2011 年 4 月 12 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一講義資料 1

お知らせ

- 授業日程が当初計画から変更になっています (理学部からの通知抜粋)：

  > 3 月 11 日の大震災とそれに続く原発事故に起因して本年の夏は電力事情が大変厳しくなることが予想されています．本学でも講義室を含めて空調の使用がすでに禁止されていますが，この状況が相当期間継続される見通しです．このため，やむを得ず，理学部各学科開講の専門科目および理学系各専攻の開講科目の平成 23 年度前期の授業日程を下記の通り修正することになりました．理工系基礎科目（1 年次科目）についても同様です．祝日や土曜日に授業が実施されますが，7 月後半以後の厳しい暑さの中で空調なしで授業を実施することによる熱射病の発生等のリスクを回避するために，やむを得ぬ緊急避難的な措置であることをどうかご理解ください．

  なお，事情によりさらに日程が変更される可能性もあります．掲示，web ページなどの情報に注意しておいてください．
- この授業を履修される方は，今回の提出物を必ず提出してください．
- 授業の進め方，成績評価の方法などについては本日配布した講義概要に説明してあります．
- 試験以外の授業への出席は評価の対象にしませんが，授業中の指示は伝わっているものとします．
- 緊急の場合は，受講登録者に電子メイルにて連絡をする場合があります．連絡は教務 web システム上で受講登録された方へ，大学のアドレス (“`m.titech.ac.jp`” で終わるもの) にいたします．必要に応じて転送の設定をしておいてください．

1 集合とその演算

1.1 集合

■集合 数学的対象の「集まり」を**集合** set という[*1].

■数の集合 次のものは集合である[*2]：

自然数全体の集まり $\boldsymbol{N}$・整数全体の集まり $\boldsymbol{Z}$・有理数全体の集まり $\boldsymbol{Q}$・実数全体の集まり $\boldsymbol{R}$.

■要素 集合を構成しているひとつひとつの対象をその集合の**要素・元** element, member，あるいは状況によっては**点** point とよぶことがある．集合 A に対して「x が A の要素である」「x が A の要素でない」ということをそれぞれ "$x \in A$", "$x \notin A$" と書く．たとえば $2 \in \boldsymbol{N}$, $0 \notin \boldsymbol{N}$,[*3] $\pi \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{N} \notin \boldsymbol{R}$ である.

■集合の記述 具体的に集合を記述するには，例えば

$$\{x \,|\, x \text{ は自然数かつ } x \text{ は } 2 \text{ で割り切れる }\} \tag{1.1}$$

などのように { 要素を代表する文字 | それが満たすべき条件 } と表すことが多い．とくに "x が自然数" であることが自然な前提であるときは (1.1) を

$$\{x \in \boldsymbol{N} \,|\, x \text{ は } 2 \text{ で割り切れる }\}$$

と表すこともある．文字 x に関する条件 $P(x)$ を用いて

$$A = \{x \,|\, P(x)\} \qquad \text{とするとき} \qquad \text{“}x \in A\text{” であることは “}P(x)\text{ が成り立つ” ことと同値}$$

である.

1.2 包含関係

■部分集合 集合 B のすべての要素が集合 A の要素であるとき B は A の**部分集合** subset であるといい "$B \subset A$" と表す[*4]．すなわち[*5]

$$\text{“}B \subset A\text{”} \qquad \equiv \qquad \text{“}x \in B \;\Rightarrow\; x \in A\text{”}.$$

とくに $B = \{x \,|\, P(x)\}$, $A = \{x \,|\, Q(x)\}$ と表されているとき，"$B \subset A$" であることは "任意の x に対して $P(x)$ が成り立つならば $Q(x)$ が成り立つ" こと[*6]と同値である.

2011 年 4 月 12 日

[*1] もちろんこのような曖昧な言明は集合の定義を与えていない．集合を公理によって与える議論 (20 世紀初頭にはじまった公理的集合論) は "素朴集合論" に現れるパラドクスを解消するが，講義の範囲を超えるのでここでは扱わない.

[*2] 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ を構成することができるが（時間があれば解説する）とりあえずこういう集合の存在を認めておこう．実数の構成は解析概論第一の授業で扱う（はず).

[*3] 0 を自然数とする流儀もある.

[*4] 高等学校の多くの教科書では，このことを「$B \subsetneqq A$」と表しているようである.

[*5] "$\equiv$" は「同値である」と読む.

[*6] "$\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$" などと書く.

■空集合　要素をひとつも持たない集合を**空集合** empty set といい $\emptyset$ と書く．空集合は任意の集合の部分集合である．

■集合の相等　二つの集合 A, B が $A \subset B$ かつ $B \subset A$ を満たしているならば $x \in A$ であることと $x \in B$ であることは同値である．すなわち二つの集合は一致する：

$$\text{“}A = B\text{”} \qquad \equiv \qquad \text{“}A \subset B \text{ かつ } B \subset A\text{”}.$$

■真部分集合　さらに $B \subset A$ であって $A = B$ でないとき，B は A の**真部分集合** proper subset といって “$B \subsetneq A$” または “$B \subsetneqq A$” と書く．

1.3　合併集合・共通部分・補集合

■合併集合・共通部分　二つの集合 A, B に対して

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \,|\, x \in A \text{ または } x \in B\} = \{x \,|\, (x \in A) \vee (x \in B)\}, \\ A \cap B &= \{x \,|\, x \in A \text{ かつ } x \in B\} = \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\} \end{aligned}$$

をそれぞれ A, B の**合併集合** union, **共通部分** intersecion という[*7]．

■　集合 A, B に対して次が成り立つ：

$$\begin{array}{llll} A \cup B = B \cup A & A \subset A \cup B & A \cap B = B \cap A & A \cap B \subset A \\ A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup A = A & A \cap A = A \end{array} \tag{1.2}$$

が成り立つ．さらに，集合 A, B, C に対して結合法則および分配法則

$$\begin{array}{ll} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \tag{1.3}$$

が成り立つ．

■補集合　ある集合 X の部分集合のみを考えるような文脈では X のことを普遍集合あるいは全体集合などということにする．X の部分集合 A に対して

$$X \setminus A = A^c = \{x \in X \,|\, x \notin A\} = \{x \in X \,|\, \neg(x \in A)\}$$

を A の (X における) **補集合** complement という[*8]．とくに

$$(A^c)^c = A, \qquad A^c \cup A = X, \qquad A^c \cap A = \emptyset, \qquad X^c = \emptyset \tag{1.4}$$

が成り立つ．

[*7] “P かつ Q” (P and Q) のことを “$P \wedge Q$”, “P または Q” (P or Q) のことを “$P \vee Q$” と書く．

[*8] “$X \setminus A$” のことを “$X - A$” と書くこともある．また “P でない” ことを “$\neg P$” と書く．

■ド・モルガンの法則　全体集合 X の部分集合 A, B に対して次が成り立つ (ド・モルガン de Morgan の法則)

(1.5) $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

証明には次を用いる[*9]

補題 1.1. 条件 P, Q に対して

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q), \qquad \neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

が成り立つ.

1.4 冪集合

■冪集合　集合 A の部分集合全体の集まりを A の**冪集合** power set とよび $\mathfrak{P}(A)$ または 2^A と書く.

問題

1-1
- 集合 A, B がともに X の部分集合ならば, $A \cup B$ は X の部分集合である.
- 集合 Y が集合 A, B 両方の部分集合ならば, Y は $A \cap B$ の部分集合である.

1-2 ド・モルガンの法則 (1.5) を証明しなさい.

1-3 集合 $A = \{1, 2, 3\}$　の冪集合 $\mathfrak{P}(A)$　の要素をすべてあげなさい.

1-4 一般に n 個の要素をもつ集合 A の冪集合 $\mathfrak{P}(A)$ の要素の個数は 2^n である.

1-5 $\boldsymbol{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \boldsymbol{R}\}$ とし,

$$X = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid xy = 0\}, \qquad O = \{(0, 0)\}$$
$$A = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x = 0\}, \qquad B = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y = 0\}$$

とするとき, A, B で X, O を表しなさい.

1-6 ベクトル空間 (線形空間) V の部分空間 X, Y に対して

$$X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}$$

を X と Y の (線形空間としての) **和**という.
- $X \subset X + Y$ であることを示しなさい.
- $X \cup Y \subset X + Y$ であることを示しなさい.
- $X \cup Y = X + Y$ となるための必要十分条件は何か.

[*9] これもド・モルガンの法則と呼ばれる.