この ω_g を M のリーマン計量 g から定まる**体積形式** *volume form* とよぶ．

例 6.7. 多様体 M 上の捩れのない二つの線型接続 $\nabla,\widetilde{\nabla}$ をとる．このとき

$$A(X,Y):=\widetilde{\nabla}_XY-\nabla_XY$$

により $A\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を定義すると，A は $(1,2)$ 型テンソルで，

$$A(X,Y)=A(Y,X)$$

が成り立つ．したがって A はベクトル束

$$S^2(T^*M)\otimes TM$$

の切断である．ただし $S^2(T^*M)$ は対称な $(0,2)$-テンソル束を表す．このような $S^2(T^*M)\otimes TM$ の切断を TM **に値をとる対称２次形式**とよび，そのようなものの全体を $S^2(M,TM)$ と書くことがある．

命題 6.8. 多様体 M の捩れのない線型接続 ∇ をひとつ固定する．このとき，任意の $A \in \Omega^2(M, TM)$ に対して

$$\nabla^A_X Y := \nabla_X Y + A(X, Y)$$

とおくと，∇^A もまた M 上の捩れのない線型接続である．

とくに，M 上の捩れのない線型接続は，$\Omega^2(M, TM)$ を付随するベクトル空間にもつような（無限次元）アファイン空間となっている．

■ベクトル場の共変微分　多様体 M 上に線型接続 ∇ が与えられているとき，ベクトル場 X, Y に対して $\nabla_X Y$ を Y の X 方向への**共変微分** *covariant derivative* ということがある．前回みたように

補題 6.9. ベクトル場 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ が $X_1(p) = X_2(p)$ を満たしているならば $\nabla_{X_1} Y(p) = \nabla_{X_2} Y(p)$.

したがって，$Y \in \mathfrak{X}(M)$, $v \in T_pM$ に対して, $X_p = v$ となるベクトル場 X を一つとり

$$\nabla_v Y = \nabla_X Y(p) \in T_pM$$

とおくことにより，「Y の p における v 方向の共変微分」を定めることができる．

とくに

$$\nabla Y : T_pM \ni v \longmapsto \nabla_v Y \in T_pM$$

とすれば，∇Y は T_pM の線型変換を与えている．すなわち

$$\nabla Y \in \Omega^1(M, TM)$$

であることがわかる．これを Y の共変微分ということもある．

局所座標 (x^j) に関する接続の係数を Γ^k_{ij} とする：

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

このとき，

$$\nabla_v Y = \sum_{j,k} v^j \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \sum_l \Gamma^k_{jl} Y^l \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad \left(v = \sum v^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

である．

共変微分 ∇Y が恒等的に 0 となるとき，ベクトル場 Y は接続 ∇ に関して**平行** *parallel* であるといわれる．

■テンソル場の共変微分　次に，線型接続 ∇ によるテンソル場の共変微分を定義する．再び記号の煩雑さを避けるため，特別な場合を見ることで，一般の場合を悟ってほしい．

(0,2) 型テンソルの場合　$\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ を $(0, 2)$ 型テンソルとする．このとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_X \alpha \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ を

$$\nabla_X \alpha(Y, Z) := X\bigl(\alpha(Y, Z)\bigr) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

で定義する．すると，補題 6.1 より $\nabla_X \alpha$ はまた $(0, 2)$ 型テンソルである．これを α の ∇ に関する X 方向の共変微分という．とくに $\nabla_{fX} \alpha = f \nabla_X \alpha$ が言えるから，$\nabla \alpha$ は $(0, 3)$ 型テンソルである．これを α の共変微分という．

局所座標 (x^j) に関する α の成分を α_{ij} と書く：

$$\alpha_{ij} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

このとき

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\alpha = \sum\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\alpha_{ij} - \Gamma^l_{kj}\alpha_{il} - \Gamma^l_{ik}\alpha_{lj}\right)dx^i \otimes dx^j$$

となる．このことを

$$\alpha_{ij;k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\alpha_{ij} - \sum_l\left(\Gamma^l_{kj}\alpha_{il} + \Gamma^l_{ik}\alpha_{lj}\right)$$

と書くことがある．

とくに，$\alpha \in \Omega^2(M)$ の場合，すなわち α が交代的であるとき，$\nabla_X\alpha$ もまた交代的になる．一般に k 次微分形式の共変微分は k 次微分形式である．

命題 6.10. リーマン多様体 (M, g) のリーマン接続を ∇ とする．

- リーマン計量は ∇ に関して平行である．
- とくに M が向きづけられているとき，g から誘導される体積要素 ω_g（例 6.6）は ∇ に関して平行である．

(1,1) 型テンソルの場合　$(1,1)$ 型テンソル $L \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ に対して，

$$(\nabla_X L)(Y) := \nabla_X\bigl(L(Y)\bigr) - L(\nabla_X Y)$$

と定めると，$\nabla_X L \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ となる．これにより L の共変微分 ∇L を求めることができる．

■線型接続の曲率テンソル　多様体 M 上に捩れのない線型接続 ∇ が与えられているとき，$\boldsymbol{R}\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ を

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{6.3}$$

と定める．

補題 6.11. 式 (6.3) で与えられる R は M 上の $(1,3)$ 型テンソル場を与える．

証明： 関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して

$$R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)(fZ) = f\bigl(R(X,Y)Z\bigr)$$

が成り立つ．

テンソル場 R を接続 ∇ の**曲率テンソル** *curvature tensor*，あるいは単に**曲率**という．

命題 6.12. 捩れのない線型接続 ∇ の曲率テンソル R は次を満たす：

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$.
(2) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
(ビアンキの第一恒等式 Bianchi's first identity).

(3) $(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0$
(ビアンキの第二恒等式).

証明： (1) は定義から直接わかる．(2) は，定義を直接書き下し，ブラケット積に関するヤコビの恒等式

(6.4) $$[X,[Y,Z]] + [Y,[X,Z]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

を用いればわかる．さらに (3) も定義を直接書き下せば（$T = 0$ を用いて）わかる．

曲率テンソルの成分表示を与えよう．記号の煩雑さを避けるために，局所座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ から誘導される基底ベクトル場 $\partial/\partial x^j$ を ∂_j と書き，接続 ∇ の接続係数を Γ^k_{ij} と書く：

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma^k_{ji}\partial_k \qquad \Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}.$$

曲率テンソルの成分を

(6.5) $$R(\partial_i,\partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^m R^l_{kji}\partial_l$$

と書く と，これは接続係数を用いて

(6.6) $$R^l_{kji} = \Gamma^l_{kj,i} - \Gamma^l_{ki,j} + \sum_m \left(\Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj}\right) \qquad \Gamma^l_{kj,i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{kj}.$$

が成り立つ．

■アファイン座標系　多様体 M 上に捩れのない線型接続 ∇ が与えられているとする．このとき，∇ の接続係数 Γ^k_{ij} がすべて 0 になるような M の座標系を**アファイン座標系** *affine coordinate system* という．

例 6.13. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の標準計量 g_0 に関するリーマン接続を D と書くと，標準座標系 $(x^1,\dots,x^n)$ に対して

$$D_X Y = \sum_{j,l} X^j \frac{\partial Y^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l} \qquad X = \sum X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

となり，とくに $D_{\nabla_j}\nabla_k = 0$ となる．すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ の標準座標系は D に関するアファイン座標系である．一方，たとえば $\boldsymbol{R}^2$ の極座標系はアファイン座標系ではない．

どんな線型接続に対してもアファイン座標系が存在するわけではない．

定理 6.14. 多様体 M 上の捩れのない線型接続 ∇ が与えられているとき，M の各点の近傍で ∇ に関するアファイン座標系が存在するための必要十分条件は，∇ の曲率テンソルが 0 となることである．

曲率テンソルが 0 となるような接続 ∇ を**平坦な接続** *flat connection* という．定理 6.14 を証明するためには次の事実を用いる．：

曲率テンソルの添字の付け方は書物によって様々である．複数の書物を参考にするときは注意されたい．ここでは「∂_k を ∂_j, ∂_i で微分する」という気持でこの順序にした．

「フロベニウスの定理」はいろいろなバージョンがある．たとえばベクトル場の可積分性に関するフロベニウスの定理は多様体の入門書なら必ず記述があるが，ここに挙げる定理はその一つのヴァリエーションである．

補題 6.15 (フロベニウスの定理)**.** $\boldsymbol{R}^n$ の単連結な開集合 D 上で定義された n 次正方行列に値をもつ n 個の滑らかな関数 $A_1, \dots, A_n$ が

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - A_i A_j + A_j A_i = O \qquad (1 \leqq i, j \leqq n) \tag{6.7}$$

を満たしているとする．このとき，任意の点 $p \in D$ と任意の n 次正則行列 P_0 に対して，D 上で定義された n 次正則行列に値をとる滑らかな関数 P で $P(p) = P_0$ かつ

$$\frac{\partial P}{\partial x^j} = P A_j \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{6.8}$$

を満たすものがただ一つ存在する．逆に (6.8) を満たす正則な P が存在するならば，A_i は (6.7) を満たす．

式 (6.7) は，(6.8) の両辺を x_i で微分した式と，その i, j を入れ替えた式をつくり，偏微分の順序交換可能性に注意して得られるものであることに注意しておく．(6.7) を (6.8) の**可積分条件**という．

■リーマン曲率テンソル　以下，(M, g) はリーマン多様体，g によって得られる内積を $\langle\ ,\ \rangle$, ∇ を (M, g) のリーマン接続とする．このとき，∇ の曲率テンソル R を**リーマン曲率テンソル**あるいは，単に曲率テンソルとよぶ．前回見たようにリーマン計量により TM と T^*M は同一視できるから，$(1, 3)$ 型テンソル R は $(0, 4)$ 型テンソルと同一視できる．これも（困ったことに）同じ R で表し，リーマン曲率テンソルという：

$$R(X, Y, Z, T) := \langle R(X, Y)Z, T \rangle\,. \tag{6.9}$$

命題 6.16. リーマン曲率テンソルは次の性質を持つ：

(1) $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$.
(2) $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$.
(3) $(\nabla_X R)(Y, Z, T, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, T, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, T, W) = 0$.
(4) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$.

証明： (1) の第 1 の等式は命題 6.12 の (1), (2) は命題 6.12 の (2), (3) は命題 6.12 の (3) と，計量 g が ∇ に関して平行であることからわかる．また，(1) の第 2 式は，

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, T \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, T \rangle - \left\langle \nabla_{[X,Y]} Z, T \right\rangle$$

に，g の平行性 $\langle \nabla_V W, U \rangle = V \langle W, U \rangle - \langle W, \nabla_V U \rangle$ を使えば得られる．
最後に (4) を示す．(2) から

$$\begin{aligned}
R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0 \\
R(T, X, Y, Z) + R(Y, T, X, Z) + R(X, Y, T, Z) = 0 \\
R(T, Y, Z, X) + R(Y, Z, T, X) + R(Z, T, Y, X) = 0 \\
R(T, Z, X, Y) + R(Z, X, T, Y) + R(X, T, Z, Y) = 0
\end{aligned}$$

を得るが，これらを加えあわせて (1) および (2) を用いれば結論が得られる．

いま（接続 ∇ の曲率テンソルとは限らない） $(0, 4)$ 型テンソル R が命題 6.16 の (1)–(3) の性質を満たしているとき，R は**曲率型テンソル**という．

問題

6-1 補題 6.1 を証明しなさい.

6-2 例 6.7 を確かめなさい.

6-3 命題 6.10 を証明しなさい.

6-4 補題 6.11 の証明を完全にしなさい.

6-5 フロベニウスの定理（とポアンカレの補題）を用いて定理 6.14 を証明しなさい.

ヒント：座標系 (x^j) に関する接続係数 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ と座標系 (y^a) に関する接続係数 $\{\widetilde{\Gamma}_{ab}^c\}$ との間の関係

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{a,b,c} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^b}{\partial x^j} \widetilde{\Gamma}_{ab}^c + \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{\partial x^k}{\partial y^c}$$

を用いる.

7　曲率テンソルと断面曲率

■リーマン曲率テンソル　リーマン多様体 (M, g) の計量 g によって得られる内積を $\langle\ ,\ \rangle$, ∇ を (M, g) のリーマン接続とする．このとき，∇ の曲率テンソル R を**リーマン曲率テンソル**あるいは，単に曲率テンソルとよぶ．第 5 回講義で見たように，リーマン計量により TM と T^*M は同一視できるから，$(1, 3)$ 型テンソル R は $(0, 4)$ 型テンソルと同一視できる．これも（困ったことに）同じ R で表し，リーマン曲率テンソルという：

$$R(X, Y, Z, T) := \langle R(X, Y)Z, T\rangle . \tag{7.1}$$

命題 7.1 (曲率テンソルの対称性)**.** リーマン曲率テンソルは次の性質を持つ：

(1) $R(X, Y, Z, T) =) - R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$.
(2) $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$.
(3) $(\nabla_X R)(Y, Z, T, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, T, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, T, W) = 0$.
(4) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$.

証明： (1) の第 1 の等式は命題 6.12 の (1), (2) は命題 6.12 の (2), (3) は命題 6.12 (3) と，計量 g が ∇ に関して平行であることからわかる．また，(1) の第 2 式は,

$$\langle R(X, Y)Z, T\rangle = \langle\nabla_X\nabla_Y Z, T\rangle - \langle\nabla_Y\nabla_X Z, T\rangle - \left\langle\nabla_{[X,Y]}Z, T\right\rangle$$

に，g の平行性 $\langle\nabla_V W, U\rangle = V\langle W, U\rangle - \langle W, \nabla_V U\rangle$ を使えば得られる．
最後に (4) を示す．(2) から

$$\begin{aligned}
R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) &= 0\\
R(T, X, Y, Z) + R(Y, T, X, Z) + R(X, Y, T, Z) &= 0\\
R(T, Y, Z, X) + R(Y, Z, T, X) + R(Z, T, Y, X) &= 0\\
R(T, Z, X, Y) + R(Z, X, T, Y) + R(X, T, Z, Y) &= 0
\end{aligned}$$

を得るが，これらを加えあわせて (1) および (2) を用いれば結論が得られる．

いま（接続 ∇ の曲率テンソルとは限らない） $(0, 4)$ 型テンソル R が命題 7.1 の (1), (2), (4) の性質を満たしているとき，R は**曲率型テンソル**という．

補題 7.2. 2 つの曲率型テンソル R, Q が

$$R(X, Y, Y, X) = Q(X, Y, Y, X) \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

を満たしているならば $R = Q$ である．

証明： $R(X + Z, Y, Y, X + Z) = Q(X + Z, Y, Y, X + Z)$ を展開すれば，$R(X, Y, Y, Z) = Q(X, Y, Y, Z)$ を得る．以後，パズルと思って頑張ると結論が得られる．

2011 年 11 月 22 日 (2011 年 11 月 29 日訂正)

■断面曲率　リーマン多様体 (M,g) の点 p における接空間 T_pM の 2 次元部分空間 Π_p を一つとる．Π_p の基底 $\{X,Y\}$ に対して

$$K(\Pi_p) := \frac{R(X,Y,Y,X)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} \tag{7.2}$$

とすると，$K(\Pi_p)$ は Π_p の基底のとり方によらない．ただし R はリーマン曲率である．この $K(\Pi_p)$ を (M,g) の p における Π_p に関する**断面曲率** *sectional curvature* という．

一般に $\boldsymbol{R}^n$ の 2 次元部分空間全体の集合 $\mathrm{Gr}_2(\boldsymbol{R}^n)$ には $(2n-3)$ 次元のコンパクト多様体の構造が入る．これを $\boldsymbol{R}^n$ 上のの 2-グラスマン多様体という．多様体の各点で T_pM の 2-グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(T_pM)$ を考えることにより，ファイバーが $\mathrm{Gr}_2(\boldsymbol{R}^n)$ となるようなファイバー束（未定義）を考えることができる．これを $\mathrm{Gr}_2(M)$ と書くことにすれば，断面曲率 K は $\mathrm{Gr}_2(M)$ 上で定義された実数値関数である．

補題 7.2 より，断面曲率を指定することは曲率テンソルを指定することと同値である．

例 7.3. 2 次元リーマン多様体 (M,g) の断面曲率は M 上の関数になる．いま，局所座標系 $(u^1,u^2)=(u,v)$ に関して，計量 g が

$$g = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

で与えられているとき，断面曲率 K は

$$\begin{aligned} K = \frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2)}{4(EG-F^2)^2} &+ \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+ \frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)} \end{aligned}$$

となる．これは，曲面論におけるガウス曲率を第一基本量で表す式（ガウスの驚異の定理，たとえば梅原・山田「曲線と曲面」（裳華房）99 ページ）である．

そこで，2 次元リーマン多様体の断面曲率のことを**ガウス曲率**ということもある．

命題 7.4. リーマン多様体 (M,g) の断面曲率が定数 k ならば，曲率テンソルは

$$R(X,Y,Z,T) = k\bigl(\langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle\bigr)$$

を満たす．

証明： 結論の式の右辺は曲率型テンソルを与えている．さらに，断面曲率が k であることから $Z=Y, T=X$ のときは結論の等式が成り立つ．したがって，補題 7.2 より結論を得る．

断面曲率が一定のリーマン多様体を**定曲率リーマン多様体**とよぶ．

■リッチ曲率とスカラ曲率　リーマン多様体 (M,g) の点 p における接空間 T_pM の 1 次変換

$$\rho\colon T_pM \ni Z \longmapsto \rho(Z) \in T_pM$$

のトレースとは，T_pM の基底 $\{E_i\}$ に対して

$$\operatorname{tr}\rho = \sum_i \rho_i(E_i) \qquad \rho(X) = \sum_i \rho_i(X)E_i$$

で定まるスカラ $\operatorname{tr}\rho$ である．これは基底のとり方によらない．各点ごとにトレースとることにより，$(1,1)$ 型テンソルから関数をつくることができる．このような操作を**縮約** *contraction* という．

リーマン多様体 (M,g) 上のベクトル場 X, Y を固定すれば，$\rho\colon Z \longmapsto R(Z,X)Y$ は $(1,1)$ 型テンソルを与える．このトレースを

$$\operatorname{Ric}(X,Y) := \operatorname{tr}\{Z \longmapsto R(Z,X)Y\} \tag{7.3}$$

と書けば，これは双線型写像 $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathcal{F}(M)$ を与えるが，とくに，$(0,2)$ 型テンソルになる．これを**リッチ・テンソル** *Ricci tensor* という．命題 7.1 より Ric は対称であることがわかる：

$$\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{Ric}(Y,X).$$

とくに Ric は T_pM 上の 2 次形式を与える．T_pM 上の単位ベクトル v に対して

$$\operatorname{Ric}(v) := \operatorname{Ric}(v,v)$$

を v 方向の**リッチ曲率** *Ricci curvature* という．リーマン曲率を (6.5) のように成分表示すれば，

$$R_{ij} = \operatorname{Ric}(\partial_i,\partial_j) = \sum_l R^l_{jil} \tag{7.4}$$

である．

リッチ曲率は $(0,2)$ テンソルであるが，計量を用いて TM と T^*M を同一視すれば $(1,1)$ テンソルと見なすことができる：

$$\operatorname{Ric}^\#\colon X \longmapsto \bigl(\operatorname{Ric}(X,\cdot)\bigr)^\#.$$

このトレース S を**スカラ曲率** *scalar curvature* という．

$$S = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}^\#\,. \tag{7.5}$$

局所的には

$$S = \sum_i \operatorname{Ric}(E_i,E_i) = \sum_{i,j} g^{ij}R_{ij}$$

である．ただし $\{E_i\}$ は T_pM の正規直交基底，(g^{ij}) はリーマン計量の（正規直交基底とは限らない基底に関する）成分 (g_{ij}) の逆行列である．

問題

7-1 命題 7.1 を証明しなさい．

7-2 補題 7.2 を証明しなさい．

7-3 式 (7.2) の右辺は Π_p の基底のとり方によらないことを示しなさい．

7-4 例 7.3 を確かめなさい．とくに等温座標系 $g = e^{2\sigma}(du^2+dv^2)$ のときは

$$K = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv})$$

であることを示しなさい．さらに，

$$g_+ = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}(du^2+dv^2), \qquad g_- = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}(du^2+dv^2)$$

のガウス曲率はそれぞれ 1 と -1 であることを確かめなさい．

7-5 2 次元リーマン多様体のスカラ曲率はガウス曲率の 2 倍であることを示しなさい．

8 定曲率空間

■曲線に沿うベクトル場と共変微分 多様体 M から多様体 N への可微分写像 $f\colon M \to N$ に対して，微分写像 $df\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ をまた f_* と書くことがある．この節では，式が「ごちゃごちゃ」になることを避けるために後者の記号を用いる．

数直線上の区間 I から多様体 M への可微分写像を M の**曲線**という．パラメータ（I の座標）を t と書くとき，曲線 $\gamma\colon I \to M$ に対して

$$\dot\gamma(t) := \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t \in T_{\gamma(t)}M$$

を γ の**速度ベクトル** という．M の局所座標 (x^j) を用いて $\gamma(t) = \bigl(x^j(t)\bigr)$ と書けば，

$$\dot\gamma(t) = \sum_j \frac{dx^j}{dt}(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)} = \sum_j \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

である．

曲線 $\gamma\colon I \to M$ に**沿うベクトル場**とは，可微分写像 $X\colon I \to TM$ で $\pi \circ X = \gamma$ （$\pi\colon TM \to M$ はベクトル束の射影）を満たすものである．局所座標を用いれば，

$$X = \sum_j X^j(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)} \qquad X^j\colon I \overset{C^\infty}{\to} \boldsymbol{R} \tag{8.1}$$

と書ける．とくに，速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ は γ に沿うベクトル場を与えている．

多様体 M 上に（捩れのない）線型接続 ∇ が与えられているとする．座標系 (x^j) に関する接続係数を Γ_{ij}^k とするとき，曲線 $\gamma(t)$ に沿う (8.1) のようなベクトル場 X の $\dot\gamma$ 方向の**共変微分**を

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}X := \sum_j\left(\frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k}\Gamma_{ik}^j\frac{dx^i}{dt}X^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)} \tag{8.2}$$

と定める．

■平行移動 曲線 $\gamma\colon I \to M$ に沿うベクトル場 X が (接続 ∇ に関して) γ に沿って**平行** *parallel* である，とは $\nabla_{d/dt}X = 0$ が恒等的に成り立つことである．

命題 8.1. 多様体 M 上の可微分曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ と，任意の $v \in T_{\gamma(a)}M$ に対して, γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$ で $X(a) = v$ となるものが唯一存在する．

証明： $X = (X^1, \dots, X^m)$ は線型常微分方程式

$$\frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k}\Gamma_{ik}^j\frac{dx^i}{dt}X^k = 0 \qquad (j = 1, \dots, m) \tag{8.3}$$

の初期条件 $X^j(a) = v^j$ (v^j は v の成分) を満たす解である．

2011 年 11 月 29 日

定義 8.2. 多様体 M 上の曲線 $\gamma\colon [a,b]\to M$ の始点を $p=\gamma(a)$, $q=\gamma(b)$ とおくとき，写像

$$P_\gamma\colon T_pM\ni v\longmapsto P_\gamma v = X(b)\in T_qM \qquad (X \text{ は命題 9.1 の結論に現れるベクトル場})$$

を γ **に沿う平行移動**という．

命題 8.3. 平行移動 $P_\gamma\colon T_pM\to T_qM$ は線型同型写像である．

証明： 方程式 (9.1) は線型方程式であるから線型性が従う．さらに γ の逆向きの曲線は P_γ の逆写像を与えるので，同型が言える．

命題 8.4. 曲線 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ に対して $\gamma(0)=p$，$\dot\gamma(0)=v$ とおく．このとき $Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_v Y = \lim_{t\to 0}\frac{P_t^{-1}Y(\gamma(t))-Y(p)}{t}$$

である．ただし P_t は $\gamma|_{[0,t]}$ に関する平行移動である．

■測地線　以下では，リーマン多様体 (M,g) のリーマン接続について考える．

定義 8.5. 曲線 $\gamma\colon I\to M$ が**測地線** *geodesic* である，とは $\nabla_{d/dt}\dot\gamma=0$ が成り立つことである．

M の局所座標系 (x^j) を用いると，$\gamma=(x^j(t))$ が測地線であるための条件は

$$\frac{d^2x^j}{dt^2}+\sum_k\Gamma^j_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0 \qquad (j=1,\dots,m) \tag{8.4}$$

である．これを**測地線の方程式**という．これは，平行移動の方程式と違って非線型なので，解が大域的に存在するとは限らない．解の存在と一意性の定理より

命題 8.6. 任意の点 $p\in M$ と $v\in T_pM$ に対して，$\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$ となる測地線 $\gamma\colon(-a,b)\to M$ がただ一つ存在する．ただし a, b は十分小さい正の数である．

命題 8.7. 測地線 $\gamma(t)$ の速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ の大きさは一定である．

証明： ∇ がリーマン接続であることから

$$\frac{d}{dt}\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 2\left\langle\nabla_{d/dt}\dot\gamma,\dot\gamma\right\rangle = 0$$

である．

とくに「測地線である」ということは曲線のパラメータの取り方に依存するが，$\gamma(t)$ が測地線なら，定数 k に対して $\gamma(kt)$ も測地線である．以下，とくに断らない限り，測地線 γ は弧長によりパラメータづけられているとする：$\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle=1$.

定理 8.8. リーマン多様体 M 上の 2 点 p, q を結ぶ曲線のうち，長さが最小のもの（すなわち長さ $d(p,q)$ の曲線）は測地線である．

証明は後回しにする．定理 8.8 の仮定を満たす測地線 γ を p と q を結ぶ**最短測地線**という．

定理 8.9 (Hopf-Rinow の定理)**.** リーマン多様体 (M,g) に対して，次は同値である：

(1) リーマン計量から定まる距離 d に関して (M, d) は完備である．
(2) M 上の一つの点 p を固定したとき，任意の $v \in T_pM$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ となる測地線 γ の定義域が $\boldsymbol{R}$ 全体まで拡張される．
(3) M 上の**任意の**点 p と任意の $v \in T_pM$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ となる測地線 γ の定義域が $\boldsymbol{R}$ 全体まで拡張される．
(4) M 上の任意の相異なる 2 点 p, q を結ぶ最短測地線が存在する．
(5) M 上の一つの点 p を固定したとき，閉距離球 $\{q \,|\, d(p, q) \leqq r\}$ はコンパクト．
(6) M 上の，任意の発散する道の長さは無限大である．

■空間型 (1) —ユークリッド空間

定義 8.10. 完備なリーマン多様体で，断面曲率が一定であるようなものを**空間型** *space form* という．

例 8.11. ユークリッド空間 $(\boldsymbol{R}^n, g_0)$ のリーマン接続（レビ・チビタ接続）を D とすると，標準座標系に関して $\Gamma_{ij}^k = 0$ となっている．すなわち，標準座標系はアファイン座標系となっているから，D の曲率テンソルは消える．したがって $\boldsymbol{R}^n$ の断面曲率は恒等的に 0 となる．また，測地線が直線となるので，Hopf-Rinow の定理より $\boldsymbol{R}^n$ は完備．

したがって，$\boldsymbol{R}^n$ は単連結かつ平坦な空間型である．

■写像に沿う共変微分　平坦でない空間型を具体的に調べるために，曲線に沿う共変微分を一般化する．

定義 8.12. 多様体 M から N への可微分写像 $f\colon M \to N$ に対して，f に沿うベクトル場とは，可微分写像

$$X\colon M \to TN \qquad (\pi \circ X = f)$$

のことである．

さらに，$p \in M$, $v \in T_pM$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ を満たす M 上の曲線 γ を用いて

$$\nabla_v X = \nabla_{d/dt} X \circ \gamma$$

と定める．右辺は γ の取り方によらない．

補題 8.13. 定義 8.12 の状況で，N の接続 ∇ の捩率が消えているなら，

$$\nabla_X f_* Y - \nabla_Y f_* X = f_*[X, Y]$$

が成り立つ．

■球面　正の定数 r に対して

$$M = S^n(r) := \left\{ \boldsymbol{p} = (p^1, \ldots, p^{n+1}) \;\middle|\; \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} (p^j)^2 = r^2 \right\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$$

とおくと，これはユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分多様体である．$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の計量から誘導される $S^n(r)$ の計量を g とする．

点 $\boldsymbol{p} \in M$ における接空間 $T_{\boldsymbol{p}}M$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内のベクトル $\boldsymbol{p}$ の直交補空間である．すなわち，次の直交直和分解

$$\boldsymbol{R}^{n+1} = T_{\boldsymbol{p}}M \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{p} \tag{8.5}$$

がある．

ベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ は，包含写像 $\iota\colon S^n(r) \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ に沿ったベクトル場である．ユークリッド空間の標準接続を D と書き，ベクトル場 $Y \in T_pM$ に対して，D_YX を (8.5) にしたがって

$$D_YX := \nabla_YX + h(X,Y)\boldsymbol{p} \qquad \nabla_YX \in TM, \quad h(X,Y) \in \boldsymbol{R}$$

と分解する．とくに，$\langle D_YX, \boldsymbol{p}\rangle = h(X,Y)\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle = r^2h(X,Y)$ であるが，左辺は

$$\langle D_YX, \boldsymbol{p}\rangle = Y\langle X, \boldsymbol{p}\rangle - \langle X, D_Y\boldsymbol{p}\rangle = -\langle X, Y\rangle$$

なので，$h(X,Y) = -r^{-2}\langle X, Y\rangle$．すなわち，

$$\nabla_YX := D_YX + \frac{1}{r^2}\langle X, Y\rangle \boldsymbol{p} \tag{8.6}$$

を得る．

補題 8.14. 式 (8.6) で定まる ∇ は誘導計量 g に関するリーマン接続である．

証明： まず $\nabla_XY(\boldsymbol{p}) \in T_{\boldsymbol{p}}M$ であることを示す．式 (8.6) の両辺に $\boldsymbol{p}$ を内積すると $\langle \nabla_XY, \boldsymbol{p}\rangle = 0$ となる．ここで $T_{\boldsymbol{p}}M = \{\boldsymbol{p}\}^{\perp}$ に注意すれば結論がわかる．
さらに，リーマン接続の性質

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X,Y], \qquad X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_XY, Z\rangle + \langle Y, \nabla_XZ\rangle$$

を示せばよい．

このリーマン接続 ∇ の曲率テンソルを計算する．D は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の平坦な接続であることと ∇ がリーマン接続であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= D_X\nabla_YZ + \frac{1}{r^2}\langle X, \nabla_YZ\rangle \boldsymbol{p} \\
&\quad - D_Y\nabla_XZ - \frac{1}{r^2}\langle Y, \nabla_XZ\rangle \boldsymbol{p} - D_{[X,Y]}Z - \frac{1}{r^2}\langle [X,Y], Z\rangle \boldsymbol{p} \\
&= D_XD_YZ + \frac{1}{r^2}D_X\langle Y, Z\rangle \boldsymbol{p} + \frac{1}{r^2}\langle X, \nabla_YZ\rangle \boldsymbol{p} \\
&\quad - D_YD_XZ - \frac{1}{r^2}D_Y\langle X, Z\rangle \boldsymbol{p} - \frac{1}{r^2}\langle Y, \nabla_XZ\rangle \boldsymbol{p} \\
&\qquad\qquad - D_{[X,Y]}Z - \frac{1}{r^2}\langle [X,Y], Z\rangle \boldsymbol{p} \\
&= D_XD_YZ - D_YD_XZ - D_{[X,Y]}Z \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\big(X\langle Y, Z\rangle \boldsymbol{p} + \langle Y, Z\rangle D_X\boldsymbol{p} - Y\langle X, Z\rangle \boldsymbol{p} - \langle X, Z\rangle D_Y\boldsymbol{p} - \langle [X,Y], Z\rangle \boldsymbol{p}\big) \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\big(\langle X, \nabla_YZ\rangle \boldsymbol{p} - \langle Y, \nabla_XZ\rangle \boldsymbol{p}\big) \\
&= \frac{1}{r^2}\big(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\big)
\end{aligned}$$

である．このことから $S^n(r)$ の断面曲率が $1/r^2$ になることがわかる．

さらに，$S^n(r)$ はコンパクトであるから，Hopf-Rinow の定理より完備．したがって $S^n(r)$ は完備単連結な空間型である．

以下，簡単のために $r=1$ とし，$S^n = S^n(1)$ と書く．このリーマン多様体の測地線を求めよう．点 $\boldsymbol{p} \in S^n$ と $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{p}}S^n$ は互いに直交する $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の単位ベクトルである．そこで

$$\gamma(t) := (\cos t)\boldsymbol{p} + (\sin t)\boldsymbol{v}$$

とおけば，$\gamma(t)$ は S^n 上の曲線となっている．実際，

$$\nabla_{d/dt}\dot{\gamma} = D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \gamma = \ddot{\gamma} + \gamma = 0.$$

■双曲空間　球面と同じことを，ミンコフスキー空間の「球面」で行えば，負曲率空間型を構成することができる．

まず，ミンコフスキー空間 L^{n+1} のレビ・チビタ接続は，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ のリーマン接続 D と全く同じものであることに注意する．正の定数 r に対して

$$H^n(r) := \left\{ \boldsymbol{p} \in L^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle = -\frac{1}{r^2}, p^0 > 0 \right\}$$

とおく．ただし $\boldsymbol{p} = (p^0, \ldots, p^n)$ とおき，ミンコフスキー内積は第一座標が負の符号に対応するようとっている．

ここで，L^{n+1} のミンコフスキー内積を TH^n に制限すると，これは $H^n(r)$ のリーマン計量 g を与えている．球面の場合とほぼ同様に

$$\nabla_X Y := D_X Y - \frac{1}{r^2} \langle X, Y \rangle \boldsymbol{p}$$

とおけば，∇ が g のリーマン接続であることがわかる．この曲率テンソルを計算すれば $(H^2(r), g)$ が，負の定曲率 $-1/r^2$ をもつ単連結リーマン多様体であることがわかる．

さらに，$r=1$ のとき，点 $\boldsymbol{p}$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{v}$ をとると，$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ だから

$$\gamma(t) := (\cosh t)\boldsymbol{p} + (\sinh t)\boldsymbol{v}$$

は，$\boldsymbol{p}$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で出発する $H^2(r)$ 上の測地線である．とくに $\gamma(t)$ の定義域は $\boldsymbol{R}$ だから，完備性が言える．

9　測地線と指数写像

この節では，とくに断らない限り，線型接続 ∇ はリーマン多様体 (M,g) のリーマン接続（レビ・チビタ接続）とする．以下，g による内積を $\langle\ ,\ \rangle$，接ベクトルの大きさを $|\cdot|$ と書く．

■平行移動　曲線 $\gamma\colon I\to M$ に沿うベクトル場 X が (接続 ∇ に関して) γ に沿って**平行** *parallel* である，とは $\nabla_{d/dt}X=0$ が恒等的に成り立つことである．

命題 9.1. 多様体 M 上の可微分曲線 $\gamma\colon[a,b]\to M$ と，任意の $v\in T_{\gamma(a)}M$ に対して, γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$ で $X(a)=v$ となるものが唯一存在する．

証明： $X=(X^1,\dots,X^m)$ は線型常微分方程式

$$\frac{dX^j}{dt}+\sum_{i,k}\Gamma^j_{ik}\frac{dx^i}{dt}X^k=0\qquad(j=1,\dots,m)\tag{9.1}$$

の初期条件 $X^j(a)=v^j$ (v^j は v の成分) を満たす解である．

定義 9.2. 多様体 M 上の曲線 $\gamma\colon[a,b]\to M$ の始点を $p=\gamma(a)$, $q=\gamma(b)$ とおくとき，写像

$$P_\gamma\colon T_pM\ni v\longmapsto P_\gamma v=X(b)\in T_qM\qquad(X \text{ は命題 9.1 の結論に現れるベクトル場})$$

を γ **に沿う平行移動**という．

命題 9.3. 平行移動 $P_\gamma\colon T_pM\to T_qM$ は線型同型写像である．

証明： 方程式 (9.1) は線型方程式であるから線型性が従う．さらに γ の逆向きの曲線は P_γ の逆写像を与えるので，同型が言える．

命題 9.4. 曲線 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ に対して $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$ とおく．このとき $Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_vY=\lim_{t\to0}\frac{P_t^{-1}Y(\gamma(t))-Y(p)}{t}$$

である．ただし P_t は $\gamma|_{[0,t]}$ に関する平行移動である．

とくに ∇ がリーマン接続の場合は，次が成り立つ：

命題 9.5. リーマン多様体 M 上の曲線 $\gamma\colon[a,b]\to M$ に関する平行移動は内積をもつ線型空間 $T_{\gamma(a)}M$ と $T_{\gamma(b)}M$ の間の等長変換を与える．

証明： 接ベクトル $X,Y\in T_{\gamma(a)}M$ に対して $X(a)=X$, $Y(a)=Y$ を満たし，γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$, $Y(t)$ をとれば，∇ がリーマン接続であるから，$X(t)$, $Y(t)$ の平行性より

$$\frac{d}{dt}\langle X(t),Y(t)\rangle=\left\langle\nabla_{d/dt}X(t),Y(t)\right\rangle+\left\langle X(t),\nabla_{d/dt}Y(t)\right\rangle=0$$

が成り立つ．したがって $\langle X(t),Y(t)\rangle$ は γ に沿って定数なので，とくに

$$\langle P_\gamma(X),P_\gamma(Y)\rangle=\langle X(b),Y(b)\rangle=\langle X(a),Y(a)\rangle=\langle X,Y\rangle$$

が成り立つ．

2011 年 12 月 6 日 (2011 年 12 月 13 日訂正)

曲線 γ が測地線である，とは $\nabla_{d/dt}\dot\gamma = 0$ が成り立つ，すなわち速度ベクトル $\dot\gamma$ が γ に沿って平行となることであった．したがって，命題 9.5 から次がわかる．

命題 9.6. リーマン多様体上の測地線 γ に対して

(1) $|\dot\gamma|$ は一定である．

(2) γ に沿う平行なベクトル場 $X(t)$ に対して $\langle\dot\gamma, X\rangle$ は一定である．とくにある 1 点で X と $\dot\gamma$ が直交しているならば，至るところで直交している．

■測地線 測地線であるという性質はパラメータのとり方に依存する．とくに測地線のパラメータは弧長パラメータの定数倍でなければならない．さらに，測地線 $\gamma(t)$ に対して $\tilde\gamma(t) = \gamma(kt)$ (k は定数) はまた測地線である．したがって，測地線は，測地線である，という性質を保ったまま弧長パラメータで表すことができる．

命題 9.7. リーマン多様体 (M, g) 上の 2 点を結ぶ最短線が存在するならば，それは（パラメータを取り直せば）測地線となる．

証明： 曲線 $\gamma(t)$ が 2 点 $p, q \in M$ を結ぶ最短線とする．とくに，パラメータを取り替えることで，t は弧長パラメータ $(0 \leqq t \leqq L)$ として一般性を失わない．
曲線 γ の（端を固定した）**変分** *variation* とは，可微分写像

$$F\colon (-\delta,\delta)\times[0,L] \ni (\varepsilon,t) \longmapsto F(\varepsilon,t) = \gamma_\varepsilon(t) \in M,$$
$$F(0,t) = \gamma_0(t) = \gamma(t),$$
$$F(\varepsilon,0) = \gamma_\varepsilon(0) = \gamma(0) = p, \quad F(\varepsilon,L) = \gamma_\varepsilon(L) = \gamma(L) = q$$

を満たすものである．各 ε に対して γ_ε は曲線 γ を端点を固定して変形した曲線と思うことができる．ただし t は γ_ε の弧長パラメータとは限らない．
変分 F に対して

$$V(t) = \left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F(\varepsilon,t)$$

で与えられる γ に沿ったベクトル場を F の変分ベクトル場という．$\gamma_\varepsilon(0)$, $\gamma_\varepsilon(L)$ は ε によらずに一定であるから，$V(0) = V(L) = 0$ であることがわかる．
逆に，$V(0) = V(L)$ を満たす任意の γ に沿うベクトル場 V に対して, それを変分ベクトル場にもつ γ の変分が存在する．実際，もし γ の像が一つの座標系 (x^j) で覆えるときは，$V = \sum V^j(t)\partial_j$ と書いて

$$F(\varepsilon,t) = \bigl(x^1(t)+\varepsilon V^1, \dots, x^m(t)+\varepsilon V^m\bigr) \qquad \gamma(t) = \bigl(x^1(t), \dots x^m(t)\bigr)$$

とおけばよい．一枚の座標系で覆えないときは,（曲線の像の）単位の分割を用いてこのような変分を「つなげる」.
さて，曲線 γ の最短性より，γ_ε の長さは γ より短くない．したがって

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = 0 \qquad \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = \int_0^L |\dot\gamma_\varepsilon(t)|\,dt$$

が，任意の変分 $\{\gamma_\varepsilon\}$ に対して成立する．ただし $\mathcal{L}(\gamma)$ は曲線 γ の長さである．この式の左辺の微分を計算し

よう：

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\int_0^L \langle\dot\gamma_\varepsilon,\dot\gamma_\varepsilon\rangle^{1/2}\,dt \\
&= \int_0^L \left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\langle\dot\gamma_\varepsilon,\dot\gamma_\varepsilon\rangle^{1/2}\,dt \\
&= \int_0^L \frac{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}\langle\dot\gamma_\varepsilon,\dot\gamma_\varepsilon\rangle}{2\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2}}\,dt \\
&= \int_0^L \left.\left\langle\nabla_{\partial/\partial\varepsilon}\dot\gamma_\varepsilon,\dot\gamma_\varepsilon\right\rangle\right|_{\varepsilon=0}\,dt \\
&= \int_0^L \left\langle\nabla_{\partial/\partial t}\left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\gamma_\varepsilon,\dot\gamma\right\rangle\,dt \\
&= \int_0^L \left\langle\nabla_{\partial/\partial t}V(t),\dot\gamma\right\rangle\,dt \\
&= \int_0^L \left[\frac{d}{dt}\langle V(t),\dot\gamma\rangle-\left\langle V(t),\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle\right]\,dt \\
&= \langle V(t),\dot\gamma\rangle\big|_0^L-\int_0^L\left\langle V(t),\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle\,dt \\
&= -\int_0^L\left\langle V(t),\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle\,dt
\end{aligned}
$$

となる．仮定より，この右辺の値がいかなる変分に対しても 0 とならなければならない．そこで $\varphi(0)=\varphi(L)=0$ をみたす正の値をとる実数値関数 $\varphi(t)$ をとり，$V=\varphi\nabla_{d/dt}\dot\gamma$ とおけば，

$$
\int_0^L\left\langle V(t),\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle\,dt=\int_0^L\varphi(t)\left\langle\nabla_{d/dt}\dot\gamma,\nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle\,dt=0
$$

を得る．φ の正値性と計量の正値性から，これが成り立つためには $\nabla_{d/dt}\dot\gamma=0$ でなければならない．

■指数写像　常微分方程式の基本定理より任意の $X\in TM$ を初速度とする測地線が十分短い範囲で存在する．そこで $X\in T_pM$ に対して

(9.2)
$$
\gamma_X=[\gamma_X(0)=p,\,\dot\gamma_X(0)=X \text{ を満たす測地線}]\qquad X\in T_pM
$$

とする．定数 k に対して $\gamma_X(kt)$ もまた測地線であって，その初速度は kX であることから，測地線の一意性を用いれば

(9.3)
$$
\gamma_{kX}(t)=\gamma_X(kt)
$$

を得る．ただし，t は左辺あるいは右辺が存在するようなパラメータの値である．いま

$$
\delta_X:=\sup\bigl\{\delta\in\boldsymbol{R}_+\,|\,\gamma_X \text{ は区間 } [0,\delta) \text{ で定義される}\bigr\}>0,\qquad X\in T_pM
$$

とおく．ここで $\{X\in T_pM\ |X|=1\}$ は球面と同相であるからコンパクトであることに注意すれば，

$$
\delta:=\inf\bigl\{\delta_X\,|\,X\in T_pM,|X|=1\bigr\}
$$

は正の数である．これを用いて，内積が与えられた線型空間 T_pM の原点の近傍

$$
U_{p,\delta}:=\{X\in T_pM\,|\,|X|<\delta\}
$$

をとる．

ベクトル $X\in U_{p,\delta}$ に対して $\gamma_{X/|X|}$ は $[0,\delta)$ で定義されているから，γ_X の定義域は $[0,1)$ を含む．

定義 9.8. これまでの記号の下，

$$\exp_p \colon U_{p,\delta} \ni X \longmapsto \gamma_X(1) \in M$$

を点 p における**指数写像** *exponential map* という．

定義から

$$\gamma_X(t) := \exp_p tX \qquad (X \in T_pM) \tag{9.4}$$

が成り立つ．

例 9.9. 単位球面 $S^n(1)$ 上の点 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{p}}S^n(1)$ に対して

$$\exp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{v} = (\cos kt)\boldsymbol{p} + (\sin kt)\frac{\boldsymbol{v}}{k} \qquad k = |\boldsymbol{v}|$$

である．

接空間 T_pM は内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によってユークリッド空間と同一視される．そこで T_pM の原点 0 における接空間 $T_0(T_pM)$ を T_pM と同一視すれば，$(d\exp_p)_0$ は T_pM から T_pM への線型写像である．

補題 9.10.

$$\bigl(d\exp_p\bigr)_0 = \mathrm{id} = \text{恒等写像}.$$

証明： T_pM の原点を通る曲線 $\nu(t) = tX$ $(X \in T_pM)$ を取ると，$\dot\nu(0) = X$ であるから，

$$\bigl(d\exp_p\bigr)_0(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p\left(\nu(t)\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p tX = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_X(t) = X$$

である．

したがって，逆関数定理より，十分小さな正の数 δ' に対して

$$\exp_p \colon T_pM \supset U_{p,\delta'} \to V_p = \exp_p(U_{p,\delta'}) \subset M$$

は可微分同相写像である．とくに T_pM をユークリッド空間と同一視すれば，p の近傍 V_p から T_pM への写像 $\exp_p^{-1}$ は M の座標系を与える．これを**正規座標系** *normal coordinate system* とよぶ．

■指数写像とヤコビ場

定義 9.11. 測地線 $\gamma(t)$ に沿うベクトル場 $Y(t)$ が γ に沿う **ヤコビ場** *Jacobi field* であるとは，

$$\nabla_{d/dt}\nabla_{d/dt}Y - R(\dot\gamma, Y)\dot\gamma = 0$$

を満たすことである．

補題 9.12. 測地線 $\gamma : [0,\delta) \to M$ を固定する．このとき，任意のベクトル Y_0, $Z_0 \in T_pM$ $(p = \gamma(0))$ に対して γ に沿うヤコビ場 Y で $Y(0) = Y_0$, $\nabla_{d/dt}Y(0) = Z_0$ となるものがただ一つ存在する．

証明： 局所座標系を用いれば，$Y(t)$ がヤコビ場であるための必要十分条件は Y の成分 Y^j に関する 2 階の線型常微分方程式になる．

大きさ 1 の接ベクトルからなる集合

$$S_pM = \{X \in T_pM \mid |X| = 1\}$$

は T_pM 内の球面と見なすことができる．S_pM 内の曲線

$$\xi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \ni u \longmapsto \xi(u) \in S_pM$$

に対して

$$F\colon [0,\delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (t,u) \longmapsto F(t,u) = \exp_p t\xi(u) \in M \tag{9.5}$$

とおく．

補題 9.13. 式 (9.5) に対して，測地線 $\gamma(t) = F(t,0)$ に沿うベクトル場

$$Y(t) := \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=0} F(t,u)$$

は $\dot\gamma$ に直交し $Y(0) = 0$ となるヤコビ場である．

証明： $u = 0$ において

$$\begin{aligned}
\nabla_{d/dt} Y &= \nabla_{\partial/\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial u}\exp_p t\xi(u)\right) \\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial t}\exp_p t\xi(u)\right) \\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\dot\gamma_{\xi(u)}(t) \\
\nabla_{d/dt}\nabla_{d/dt} Y &= \nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial u}\dot\gamma_{\xi(u)}(t) \\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\nabla_{\partial/\partial t}\dot\gamma_{\xi(u)}(t) + R\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u}\right)\dot\gamma_{\xi(u)}(t) \\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\nabla_{\partial/\partial t}\dot\gamma(t) + R\left(\dot\gamma(t), Y(t)\right)\dot\gamma(t) \\
&= R\left(\dot\gamma(t), Y(t)\right)\dot\gamma(t)
\end{aligned}$$

が成り立つ．
ヤコビ場 Y が $\dot\gamma$ に直交することは

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle Y, \dot\gamma\rangle &= \left\langle \nabla_{d/dt}Y, \dot\gamma\right\rangle + \left\langle Y, \nabla_{d/dt}\dot\gamma\right\rangle = \left\langle \nabla_{d/dt}Y, \dot\gamma\right\rangle = \left\langle \nabla_{\partial/\partial u}\dot\gamma_{\xi(u)}, \dot\gamma_{\xi(u)}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \dot\gamma_{\xi(u)}, \dot\gamma_{\xi(u)}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}1 = 0
\end{aligned}$$

であることと $Y(0) = 0$ から得られる．

問題

9-1 命題 9.7 の証明のための式変形を詳細に追いなさい．とくに一つ一つの等号が成り立つ理由を確かめなさい．

9-2 T_pM に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ を取り，

$$T_pM \ni X = x^1\boldsymbol{e_1} + \ldots x^m\boldsymbol{e}_m \leftrightarrow (x^1, \ldots, x^m) \in \boldsymbol{R}^m$$

において T_pM を $\boldsymbol{R}^m$ と同一視すると，$(x^1, \ldots, x^m)$ は p の回りの正規座標系と見なすことができる．この座標系に関するクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k は点 p において 0 となることを示しなさい．

9-3 定義 9.11 のヤコビ場の方程式を，局所座標を用いて表し，それが 2 階の線型常微分方程式であることを確かめなさい．

9-4 補題 9.13 の証明の式変形一つ一つの理由を確かめなさい．

9-5 (問題追加) 双曲平面

$$(D, g) = \left(D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}, g = \frac{4\,dx\,dy}{(1 - x^2 - y^2)^2} \right)$$

の 2 点 $(0, 0)$ と $(0, L)$ $(0 < L < 1)$ を結ぶ最短線は測地線になることを確かめなさい．

9-6 (問題追加) 双極空間 H^n をミンコフスキー空間 $\boldsymbol{R}_1^{n+1}$ の双曲面とみなす．双曲空間上の 2 点を結ぶ最短線は測地線であることを用いて $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H^n \subset \boldsymbol{R}_1^{n+1}$ の距離は $\cosh^{-1}(- \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle)$ となることを示しなさい．

10　測地線と指数写像 (2)

前回はあまり進まなかったので，講義資料は前回の内容の一部を再録します：この節では，とくに断らない限り，線型接続 ∇ はリーマン多様体 (M,g) のリーマン接続（レビ・チビタ接続）とする．以下，g による内積を $\langle\ ,\ \rangle$，接ベクトルの大きさを $|\cdot|$ と書く．

■平行移動　曲線 $\gamma\colon I \to M$ に沿うベクトル場 X が (接続 ∇ に関して) γ に沿って**平行** *parallel* である，とは $\nabla_{d/dt}X = 0$ が恒等的に成り立つことである．

命題 10.1. 多様体 M 上の可微分曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ と，任意の $v \in T_{\gamma(a)}M$ に対して, γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$ で $X(a) = v$ となるものが唯一存在する．

証明： $X = (X^1, \dots, X^m)$ は線型常微分方程式

$$\frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k} \Gamma^j_{ik} \frac{dx^i}{dt} X^k = 0 \qquad (j = 1, \dots, m) \tag{10.1}$$

の初期条件 $X^j(a) = v^j$ (v^j は v の成分) を満たす解である．

定義 10.2. 多様体 M 上の曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ の始点を $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$ とおくとき，写像

$$P_\gamma\colon T_pM \ni v \longmapsto P_\gamma v = X(b) \in T_qM \qquad (X \text{ は命題 10.1 の結論に現れるベクトル場})$$

を **γ に沿う平行移動**という．

命題 10.3. 平行移動 $P_\gamma\colon T_pM \to T_qM$ は線型同型写像である．

証明： 方程式 (10.1) は線型方程式であるから線型性が従う．さらに γ の逆向きの曲線は P_γ の逆写像を与えるので，同型が言える．

命題 10.4. 曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$ とおく．このとき $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_v Y = \lim_{t \to 0} \frac{P_t^{-1} Y(\gamma(t)) - Y(p)}{t}$$

である．ただし P_t は $\gamma|_{[0,t]}$ に関する平行移動である．

とくに ∇ がリーマン接続の場合は，次が成り立つ：

命題 10.5. リーマン多様体 M 上の曲線 $\gamma\colon [a,b] \to M$ に関する平行移動は内積をもつ線型空間 $T_{\gamma(a)}M$ と $T_{\gamma(b)}M$ の間の等長変換を与える．

証明： 接ベクトル $X, Y \in T_{\gamma(a)}M$ に対して $X(a) = X$, $Y(a) = Y$ を満たし，γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$, $Y(t)$ をとれば，∇ がリーマン接続であるから，$X(t)$, $Y(t)$ の平行性より

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \bigl\langle \nabla_{d/dt}X(t), Y(t)\bigr\rangle + \bigl\langle X(t), \nabla_{d/dt}Y(t)\bigr\rangle = 0$$

が成り立つ．したがって $\langle X(t), Y(t)\rangle$ は γ に沿って定数なので，とくに

$$\langle P_\gamma(X), P_\gamma(Y)\rangle = \langle X(b), Y(b)\rangle = \langle X(a), Y(a)\rangle = \langle X, Y\rangle$$

が成り立つ．

2011 年 12 月 13 日

曲線 γ が測地線である，とは $\nabla_{d/dt}\dot\gamma = 0$ が成り立つ，すなわち速度ベクトル $\dot\gamma$ が γ に沿って平行となることであった．したがって，命題 10.5 から次がわかる．

命題 10.6. リーマン多様体上の測地線 γ に対して

(1) $|\dot\gamma|$ は一定である．
(2) γ に沿う平行なベクトル場 $X(t)$ に対して $\langle\dot\gamma, X\rangle$ は一定である．とくにある 1 点で X と $\dot\gamma$ が直交しているならば，至るところで直交している．

■指数写像　常微分方程式の基本定理より任意の $X \in TM$ を初速度とする測地線が十分短い範囲で存在する．そこで $X \in T_pM$ に対して

(10.2)
$$\gamma_X = [\gamma_X(0) = p,\ \dot\gamma_X(0) = X \text{ を満たす測地線}] \qquad X \in T_pM$$

とする．定数 k に対して $\gamma_X(kt)$ もまた測地線であって，その初速度は kX であることから，測地線の一意性を用いれば

(10.3)
$$\gamma_{kX}(t) = \gamma_X(kt)$$

を得る．ただし，t は左辺あるいは右辺が存在するようなパラメータの値である．いま

$$\delta_X := \sup\bigl\{\delta \in \boldsymbol{R}_+ \mid \gamma_X \text{ は区間 } [0,\delta) \text{ で定義される}\bigr\} > 0, \qquad X \in T_pM$$

とおく．ここで $\{X \in T_pM\ |X| = 1\}$ は球面と同相であるからコンパクトであることに注意すれば，

$$\delta := \inf\bigl\{\delta_X \mid X \in T_pM, |X| = 1\bigr\}$$

は正の数である．これを用いて，内積が与えられた線型空間 T_pM の原点の近傍

$$U_{p,\delta} := \{X \in T_pM \mid |X| < \delta\}$$

をとる．

ベクトル $X \in U_{p,\delta}$ に対して $\gamma_{X/|X|}$ は $[0,\delta)$ で定義されているから，γ_X の定義域は $[0,1)$ を含む．

定義 10.7. これまでの記号の下，

$$\exp_p\colon U_{p,\delta} \ni X \longmapsto \gamma_X(1) \in M$$

を点 p における**指数写像** *exponential map* という．

定義から

(10.4)
$$\gamma_X(t) := \exp_p tX \qquad (X \in T_pM)$$

が成り立つ．

例 10.8. 単位球面 $S^n(1)$ 上の点 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{p}}S^n(1)$ に対して

$$\exp_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{v} = (\cos kt)\boldsymbol{p} + (\sin kt)\frac{\boldsymbol{v}}{k} \qquad k = |\boldsymbol{v}|$$

である．

接空間 T_pM は内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によってユークリッド空間と同一視される．そこで T_pM の原点 0 における接空間 $T_0(T_pM)$ を T_pM と同一視すれば，$(d\exp_p)_0$ は T_pM から T_pM への線型写像である．

補題 10.9.

$$\left(d\exp_p\right)_0 = \mathrm{id} = \text{恒等写像}.$$

証明： T_pM の原点を通る曲線 $\nu(t) = tX$ $(X \in T_pM)$ を取ると，$\dot\nu(0) = X$ であるから，

$$\left(d\exp_p\right)_0(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p\left(\nu(t)\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p tX = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_X(t) = X$$

である．

したがって，逆関数定理より，十分小さな正の数 δ' に対して

$$\exp_p \colon T_pM \supset U_{p,\delta'} \to V_p = \exp_p(U_{p,\delta'}) \subset M$$

は可微分同相写像である．とくに T_pM をユークリッド空間と同一視すれば，p の近傍 V_p から T_pM への写像 $\exp_p^{-1}$ は M の座標系を与える．これを**正規座標系** *normal coordinate system* とよぶ．

■指数写像とヤコビ場

定義 10.10. 測地線 $\gamma(t)$ に沿うベクトル場 $Y(t)$ が γ に沿う **ヤコビ場** *Jacobi field* であるとは，

$$\nabla_{d/dt}\nabla_{d/dt}Y - R(\dot\gamma, Y)\dot\gamma = 0$$

を満たすことである．

補題 10.11. 測地線 $\gamma : [0,\delta) \to M$ を固定する．このとき，任意のベクトル $Y_0, Z_0 \in T_pM$ $(p = \gamma(0))$ に対して γ に沿うヤコビ場 Y で $Y(0) = Y_0$, $\nabla_{d/dt}Y(0) = Z_0$ となるものがただ一つ存在する．

証明： 局所座標系を用いれば，$Y(t)$ がヤコビ場であるための必要十分条件は Y の成分 Y^j に関する 2 階の線型常微分方程式になる．

大きさ 1 の接ベクトルからなる集合

$$S_pM = \{X \in T_pM \mid |X| = 1\}$$

は T_pM 内の球面と見なすことができる．S_pM 内の曲線

$$\xi \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \ni u \longmapsto \xi(u) \in S_pM$$

に対して

$$F \colon [0,\delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (t,u) \longmapsto F(t,u) = \exp_p t\xi(u) \in M \tag{10.5}$$

とおく．

補題 10.12. 式 (10.5) に対して，測地線 $\gamma(t) = F(t,0)$ に沿うベクトル場

$$Y(t) := \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{u=0} F(t,u)$$

は $\dot\gamma$ に直交し $Y(0) = 0$ となるヤコビ場である．

証明： $u=0$ において

$$
\begin{aligned}
\nabla_{d/dt}Y &= \nabla_{\partial/\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial u}\exp_p t\xi(u)\right) \\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial t}\exp_p t\xi(u)\right) \\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) \\
\nabla_{d/dt}\nabla_{d/dt}Y &= \nabla_{\partial/\partial t}\nabla_{\partial/\partial u}\dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) \\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\nabla_{\partial/\partial t}\dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) + R\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u}\right)\dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) \\
&= \nabla_{\partial/\partial u}\nabla_{\partial/\partial t}\dot{\gamma}(t) + R\left(\dot{\gamma}(t), Y(t)\right)\dot{\gamma}(t) \\
&= R\left(\dot{\gamma}(t), Y(t)\right)\dot{\gamma}(t)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．
ヤコビ場 Y が $\dot{\gamma}$ に直交することは

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle Y, \dot{\gamma}\rangle &= \left\langle \nabla_{d/dt}Y, \dot{\gamma}\right\rangle + \left\langle Y, \nabla_{d/dt}\dot{\gamma}\right\rangle = \left\langle \nabla_{d/dt}Y, \dot{\gamma}\right\rangle = \left\langle \nabla_{\partial/\partial u}\dot{\gamma}_{\xi(u)}, \dot{\gamma}_{\xi(u)}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \dot{\gamma}_{\xi(u)}, \dot{\gamma}_{\xi(u)}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}1 = 0
\end{aligned}
$$

であることと $Y(0)=0$ から得られる．

問題

10-1 T_pM に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ を取り，

$$
T_pM \ni X = x^1\boldsymbol{e_1} + \ldots x^m\boldsymbol{e}_m \leftrightarrow (x^1, \ldots, x^m) \in \boldsymbol{R}^m
$$

において T_pM を $\boldsymbol{R}^m$ と同一視すると，$(x^1, \ldots, x^m)$ は p の回りの正規座標系と見なすことができる．この座標系に関するクリストッフェル記号 Γ^k_{ij} は点 p において 0 となることを示しなさい．

10-2 定義 10.10 のヤコビ場の方程式を，局所座標を用いて表し，それが 2 階の線型常微分方程式であることを確かめなさい．

10-3 補題 10.12 の証明の式変形一つ一つの理由を確かめなさい．

11 断面曲率の幾何学的意味

とくに断らない限り (M,g) は n 次元リーマン多様体とする．

■指数写像 (復習) 点 $p\in M$ を一つ固定すると，$\boldsymbol{v}\in T_pM$ を一つとるごとに，時刻 $t=0$ で p を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する測地線がただ一つ存在する．それを $\gamma_{p,\boldsymbol{v}}$ と表す：

$$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M,\qquad \gamma_{p,\boldsymbol{v}}(0)=p,\qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(t)=\boldsymbol{v}.$$

ただし $\varepsilon=\varepsilon(p,\boldsymbol{v})$ は正の数である．

補題 11.1. 任意の 0 でない定数 c に対して $\gamma_{p,c\boldsymbol{v}}(t)=\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(ct)$ が成り立つ．

証明： 測地線の方程式の t に関する同次性から，一般に $\gamma(t)$ が測地線なら $\gamma(ct)$ も測地線になる．いま $\gamma_1(t)=\gamma_{p,c\boldsymbol{v}}(t)$, $\gamma_2(t)=\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(ct)$ とすると，$\gamma_j(t)$ $(j=1,2)$ はともに測地線で，$t=0$ で点 p を速度 $c\boldsymbol{v}$ で通過する．したがって，初期値に対する測地線の一意性より結論を得る．

常微分方程式の基本定理の証明における解が存在する範囲に関する議論から次を得る：

補題 11.2. 十分小さい正の数 δ が存在して，$\boldsymbol{v}\in T_pM$ が $|\boldsymbol{v}|<\delta$ を満たすならば，$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}$ の定義域は $[-1,1]$ を含む．

以下，接空間 T_pM の原点の δ-近傍と単位球面を

$$B_0(\delta):=\{\boldsymbol{v}\in T_pM\,|\,|\boldsymbol{v}|<\delta\},\qquad S_pM:=\{\boldsymbol{v}\in T_pM\,|\,|\boldsymbol{v}|=1\}$$

と表す．

定義 11.3. 補題 11.2 の δ に対して

$$\exp_p: T_pM\supset B_0(\delta)\ni\boldsymbol{v}\longmapsto \exp_p(\boldsymbol{v})=\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(1)\in M$$

が定義される．これを p における**指数写像**という．

とくに，補題 11.1 から

$$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(t)=\gamma_{p,t\boldsymbol{v}}(1)=\exp_p(t\boldsymbol{v}) \tag{11.1}$$

が成り立つ．すなわち $\exp_p(t,\boldsymbol{v})$ は $t=0$ で p を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する測地線を与える．

定理 11.4. 十分小さい正の数 ε が存在して，$\exp_p\colon B_0(\varepsilon)\to\exp_p\bigl(B_0(\varepsilon)\bigr)\subset M$ は微分同相写像である．

証明： 微分可能性は，常微分方程式の初期値に関する微分可能性から得られる．さらに，$\boldsymbol{v}\in T_0(T_pM)=T_pM$ に対して，T_pM 上の曲線 $s\boldsymbol{v}$ を考えると，

$$\bigl(d\exp_p\bigr)_0(\boldsymbol{v})=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\exp_p\bigl(s\boldsymbol{v}\bigr)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\gamma_{p,s\boldsymbol{v}}(1)==\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(s)=\boldsymbol{v}.$$

したがって $(d\exp_p)_0=\mathrm{id}$. とくに，これは可逆な線形写像だから，逆関数定理より $\exp_p$ は原点の近傍で微分同相．

2011 年 12 月 20 日 (2011 年 12 月 21 日訂正)

例 11.5. • $(M,g)=(\boldsymbol{R}^n,g_0)$ (ユークリッド空間) とすると，$T_pM=\boldsymbol{R}^n$ であって，

$$\exp_p(t\boldsymbol{v})=p+t\boldsymbol{v}.$$

- $(M,g)=(S^n,g_0)$ を単位球面とし，$S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ とみなすと，$T_pS^n=\{p\}^\perp$ であって，

$$\exp_p(t\boldsymbol{v})=(\cos t)p+(\sin t)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}.$$

- $(M,g)=(H^n,g_0)$ を双曲空間とし，$H^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}_1$ とみなすと，$T_pH^n=\{p\}^\perp$ であって，

$$\exp_p(t\boldsymbol{v})=(\cosh t)p+(\sinh t)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}.$$

- S^3 と 2 次ユニタリ群 SU(2) を

$$\mathrm{SU}(2)=\left\{\begin{pmatrix}p & -\bar{q}\\ q & \bar{p}\end{pmatrix}\,;\,p\bar{p}+q\bar{q}=1\right\}\longleftrightarrow S^3=\{(p,q)\in\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{R}^4\,;\,p\bar{p}+q\bar{q}=1\}$$

と同一視すると，単位行列 $\mathrm{id}\in\mathrm{SU}(2)$ における指数写像 $\exp_{\mathrm{id}}$ は行列指数関数と一致する．

■ヤコビ場 (復習) 曲線 $\gamma\colon[0,L]\to M$ が測地線であるとし，γ の変分

$$F(s,t)\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,L]\longrightarrow M,\qquad \gamma_s(t):=F(s,t),\quad \gamma_0(t)=\gamma(t) \tag{11.2}$$

を考え，その変分ベクトル場を

$$V(t):=\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\gamma_s(t)$$

とおく．

補題 11.6. 変分 (11.2) の各 s に対して γ_s が測地線ならば，その変分ベクトル場 V は

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}}V-R(\dot\gamma,V)\dot\gamma=0 \tag{11.3}$$

を満たす．ただし R は (M,g) の曲率テンソルである．

定理 11.7. 測地線 γ が $\gamma(0)=p$ を満たすとき，任意の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in T_pM$ に対して，γ に沿う (γ の定義域全体で定義される) ヤコビ場 V で

$$V(0)=\boldsymbol{a},\qquad \nabla_{\frac{d}{dt}}V(0)=\boldsymbol{b}$$

となるものが ただ一つ存在する．

> **証明：** ヤコビ場が満たすべき微分方程式 (11.3) は (V の各成分に関する) 2 階の線形同次微分方程式であるから，任意の初期条件 $V(0)$, $\dot V(0)$ に対して，ただ一つの解が存在する．

とくに，γ に沿うヤコビ場全体は $2n$ 次元の線形空間をなす．

注意 11.8. 接空間上の単位球面 S_pM 上の曲線 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(s)$ に対して

$$F(s,t)=\exp_p\bigl(t\boldsymbol{v}(s)\bigr)$$

とおくと，$F(s,*)$ は測地線であるから，

$$V(s,t):=\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)$$

とおけば，各 s に対して $V(s,t)$ は $\gamma_{p,\boldsymbol{v}(s)}$ に沿うヤコビ場を与えている．とくに $F(s,0)=p$ であるから $V(s,0)=0$.

■定曲率空間のヤコビ場　ここでは (M, g) を断面曲率が一定 k であるようなリーマン多様体とする．このとき，曲率テンソル R は

$$R(X,Y)Z = k(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y) \tag{11.4}$$

と書ける．

点 $p \in M$ をひとつ固定し，$\boldsymbol{v} \in T_pM$ を単位ベクトルとする．このとき，点 p を速度 $\boldsymbol{v}$ で出発する測地線 γ は $\gamma(t) = \gamma_{p,\boldsymbol{v}}(t) = \exp_p(t\boldsymbol{v})$ で与えられる．とくに測地線は速さが一定だから

$$\langle \dot\gamma, \dot\gamma\rangle = 1 \tag{11.5}$$

が成り立つ．

いま $\boldsymbol{x} \in T_pM \setminus \{0\}$ を $\boldsymbol{v}$ に直交するように選ぶと，γ に沿う平行ベクトル場 $X(t)$ で $X(0) = \boldsymbol{x}$ となるものが唯一存在する．とくに，X の平行性と γ が測地線であることから

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), \dot\gamma(t)\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} X, \dot\gamma(t)\right\rangle + \left\langle X(t), \nabla_{\frac{d}{dt}}\dot\gamma(t)\right\rangle = 0.$$

したがって，

$$\langle X(t), \dot\gamma(t)\rangle = \langle X(0), \dot\gamma(0)\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\rangle = 0 \tag{11.6}$$

が成り立つ．そこで, t についてなめらかな関数 $\varphi(t)$ を用いて $V(t) := \varphi(t)X(t)$ とおき,

$$J(t) := \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}} V(t) - R(\dot\gamma(t), V(t))\dot\gamma(t)$$

とすると，X の平行性, (11.4), (11.6) と (11.5) から

$$\begin{aligned}
J &= \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}} - k\big(\langle V, \dot\gamma\rangle\big)\dot\gamma - \langle \dot\gamma, \dot\gamma\rangle V\big) = \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}} V + kV \\
&= \nabla_{\frac{d}{dt}}\nabla_{\frac{d}{dt}}\big(\varphi X\big) + k\varphi X \\
&= \nabla_{\frac{d}{dt}}\big(\dot\varphi X + \varphi\nabla_{\frac{d}{dx}} X\big) + k\varphi X = \nabla_{\frac{d}{dt}}\big(\dot\varphi X\big) + k\varphi X \\
&= (\ddot\varphi + k\varphi)X
\end{aligned}$$

を得る．とくに X は 0 にならないから，$V(t) = \varphi(t)X(t)$ がヤコビ場であるための必要十分条件は

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + k\varphi(t) = 0 \tag{11.7}$$

である．

とくに $k = c^2 > 0$, $k = 0$, $k = -c^2 < 0$ のとき，(11.7) の一般解はそれぞれ, A, B を任意定数として

$$A\sin ct + B\cos ct, \qquad At + B, \qquad A\sinh ct + B\cosh ct$$

となる．

命題 11.9. 定曲率 k のリーマン多様体 (M, g) 上の点 p を速度 $\boldsymbol{v} \in S_pM$ で出発する測地線 γ に沿うヤコビ場 V で $V(0) = 0$, $\nabla_{\frac{d}{dt}} V(0) = \boldsymbol{x}$ となるものは

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{c}(\sin ct)X(t) & (k = c^2 > 0 \text{ のとき}) \\ (tX(t)) & (k = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{c}(\sinh ct)X(t) & (k = -c^2 < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．とくに，$|X(t)|$ は t によらない定数だから

$$|V(t)| = \begin{cases} \frac{1}{c}|\sin ct|\,|\boldsymbol{x}| & (k = c^2 > 0 \text{ のとき}) \\ |t|\,|\boldsymbol{x}| & (k = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{c}|\sinh ct|\,|\boldsymbol{x}| & (k = -c^2 < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．

■円周の長さ　一般のリーマン多様体 (M, g) の議論に戻る．単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 \in T_pM$ に対して

$$\boldsymbol{x}(s) = (\cos s)\boldsymbol{e}_1 + (\sin s)\boldsymbol{e}_2$$

は T_pM 内の単位球面 S_pM の大円を与える．指数写像は T_pM の原点の近傍で微分同相を与えるから，十分小さい正の数 t に対して

$$\sigma_t(s) := \exp_p(t\boldsymbol{s}) \qquad (-\pi < s \leqq \pi) \tag{11.8}$$

は多様体 M 上の半径 t の円周を与える．

命題 11.10. 式 (11.8) で与えられる円周の長さ $L(t)$ は

$$L(r) = 2\pi t - \frac{K}{3}\pi t^3 + o(t^3) \qquad (t \to 0)$$

を満たす．ただし K は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ で与えられる T_pM の平面に関する断面曲率である．

証明： 曲線 $\sigma_t(s)$ の速度ベクトルは

$$V(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\exp_p\bigl(t\boldsymbol{x}(s)\bigr) \qquad (\boldsymbol{x}(s) = \cos s\boldsymbol{e}_1 + \sin s\boldsymbol{e}_2)$$

で与えられる．いま，$\boldsymbol{x}(s)$ の速度ベクトルを

$$\boldsymbol{y}(s) = \dot{\boldsymbol{x}}(s) = -\sin s\boldsymbol{e}_1 + \cos s\boldsymbol{e}_2$$

とおいておく．
とくに $\exp_p(0) = p$ であるから $V(s, 0) = 0$ が成り立つので

$$\langle V, V\rangle\,|_{t=0} = 0.$$

また，

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\langle V, V\rangle = 2\left\langle V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V\right\rangle|_{t=0} = 0$$

である．さらに，

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right|_{t=0}\langle V, V\rangle = 2\left.\left\langle V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V\right\rangle\right|_{t=0} + 2\left.\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V\right\rangle\right|_{t=0} = 2\left.\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V\right\rangle\right|_{t=0}$$

である．ここで，リーマン接続の性質 (ねじれをもたない) から

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial s}\exp_p\bigl(t\boldsymbol{x}(s)\bigr) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial t}\exp_p\bigl(t\boldsymbol{x}(s)\bigr) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}(d\exp_p)_{t\boldsymbol{v}(s)}\left(\frac{\partial t\boldsymbol{x}}{\partial t}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}(d\exp_p)_{t\boldsymbol{v}(s)}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

とくに $t=0$ のとき $(d\exp_p)_0 = \mathrm{id}$ だから

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V\Big|_{t=0} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \boldsymbol{x}(s) = \frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{y}(s)$$

したがって,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \langle V, V\rangle = 2$$

となる．さらに，$V(s,t)$ は (t に関して) ヤコビの微分方程式を満たす：

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V - R(\dot\gamma, V)\dot\gamma = 0.$$

これを用いて, $\gamma = \gamma_{p,\boldsymbol{x}(s)}$ とおけば, $V|_{t=0} = 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\langle V, V\rangle\Big|_{t=0} &= 3\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \nabla\right\rangle_{\frac{\partial}{\partial t} V}\Big|_{t=0} \\ &= 3\left\langle R(\dot\gamma, V)\dot\gamma, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V\right\rangle\Big|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

さらに

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\langle V, V\rangle\Big|_{t=0} = 8\left\langle R(\dot\gamma, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V)\dot\gamma, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V\right\rangle\Big|_{t=0} = 8\langle R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = -8R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

ここで $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ がはる T_pM の平面は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ がはる平面と一致し，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は互いに直交する単位ベクトルだから,

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\langle V, V\rangle\Big|_{t=0} = -8K$$

が成り立つ．ただし K は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ がはる平面に関する断面曲率である.
以上から

$$\langle V, V\rangle = t^2 - \frac{1}{3}t^4 K + O(t^4)$$

が成り立つので,

$$|V| = t\sqrt{1 - \frac{1}{3}Kt^2 + O(t^2)} = t\left(1 - \frac{1}{6}Kt^2 + O(t^2)\right).$$

したがって

$$L(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |V|\, ds = 2\pi t - \frac{\pi t^3}{3}K + O(t^3)$$

となり，結論が得られた.

12　第 12 回講義

12.1

問題

12-1

2012 年 1 月 10 日

13 フロベニウスの定理

■フロベニウスの定理　領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ の点 $x_0 \in D$ を固定し，D 上でなめらかな行列値関数

$$U, V\colon D \longrightarrow \mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$$

を用いて，つぎの線形微分方程式を考える

$$\frac{\partial F}{\partial u} = FU, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = FV, \qquad F(x_0) = a \in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}) \tag{13.1}$$

ただし $\mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$ は n 次正方行列全体の集合，$\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ は n 次正則行列全体の集合，F は $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{R})$ に値をとる未知関数とする．

微分形式を用いれば，方程式 (13.1) を座標不変な形で表すことができる：

$$dF = F\alpha \qquad \alpha = U\,du + V\,dv. \tag{13.2}$$

こうしたほうが以下の議論は見通しがよくなるが，微分形式に不慣れな人のため，(13.1) のまま扱うことにしよう．

補題 13.1. 行列値関数 F が領域 D 上で方程式 (13.1) を満たしているとする．（区分的）なめらかな道

$$\gamma\colon [0,1] \ni t \longmapsto \gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr) \in D$$

に対して $F_\gamma(t) := F \circ \gamma(t)$ とおけば，F_γ は常微分方程式

$$\frac{d}{dt} F_\gamma = F_\gamma \left(U \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial t} \right) \tag{13.3}$$

をみたす．

補題 13.2. 行列値関数 F が (13.1) を満たすならば $\det F$ は 0 にならない．さらに

- U, V のトレースが 0 かつ $a \in \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{R})$ ならば $F(x) \in \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{R})$ $(x \in D)$ が常に成り立つ．
- U, V が交代行列，かつ $a \in \mathrm{SO}(n)$ ならば $F(x) \in \mathrm{SO}(n)$ が常に成り立つ．
- U, V が
$$UY + Y^tU = O, \quad VY + Y^tV = O, \qquad Y = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$$
を満たし，かつ $a \in \mathrm{SO}_+(1, n-1)$ ならば $F(x) \in \mathrm{SO}_+(1, n-1)$ が常に成り立つ．

証明. 補題 13.1 のような道 γ で $\gamma(0) = x_0$ となるものをとる．このとき $f(t) = \det F_\gamma(t)$ とおくと

$$\frac{df}{dt} = \operatorname{tr} \widetilde{F}_\gamma \frac{dF_\gamma}{dt} = \operatorname{tr}\left(\widetilde{F}_\gamma \mathcal{F}_\gamma \left(U\dot{u} + V\dot{v}\right)\right) = \det F_\gamma \operatorname{tr}\left(U\dot{u} + V\dot{v}\right) = f(t) \operatorname{tr}\left(U\dot{u} + V\dot{v}\right)$$

なので

$$f(t) = f(0) \exp \int_0^t \operatorname{tr}\left(U\dot{u} + V\dot{v}\right)\, dt$$

2012 年 1 月 17 日

となり，$f(0) = \det F(x_0) = \det a \neq 0$ から $f(t) \neq 0$ を得る．γ の終点は任意にとれるので，最初の主張が示された．さらに $\operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V = 0$ なら $f(t)$ は定数なので，2 番めの主張も成り立つ．

次に U, V が交代行列の場合を考えると

$$\frac{d}{dt}\bigl(F_\gamma {}^t F_\gamma\bigr) = 0$$

であることがわかるが，$t = 0$ で $a^t a = \mathrm{id}$ であるから F_γ が直交行列であることがわかる．とくに $\operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V = 0$ だから $\det F_\gamma = \det a = 1$ となり，第 3 の主張を得る．

第 4 の主張は，$A \in \mathrm{SO}_+(3,1)$ であるための条件が $AY^tA = Y$，$\det A = 1$ かつ $a_{00} > 0$ （$A = (a_{ij})$ であることから上と同様にしてわかる．□

補題 13.3. 方程式 (13.1) が解 F をもつならば

$$U_v - V_u - UV + VU = 0 \tag{13.4}$$

が成り立つ．

証明. 2 つの方程式を微分して

$$F_{uv} = (F_u)_v = F(VU + U_v), \qquad F_{vu} = (F_v)_u = F(UV + V_u)$$

が等しいことと F が正則となることから結論が得られる．□

定理 13.4 (フロベニウスの定理)**.** 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ が**単連結**であるとする．このとき，D 上で定義された滑らかな行列値関数 U, V が (13.4) を満たすならば，方程式 (13.1) を満たす行列値関数 $F\colon D \to \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ がただ一つ存在する．

注意 13.5.

- 方程式 (13.1) の係数行列と未知関数を複素数を成分にもつ行列としても同様の結果が成り立つ．とくに
  - $\operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V = 0$ かつ $a \in \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$ ならば，解 F も $\mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$ に値をとる．
  - U, V が歪エルミート行列かつ $a \in \mathrm{SU}(n, \boldsymbol{C})$ ならば，解 F も $\mathrm{SU}(n)$ に値をとる．ここで，正方行列 A が歪エルミートであるとは $A + A^* = O$ が成り立つことである．
- 独立変数 (u, v) を複素変数 $z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$ として，方程式

  $$F_z = FZ, \qquad F_{\bar{z}} = FW$$

  を考えても同様の結果が得られる．とくに $W = -Z^*$, $\operatorname{tr} Z = 0$ かつ初期値が $\mathrm{SU}(n)$ の元ならば F は $\mathrm{SU}(n)$ に値をつ．
- 方程式

  $$F_u = UF, \qquad F_v = VF$$

  の形についても同様のことが成り立つ．

■フロベニウスの定理の証明　定理??に証明を与えよう．いま，x_0 と $x \in D$ を結ぶなめらかな道

$$\gamma\colon [0,1] \ni t \longmapsto \gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr) \in D \qquad \gamma(0) = x_0, \quad \gamma(1) = x$$

をとり, 常微分方程式 (13.3) を考える．線形常微分方程式の解の存在と一意性の定理から, 初期条件 $F_\gamma(0) = a$ を満たす解 F_γ がただ一つ存在する．

補題 13.6. $F_\gamma(1)$ は γ の終点 x のみに依存する．

証明. 2 点 x_0, x を結ぶ二つの道

$$\gamma_0(t)=\bigl(u_0(t),v_0(t)\bigr),\qquad \gamma_1(t)=\bigl(u_1(t),v_1(t))\bigr)\bigl(\gamma_0(0)=\gamma_1(0)=x_0,\quad \gamma_0(1)=\gamma_1(1)=x\bigr)$$

をとる．領域 D の単連結性より，滑らかな写像

$$\Gamma\colon [0,1]\times[0,1]\ni(s,t)\longmapsto\Gamma(s,t)\in D\quad \text{で}$$
$$\Gamma(0,t)=\gamma_0(t),\quad \Gamma(1,t)=\gamma_1(t),\quad \Gamma(s,0)=x_0,\quad \Gamma(1,0)=x$$

となるものをとることができる．いま $\gamma_s(t)=\gamma(t)$ とおいて，道 γ_s に対して方程式 (13.3) を考え，その解を

$$F(s,t)=F_{\gamma_s}(t)\qquad F(s,0)=a$$

と書く．さらに $\gamma_s(t)=\bigl(u(s,t),v(s,t)\bigr)$ とおいて

$$S=U\,u_s+V\,v_s,\qquad T=U\,u_t+V\,v_t$$

とすると，積分可能条件と $\Gamma(s,0)$ と $\Gamma(s,1)$ が定数であることから

$$S_t-T_s-ST+TS=O,\qquad S(s,0)=S(s,1)=0 \tag{13.5}$$

が成り立つことがわかる．

$F_t=FT$ であることから，

$$\begin{aligned}
F_{st}&=F_sT+FT_s=F_sT+F(S_t-ST+TS)\\
&=F_sT+FS_t-FST+FTS\\
&=F_sT+(FS)_t-F_tS-FST+FTS=F_sT+(FS)_t-FTS-FST+FTS\\
&=F_sT+(FS)_t-FST=(F_s-FS)T+(FS)_t
\end{aligned}$$

となるので，

$$(F_s-FS)_t=(F_s-FS)T$$

が成り立つ．これは F_s-FS を未知関数とする，(13.3) と同じ微分方程式であるから，解の一意性より

$$F_s-FS=bF$$

をみたす b が存在する．ここで $t=0$ を代入すると $F(s,0)=a$ だから $F_s(s,0)=0$, また $S(s,0)=0$ なので $b=0$ でなければならない．したがって

$$F_s=FS$$

が成り立つ．とくに $S(s,1)=O$ であるから $F_s(s,1)=0$．したがって $F(s,1)$ は s によらないので

$$F_{\gamma_2}(1)=F(1,1)=F(0,1)=F_{\gamma_1}(1).$$

□

そこで，

$$F(x)=F_\gamma(1)\qquad\qquad (\gamma\text{ は }x_0\text{ と }x_1\text{ を結ぶ道}) \tag{13.6}$$

と定めると $F\colon D\to \mathrm{M}(n,\boldsymbol{R})$ が得られた．

これが求めるものであることは演習問題としておく．

問題

13-1 13.6 が結論を満たすことを確かめなさい.

13-2 定理 13.4 を高次元化したもののステートメントを書きなさい.

14　正規直交枠

■正規直交枠　次元 n のリーマン多様体 (M, g) 上の各点 p に対して，p の近傍 U と，U 上で定義された M の m 個ベクトル場 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ で，各 $q \in U$ に対して

$$\{\boldsymbol{e}_1(q), \dots, \boldsymbol{e}_n(q)\}$$

が T_qM の正規直交基底を与えるようなものが存在する．

実際，座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^n)$ 上の基底ベクトル場 $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ $(\partial_j = \partial/\partial x^j)$ にグラム・シュミットの直交化を行えばよい．

このようなベクトル場の組 $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ を (M, g) の (局所的な) **正規直交枠**という．

正規直交枠をひとつ固定したとき，U 上の n 個の 1 次微分形式 ω^1, …, ω^n で

(14.1)
$$\omega^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j = \text{クロネッカーのデルタ}$$

となるものをとる．$\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ を正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の**双対枠**ということにする．

■接続形式　リーマン多様体 (M, g) のリーマン接続を ∇ と書く．領域 U 上で定義された正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ が与えられたとき，ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_X \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{n} \omega^k_j(X) \boldsymbol{e}_k$$

とおくと，$\omega^k_j \colon \mathfrak{X}(U) \to \mathcal{F}(U)$ は U 上の 1 次微分形式を与える．実際，リーマン接続の性質から，関数 $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して

$$\nabla_{fX} \boldsymbol{e}_j = f \nabla_X \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{n} \left(f\omega^k_j(X)\right) \boldsymbol{e}_k$$

となるので，$\omega^k_j(fX) = f\omega^k_j(X)$．すなわち ω は U 上の $(0,1)$-テンソルを与えている．

この ω^j_i $(i, j = 1, \dots, n)$ を，リーマン接続 ∇ の，枠 $\{e_j\}$ に関する**接続形式**という．

補題 14.1. リーマン接続の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する接続形式 ω^k_j は

$$\omega^k_j = -\omega^j_k \qquad (j, k = 1, \dots, n) \qquad \text{とくに} \quad \omega^j_j = 0$$

を満たす．

証明： リーマン接続の性質と正規直交基底の性質から

$$\omega^k_j(X) = \langle \nabla_X \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k \rangle = X \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k \rangle - \langle \boldsymbol{e}_j, \nabla_X \boldsymbol{e}_k \rangle = X\delta_{jk} - \omega^j_k(X) = \omega^j_k(X).$$

ただし δ_{jk} はクロネッカーのデルタ記号である．

とくに，接続形式を並べることにより

(14.2)
$$\Omega = (\omega^j_i) : \mathfrak{so}(n) \text{ に値をとる 1 次微分形式}$$

2012 年 1 月 24 日

が得られる．ただし $\mathfrak{so}(n)$ は n 次交代行列全体の集合，すなわち $\mathrm{SO}(n)$ のリー環である．この Ω のことも**接続形式**ということがある．とくに

$$(De_1,\dots,De_n)=\left(\sum_{m=1}^n\omega_1^m e_m,\dots,\sum_{m=1}^n\omega_n^m e_m\right)=(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}\omega_1^1 & \dots & \omega_n^1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_1^n & \dots & \omega_n^n\end{pmatrix}=(e_1,\dots,e_n)\Omega \tag{14.3}$$

が成り立つ．

補題 14.2. リーマン接続の $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する接続形式を ω_j^k，$\{\boldsymbol{e}_j\}$ の双対枠を ω^j とすると，

$$d\omega^j=-\sum_{k=1}^n\omega_k^j\wedge\omega^k=\sum_{k=1}^n\omega^k\wedge\omega_k^j$$

が成り立つ．ただし d は外微分である．

証明： 外微分 $d\omega^j$ は 2 次微分形式であることに注意すれば，外微分の定義から，

$$\begin{aligned}d\omega^j(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l)&=\boldsymbol{e}_k\big(\omega^j(\boldsymbol{e}_l)\big)-\boldsymbol{e}_l\big(\omega^j(\boldsymbol{e}_k)\big)-\omega^j\big([\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l]\big)\\&=\boldsymbol{e}_k\delta_l^j-\boldsymbol{e}_l\delta_k^j-\omega^j\big(\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_l-\nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_k\big)=\omega^j\big(\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_l-\nabla_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_k\big)\\&=-\sum_{m=1}^n\omega^j\big(\omega_l^m(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_m-\omega_k^m(\boldsymbol{e}_l)\boldsymbol{e}_m\big)=-\omega_l^j(\boldsymbol{e}_k)+\omega_k^j(\boldsymbol{e}_l)\\&=-\sum_{m=1}^n\big(\omega_m^j(\boldsymbol{e}_k)\omega^m(\boldsymbol{e}_l)-\omega_m^j(\boldsymbol{e}_l)\omega^m(\boldsymbol{e}_k)\big)=-\sum_{m=1}^n\omega_m^j\wedge\omega^m(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l).\end{aligned}$$

■ゲージ変換　リーマン多様体 (M,g) の領域 U 上で定義された正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ と，U 上の n 個のベクトル場の組 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ に対して，$\{\boldsymbol{a}_j\}$ が正規直交枠であるための必要十分条件は

$$(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)A\qquad\big(A\colon U\to\mathrm{O}(n)\text{ は }C^\infty\text{-級}\big) \tag{14.4}$$

なる写像 A が存在することである．ただし $\mathrm{O}(n)$ は n 次直交行列全体がなすリー群である．とくに式 (14.4) の A が $\mathrm{SO}(n)$ に値をとるとき，$\{\boldsymbol{a}_j\}$ と $\{\boldsymbol{e}_j\}$ は同じ**向き**を定める．

補題 14.3. 正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に関する接続形式 Ω と，(14.4) で与えられる枠 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ に関する接続形式 $\widetilde{\Omega}$ の間には，

$$\widetilde{\Omega}=A^{-1}\Omega A+A^{-1}dA$$

なる関係がある．

証明： 式 (14.3) より

$$\begin{aligned}D(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)&=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)\widetilde{\Omega}\\D(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)&=D\big((\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)A\big)\\&=D\big((\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)\big)A+(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)dA=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)\Omega A+(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)dA\\&=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)A^{-1}\Omega A+(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)A^{-1}dA=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)\big(A^{-1}\Omega A+A^{-1}dA\big)\end{aligned}$$

■曲率形式　リーマン接続の接続形式 $\Omega = (\omega_i^j)$ に対して

$$\Gamma := d\Omega + \Omega \wedge \Omega = \left(d\omega_i^j + \sum_{m=1}^{n} \omega_i^m \wedge \omega_m^j \right) \tag{14.5}$$

で与えられる $\mathfrak{so}(n)$ に値をとる 2 次微分形式を，接続 ∇ の**曲率形式**という．

補題 14.4. 式 (14.5) で与えられた曲率形式 $\Gamma = (\Gamma_j^k)$ は

$$R(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k = \sum_{m=1}^{n} \Gamma_k^m(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_m = \sum_{l=1}^{n} \bigl(d\omega_k^l + \sum_{s=1}^{n} \omega_s^l \wedge \omega_k^s\bigr)(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_l$$

を満たす．

系 14.5. リーマン多様体 (M, g) の断面曲率が一定で，その値が k となるための必要十分条件は

$$d\omega_k^i + \sum_{s=1}^{n} \omega_s^i \wedge \omega_j^s = k\omega^i \wedge \omega^j$$

となることである．ただし (Γ_k^l) は Ω の曲率形式，$\langle\ ,\ \rangle$ は g が与える内積である．

証明： 断面曲率が一定値 k を持つための必要十分条件は

$$R(X, Y)Z = k(\langle Y, Z\rangle Z - \langle X, Z\rangle Y)$$

を満たすことである．

系 14.6. リーマン多様体 (M, g) の各点の近傍 U と U 上の正規直交枠で，対応する接続形式が恒等的に 0 となるものが存在するための必要条件は (M, g) が平坦，すなわち曲率テンソルが恒等的に 0 になることである．

証明： まず正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ とその接続形式 Ω をとり，(14.4) のような正規直交枠 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ の接続形式が

$$\widetilde{\Omega} = A^{-1}dA + A^{-1}\Omega A = 0$$

となるような行列値関数 $\Omega\colon U \to \mathrm{SO}(n)$ を見つければよい．これは $dA + \Omega A = 0$ という A に関する線形微分方程式だが，その適合条件は $\Gamma = 0$ となることである．とくに Ω は $\mathfrak{so}(n)$ に値をとる微分形式だから，単連結領域 U 上では方程式 $dA + \Omega A = 0$ は $\mathrm{SO}(n)$ に値をとるような解 A をもつ．

■平坦なリーマン多様体

定理 14.7. 平坦な n 次元リーマン多様体 (M, g) の単連結領域 U に対して，等長写像 $f\colon U \to \boldsymbol{R}^n$ が存在する．ただし $\boldsymbol{R}^n$ にはユークリッド計量が与えられているものとする．

証明： 簡単のため U 上の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ をとることができるものとしておく．このとき，$F\colon U \to \mathrm{SO}(n)$ で

$$dF = F\Omega$$

となるものが存在する．ただし Ω はリーマン接続の接続形式である．このようにして得られた $F = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ ($\boldsymbol{u}_j$ は U 上の $\boldsymbol{R}^n$ 値関数) に対して，$\boldsymbol{R}^n$ 値 1 次微分形式を

$$\alpha := \boldsymbol{u}_1\omega^1 + \cdots + \boldsymbol{u}_n\omega^n$$

と定める．ただし $\{\omega^j\}$ は $\{vecte_j\}$ の双対枠である．すると α は閉形式となるので $df = \alpha$ をみたす $f\colon U \to \boldsymbol{R}^n$ が存在する．これが求めるものである．

問題

14-1 補題 14.4 の証明を与えなさい (曲率テンソル，接続形式の定義式を書いていけばわかる).

14-2 系 14.6 の証明を完成させなさい.

14-3 定理 14.7 の証明を完成させなさい.

15 定曲率空間

この科目の講義の最初に予告した定理に証明を与える．

定理 15.1. 単連結な n 次元リーマン多様体 (M^n, g) の断面曲率が κ で一定ならば等長写像 $f\colon M^n \to M^n(\kappa)$ が存在する．ただし

$$M^n(k) = \begin{cases} \text{曲率 } \kappa \text{ の } n \text{ 次元球面} & (\kappa > 0) \\ n \text{ 次元ユークリッド空間} & (k = 0) \\ \text{曲率 } \kappa \text{ の } n \text{ 次元双曲空間} & (\kappa < 0) \end{cases}$$

である．

とくに $k = 0$ の場合は前回示した．

■準備　以下，M^n 上に，リーマン計量 g に関する正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を取り，その双対枠 $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ および接続形式 $\Omega = (\omega_i^j)$ を取っておく．前回みたように，次が成り立つ．

$$g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}, \qquad \omega^j(\boldsymbol{e}_k) = \delta_k^j, \qquad \nabla \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^n \omega_j^k \boldsymbol{e}_k, \qquad d\omega^j = \sum_{k=1}^n \omega^k \wedge \omega_k^j. \tag{15.1}$$

すると，前回みたように (M^n, g) の断面曲率が一定の値 κ であるための必要十分条件は

$$d\omega_k^i + \sum_{s=1}^n \omega_s^i \wedge \omega_j^s = \kappa \omega^i \wedge \omega^j \tag{15.2}$$

である．

■正曲率の場合　計量を定数倍することにより，$\kappa = 1$ としてよい．

定曲率 1 の n 次元球面は

$$S^n = M^n(1) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1\} \tag{15.3}$$

に $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のユークリッド計量から誘導される計量を入れたものとみなすことができる．はめ込み

$$f\colon M^n \ni p \longmapsto f(p) \in S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1} \tag{15.4}$$

が，リーマン多様体 (M^n, g) から S^n への等長はめ込みならば，

$$g(X, Y) = (f^* \langle\ ,\ \rangle)(X, Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle \tag{15.5}$$

が成り立っている．いま，M^n の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に対して

$$\boldsymbol{a}_j := df(\boldsymbol{e}_j) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{15.6}$$

とおくと，(15.5) から，各点 $p \in M^n$ に対して

$$\{\boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\}$$

2012 年 1 月 31 日

は $T_{f(p)}S^n$ の正規直交基底を与える．さらに

$$\boldsymbol{a}_0 := f$$

とおくと，$T_{f(p)}S^n = \bigl(\boldsymbol{a}_0(p)\bigr)^\perp$ となることから，

$$F(p) := \bigl(\boldsymbol{a}_0(p), \boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\bigr)$$

は $T_{f(p)}\boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R}^{n+1}$ の正規直交基底を与えている．したがって $F(p)$ は $n+1$ 次の直交行列を与えている．したがって写像 $F\colon M^n \to \mathrm{O}(n+1)$ が得られた．ただし $\mathrm{O}(n+1)$ は $(n+1)$ 次直交行列全体の集合（リー群）である．これを，等長はめ込み f の**適合枠**という．必要なら $\boldsymbol{e}_j$ の順番を取り替えることにより $\det F(p) = 1$ として一般性を失わない：

$$F\colon M^n \ni p \longmapsto F(p) = \bigl(\boldsymbol{a}_0(p), \boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\bigr) \in \mathrm{O}(n+1), \qquad \bigl(\boldsymbol{a}_0 = f\bigr) \tag{15.7}$$

補題 15.2. 式 (15.7) の適合枠は

$$dF = F\widetilde{\Omega}, \qquad \widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^1 & \dots & -\omega^n \\ \omega^1 & & & \\ \vdots & & \Omega & \\ \omega^n & & & \end{pmatrix} \tag{15.8}$$

を満たす．ただし ω^j, $\Omega = (\omega_i^j)$ はそれぞれ $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の双対枠，接続形式 (式 (15.1)) である．

証明： 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準計量であり，これに関するレビ・チビタ接続 D は $DX = dX$ (ベクトル場を $\boldsymbol{R}^{n+1}$-値関数と思ったときの微分) である．ここで，レビ・チビタ接続は，内積，方向微分およびベクトル場のカッコ積で表されることを思い出すと，(15.5), (15.1) から，

$$\langle d\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k\rangle = g(\nabla\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = g\left(\sum_{l=1}^n \omega_j^l \boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_k\right) = \omega_j^k.$$

また，

$$\langle d\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_0\rangle = d\langle\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_0\rangle - \langle\boldsymbol{a}_j, d\boldsymbol{a}_0\rangle = -\langle\boldsymbol{a}_j, df\rangle = -\langle df(\boldsymbol{e}_j), df\rangle = -g(\boldsymbol{e}_j, *) = -\omega^j.$$

したがって

$$d\boldsymbol{a}_j = -\omega^j\boldsymbol{a}_0 + \sum_{l=1}^n \omega_j^k \boldsymbol{a}_k \qquad (j = 1, \dots, n).$$

一方，$df(X)$ は $f = \boldsymbol{a}_0$ に直交するから，

$$d\boldsymbol{a}_0 = df = \langle df, \boldsymbol{a}_1\rangle\boldsymbol{a}_1 + \dots + \langle df, \boldsymbol{a}_n\rangle\boldsymbol{a}_n = \sum_{k=1}^n \omega^k\boldsymbol{a}_k.$$

以上を行列表示すると結論が得られる．

ここで，式 (15.8) の $\widetilde{\Omega}$ は，M^n のリーマン計量 (と正規直交枠) のみから定まることに注意する．

補題 15.3. リーマン計量 g の断面曲率が 1 ならば，(15.8) の $\widetilde{\Omega}$ は

$$d\widetilde{\Omega} + \widetilde{\Omega}\wedge\Omega = 0$$

を満たす．

証明： 式 (15.1) と (**??**) の $\kappa = 1$ の場合を用いて頑張ればよい．

命題 15.4. 単連結リーマン多様体 (M^n, g) の断面曲率が一定で 1, かつ M^n 上の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ が存在する とする．点 $p_0 \in M^n$ をひとつ固定すると，(15.8) と初期条件 $F(p_0) = \mathrm{id}$ を満たす $F\colon M^n \to \mathrm{SO}(n+1)$ がただ一つ存在する．F の第一列を $f\colon M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ とすると，f は (M^n, g) から $S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ への等長はめ込みを与えている．

証明. 補題 15.3 より，微分方程式 (15.8) は適合条件を満たすので，M^n の単連結性から $F(p_0) = \mathrm{id}$ かつ (15.8) を満たす $F\colon M^n \to \mathrm{M}(n+1, \boldsymbol{R})$ ($n+1$ 次の行列に値をとる関数) がただひとつ存在する．とくに Ω は交代行列に値をとるので,

$$d(F^tF) = dF^tF + F^t(dF) = F(\Omega + {}^t\Omega)^tF = 0$$

である．したがって

$$F(p)^t(F(p)) = F(p_0)^t(F(p_0)) = \mathrm{id}$$

がすべての点 $p \in M^n$ で成り立つので $F\colon M^n \to \mathrm{O}(n+1)$ である．とくに，直交行列の行列式は 1 または -1 なので，det の連続性から

$$\det F(p) = \det F(p_0) = \det \mathrm{id} = 1$$

となる．すなわち，ここで得られた F は $\mathrm{SO}(n+1)$ に値をとる．ここで $F = (\boldsymbol{a}_0, \dots, \boldsymbol{a}_n)$，$f = \boldsymbol{a}_0$ とおくと，直交行列の列ベクトルは正規直交系をなすのでとくに $f = |\boldsymbol{a}_0| = 1$. したがって $f\colon M^n \to S^n$ とみなすことができる．ここで

$$df = d\boldsymbol{a}_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega^k \boldsymbol{a}_k \qquad \text{だから} \qquad df(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} \omega^k(\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{a}_k = \delta_j^k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_k.$$

すなわち

$$f^* \langle\ ,\ \rangle (\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = \langle df(\boldsymbol{e}_j), df(\boldsymbol{e}_k)\rangle = \langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k\rangle = \delta_{jk} = g(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$$

なので f は等長写像を与えている． □

■負曲率の場合　計量を定数倍することにより，$\kappa = -1$ としてよい．

定曲率 -1 の n 次元双曲空間は

(15.9) $$H^n = M^n(-11) = \{\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}_1^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = -1, x_0 > 0\}$$

に $\boldsymbol{R}_1^{n+1}$ のミンコフスキー計量 $\langle\ ,\ \rangle$ から誘導される計量を入れたものとみなすことができる．ただし

(15.10) $$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = {}^t\boldsymbol{x}Y\boldsymbol{y} \qquad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられるミンコフスキー計量である．ここで,

$$\mathrm{O}(n,1) := \{A \in \mathrm{M}(n+1)\,;\, {}^tAYA = Y\}$$

この仮定ははずすことができる．

とおくと，$A \in \mathrm{O}(n,1)$ に対して

$$\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^{n+1}_1)$$

が成り立つ．ここで $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,\dots,n} \in \mathrm{O}(n,1)$ とすると，

$$\det A = \pm 1, \qquad a_{00} \neq 0 \tag{15.11}$$

が成り立つ．そこで

$$\mathrm{SO}_+(n,1) := \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n,1) \,|\, a_{00} > 0, \det A = 1\} \tag{15.12}$$

とおく．これはリー群 $\mathrm{O}(n,1)$ の，単位元を含む連結成分である．

はめ込み

$$f\colon M^n \ni p \longmapsto f(p) \in H^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}_1 \tag{15.13}$$

が，リーマン多様体 (M^n, g) から S^n への等長はめ込みであるとする．このとき，M^n の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に対して

$$\boldsymbol{a}_j := df(\boldsymbol{e}_j) \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{15.14}$$

とおくと，

$$\bigl\{\boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\bigr\}$$

は $T_{f(p)}H^n$ の正規直交基底を与える．さらに

$$\boldsymbol{a}_0 := f$$

とおくと，$T_{f(p)}S^n = \bigl(\boldsymbol{a}_0(p)\bigr)^{\perp}$ となる (ミンコフスキー内積における直交補空間) ことから，

$$F(p) := \bigl(\boldsymbol{a}_0(p), \boldsymbol{a}_1(p), \dots, \boldsymbol{a}_n(p)\bigr)$$

は $T_{f(p)}\boldsymbol{R}^{n+1}_1 = \boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の正規直交基底を与えている．とくに

$$\langle \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0\rangle = -1, \qquad \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i\rangle = 1 \quad (i = 1, \dots, n), \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j\rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

が成り立つ．さらに H^n の定義から，$f_0 > 0$ であるから，必要なら $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の順番を入れ替えることで $F\colon M^n \to \mathrm{SO}_+(n,1)$ としてよい．これを，等長はめ込み f の**適合枠**という．

補題 15.5. 等長はめ込み $f\colon M^n \to H^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}_1$ の適合枠は

$$dF = F\widetilde{\Omega}, \qquad \widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \dots & \omega^n \\ \omega^1 & & & \\ \vdots & & \Omega & \\ \omega^n & & & \end{pmatrix} \tag{15.15}$$

を満たす．ただし ω^j, $\Omega = (\omega^j_i)$ はそれぞれ $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の双対枠，接続形式 (式 (15.1)) である．

証明： ほとんど補題 15.5 と同様だが，$\langle \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0 \rangle = -1$ に注意すると

$$\langle d\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_0 \rangle = -\omega^j$$

したがって

$$d\boldsymbol{a}_j = +\omega^j \boldsymbol{a}_0 + \sum_{l=1}^{n} \omega_j^k \boldsymbol{a}_k \qquad (j = 1, \dots, n)$$

が成り立つ.

補題 15.6. リーマン計量 g の断面曲率が 1 ならば，(15.15) の $\widetilde{\Omega}$ は

$$d\widetilde{\Omega} + \widetilde{\Omega} \wedge \Omega = 0$$

を満たす.

したがって，次が得られる.

命題 15.7. 単連結リーマン多様体 (M^n, g) の断面曲率が一定で -1, かつ M^n 上の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ が存在するとする．点 $p_0 \in M^n$ をひとつ固定すると，(15.15) と初期条件 $F(p_0) = \mathrm{id}$ を満たす $F\colon M^n \to \mathrm{SO}_+(n, 1)$ がただ一つ存在する．F の第一列を $f\colon M^n \to \boldsymbol{R}_1^{n+1}$ とすると，f は (M^n, g) から $H^n \subset \boldsymbol{R}_1^{n+1}$ への等長はめ込みを与えている.