2011 年 4 月 19 日 2011 年 4 月 19 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一講義資料 2

お知らせ

- 今回の質問用紙の提出は 47 件，うち 2010 年度入学の数学科学生は 18 名．今年度学科所属者は 30 名と記憶しておりますが，少なすぎますね．初回講義参加者は 80 名程度でしたが，講義資料はどれくらい印刷すればよいか迷うところです．とりあえず 60 部印刷しました．
- 講義資料は，授業 web ページおよび東工大 OCW からダウンロードできます．

前回の補足

■集合の差について　集合の "差" について：普遍集合を X，$A \subset X$ としたとき，$A^c = X \setminus A$ を X と A の差とよびました．さらにこれを一般化して，$A, B \subset X$ に対して

$$A \setminus B = A \cap B^c = \{x \in X \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

を A と B の差とよびます．前回の演習で扱った集合の差は，この意味です．

■論理式とド・モルガンの法則

- "条件 P" とは，真 (T: True) か偽 (F: False) のいずれかの値 (真理値) をもつ変数のことである．
- "論理式" とは条件たちを "$\wedge$" (and), "$\vee$" (or), "$\neg$" (not) でつないだもので，その値は次の表のように定める (例えば P が T, Q が F なら $P \vee Q$ は T)

(∗)

P	Q	$P \vee Q$ P or Q	$P \wedge Q$ P and Q	$\neg P$ not P
T	T	T	T	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

- 条件がどのような真理値をとっても，つねに値が T になるような式を**恒真式**という．たとえば $P \vee (\neg P)$ は恒真式である．
- $P \Rightarrow Q$ とは $(\neg P) \vee Q$ のことと定め，これを "P ならば Q" と読む．さらに "$P \Leftrightarrow Q$" を "$(P \Rightarrow Q)$ かつ $(Q \Rightarrow P)$" であることと定める．
- "$P \Leftrightarrow Q$" が恒真式であるとき "P と Q は同値である" といって "$P \equiv Q$" と表す．このとき，論理式 P と Q の真理値はつねに一致する．逆に，論理式 P と Q の真理値はつねに一致するならば "$P \equiv Q$" である (確かめよ)．
- ド・モルガンの法則（講義資料 1, 補題 1.1）：

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q), \qquad \neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q).$$

この第一式を確かめよう．表 $(*)$ を用いれば,

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

したがって $\neg(P \vee Q)$ と $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ の真理値はつねに一致する．

前回までの訂正

- 講義概要の開講曜日など：木曜日・3/4 限・本号館 H135 $\Rightarrow$ 火曜日・3/4 限・本館 H135

授業に関する御意見

- 声が小さくて聞こえにくいので，もう少し大きな声で話して欲しいです． **山田のコメント：** ごめんなさい．
- 5/28(土) の授業の「質問用紙」の提出はいつでしょうか．また，もう少し声が大きいとうれしいです．
  山田のコメント： 前半：未定ですが，多分提出を求めないと思います．
- マイクを使っていただけるとありがたいです． **山田のコメント：** 「省エネ」っていうんじゃだめですか?
- 先生の話すスピードが速くないから，留学生の私にとって，ちょうどいい感じをした．意見：先生の板書がちょっと読みにくいと思います．
- もう少し黒板をきれいに書いて欲しいです． **山田のコメント：** ごめんなさい．その場で指摘していただけるとありがたい．
- 後から入ってきた人に，プリントが足りないことを説明するより，板書の「プリントをとっていってください」という字を消した方が良かったような気がします．
  山田のコメント： そうですね．それはそうと「遅れてきた人」を目立たせたいという意志もあった，と認めざるをえない．
- 教室の広さに対して学生の人数が多すぎるので教室の変更を求めます．昨年，H135 で同程度の人数がいる状態で冷房なしで講義を受けましたが耐えられる暑さではありませんでした．
  山田のコメント： 想定外の受講者数です．あと 2 回様子を見ます．4 月 26 日の授業で 70 名以上の出席があるようでしたら検討します．
- 抽象的議論より具体的議論の方が難しいというお話がありました．なるべくそのつど具体例を示していただければ助かります．
  山田のコメント： それは難しい :-)
- 証明ないのが多い． **山田のコメント：** 自分でつけてください．
- 演習で対称差というものをやったのですが授業が演習に比べて進みが遅いということですか？
  山田のコメント： 必要になるまで授業では扱いませんが「このように定義したらこんなことがなりたつ」というだけですから，演習の方が進んでいる，というわけでもないでしょう．
- 無理数の定義の話（無理数：有理数でない実数）の時に数学の表現のあいまいではいけないところが実感できて良かった．
  山田のコメント： なのですが，ある程度の曖昧さを我慢することも必要かも．
- 授業内容外の質問です．内容を公開するとありますが，印刷するとは，フォントに打ち直した物でしょうか？意見の匿名性を確保するとは仰っていましたが，質問は名前を公開するのでしょうか？
  山田のコメント： この資料を見てください．
- 学生を退屈させないような授業をしようとしてくれる先生には好感が持てます．しかし，真面目な話の合間に，面白いことをさらっと言われては頭がついていけません．単発ではなく，連発なら効果があると思います．
  山田のコメント： どうして連発だと効果があるの?
- 授業の雑談（今回は $\frac{355}{113}$, $\frac{22}{7} \simeq \pi$ の話とか）が面白い． **山田のコメント：** 雑談はどうでもいいので. . . (ほんとか?)
- 面白そうな授業だと思いました．
- ジョークがとてもおもしろいです．
- 面白くて良かったです．
- 楽しく聞けるので，とてもおもしろいです．
  山田のコメント： それはどうも．
- まだ初回で断言できませんがわかりやすくてよかったです．
- ゆっくりと丁寧に説明してくださるので，とても分かりやすいです．ありがとうございます．
- わかりやすい説明で良かったです．
  山田のコメント： それは残念．山田はわかりにくい授業をめざしているので．
- これからよろしくお願いします． **山田のコメント：** こちらこそ
- 長い間休学していたのですが，がんばります．よろしくお願いします． **山田のコメント：** おかえりなさい．
- 虫になっていた $\longrightarrow$ カフカ「変身」（笑） **山田のコメント：** そうならないよう気をつけて．
- 特になし． **山田のコメント：** me, too

質問と回答

質問： 空集合についての質問です．$X \subset X$, $X^c = \{x \in X | x \notin X\}$ を空集合としていました．このときに $\emptyset \in X$ ではないでしょうか．すると，こちらで x は X の要素でないと言っているので，x は空集合とすることはできないのではないでしょうか．

お答え： いいえ．“$x \in X$ かつ $x \notin X$” は常に偽です (排中律) から，X^c は要素をひとつも持ちません．もし $\emptyset \in X$ なら X は “$\emptyset$” という要素をひとつもつことになり，おかしいわけです．

質問： P, Q を論理式としたとき $P \Rightarrow Q$ が良くわからない．現実的な意味は考えないで $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ と見なしてしまって良いのか？

お答え： 「現実的な意味を考えないで」の意味がよくわかりませんが，そうです．それが現実的な意味のような気もしますがね．

質問： 同値 “$\equiv$” と，等号 “$=$” の区別がうまくつかない．私の使っている本では，論理式 $P \Leftrightarrow Q$ がトートロジー (恒真命題) であるとき，P と Q は同値 (equivalent) といい，$P \equiv Q$ と考えることになっている．では例えば $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ のような場合は，両辺とも集合であって論理式ではないので，$\equiv$ ではなく $=$ を使っていると思えば良いのでしょうか．つまり，“$\equiv$” は論理式の世界で “$=$” ということで良いのか．

お答え： ご質問の “分配法則” の式は「集合」という「モノ」が等しいので “=” を用います．ところで，いただいた原文はメモのようで何を述べているのかよくわかりません．文として成立するものを書いてください．

質問： 有理数と無理数の定義はわかったが実数の定義がわからないです．

お答え： 解析概論第一でやるはず (と授業では説明しました)．

質問： 無理数をもっと直接的に定義する方法？ **お答え：**何をもって直接的というのでしょう．

質問： 英語すらまともにできない東工大生ですが，$\boldsymbol{N}$ は natural number $\boldsymbol{R}$ は real number の頭文字とわかるのですが $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{K}$ は何の頭文字なのでしょうか．

お答え： die Zahlen, quotient か何か，the complex numbers, der Körper.

質問： どういうときに 0 を自然数に含めるのか，また含めないときを含めたときに大きな違いはありますか．

お答え： 状況の違いというより人の違い．大きな違いはないが，文脈を読み取らないと混乱することがある．

質問： 私は今まで 0 を自然数として認識してきましたが，0 を自然数とするかしないかで流派が分かれているといのは何故なのでしょうか．本質点な差異でもあるのでしょうか．

お答え： ないです．

質問： どうして $\boldsymbol{N} \notin \boldsymbol{R}$ になるのですか？

お答え： 「自然数全体の集合」は実数ではないからです．注：$x \in \boldsymbol{R}$ とは “x は実数である” ということでした．したがって “タイマー付きレーザーポインタ $\notin \boldsymbol{R}$” ですね．

質問： プリントに誤りと思われる所があったので指摘させていただきます．誤りと思われる記述：$\boldsymbol{N} \notin \boldsymbol{R}$ (p. 2, l 8). 自分なりに直した記述：$\boldsymbol{N} \not\subset \boldsymbol{R}$. 属す “$\in$” という記号は集合と要素の関係を表すものであり，その否定 $\notin$ も集合と要素の関係を表すと認識しております．すなわち “$\in$” の左側には元がくる必要があり，集合 $\boldsymbol{N}$ を持ってくることはできないのではないかと思いました．集合の包含関係を表現しようとしているので，正しくは “$\subset$” の否定 “$\not\subset$” を使うべきだと思います．

お答え： その考えは間違いです．上の質問とお答え参照．

質問： 講義資料 2 ページに $\boldsymbol{N} \notin \boldsymbol{R}$ とかかれていますが，集合を要素とする集合というのは普通，考えるものなのでしょうか．

質問： 「集合」の集合というものは考えることができるのだろうか？もしできるのなら $\{\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{Q}\}$ などといった集合を考えるとどのようなことが導き出せるのだろうか？気になりました．

お答え： 考えます．前回きちんとやらなかったのですが，集合 X の冪集合 (X の部分集合全体のなす集合) は重要です．「集合の集合」をきちんと理解できるかどうかで現代数学の記述を理解できるかどうかが決まります．

質問： 高校生のときには $A \cup B$ を「和集合」と習いました．「和集合」と「合併集合」との間にはニュアンスの違いはあるのでしょうか？それとも，呼び方が違っているだけなのでしょうか？

お答え： 呼び方がちがっているだけ，なのですが，たとえば線形代数学で「線形空間の和」という和集合とは違うものをあつかったりしますので，それとは違った用語のほうが適当だと思います．前回の問題 1-6 参照．

質問： 部分空間と部分集合の違いは何でしょうか？ベクトル空間を全体集合として考えたときの部分集合を部分空間と呼ぶのでしょうか？

お答え： 違います．線形代数の授業ではどうならったでしょうか．

質問： 全体集合を普通の $\{x \in \boldsymbol{N} | x \text{ は偶数 }\}$(元が無限個)，$\{1,2,3,4\}$(元が有限個) などのような集合などに定義することも可能ですか？

質問： 元々どういう集合を全体集合として定義するのか詳しく知りたいです．

お答え： 文脈による．たとえば $\boldsymbol{R}^2$ の位相を考えているのであれば $\boldsymbol{R}^2$ が全体集合．暗黙のうちに全体集合を設定している場合もあって，そのときはさまざまな状況から読み取ることが必要です．いわゆる KY ってやつです．

質問： 集合をイメージしやすいように，似た性質のものを考えていたのですが，パーソナルコンピュータのファイルフォルダーと集合とが類似している事に気付きました．(例えば，① 元 =「フォルダーの中身」② 集合の元が集合 =「フォルダーの中にフォルダーがある」③ 空集合 $\emptyset$ = 「フォルダーの中身がカラ」④ $\{\emptyset\}$ = 「フォルダーの中に空のフォルダーがある」など) 集合のだいたいのイメージはこれで O.K. でしょうか？

お答え： よいと思います．

質問： 今回の授業の板書で写しまちがいかもしれませんが，全体集合 X として

$$X \subset X \qquad X^c = \{x \in X | x \notin X\} \leftarrow \text{ 空集合}$$

となっていました．これは $\emptyset = \{x | x \in X, x \notin X\}$ と定義するということでしょうか？全体的に定義がはっきりし

ない印象でしたので定義には Def などと書いて頂ければと思います.

お答え： そうですね．空集合の定義をきちんとしなければなりません．空集合とは「要素をひとつも持たない集合」です．集合 X が空集合であるための必要十分条件は「任意の x に対して $x \notin X$」です.

質問： 空集合が任意の集合 A の部分集合ということは，対偶をとって，$a \in A \Rightarrow a \notin \emptyset$ を示すことで証明したことにならないでしょうか.

お答え： それを示せますか? 直接「$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$」はつねに真，ということがわかります．注：”$P \Rightarrow Q$” とは “$(\neg P) \vee Q$” のことでした.

質問： $\emptyset^c$ とはどんな集合ですか．そもそも存在するのですか.

お答え： 全体集合を X とすると $\emptyset^c = X$ です．実際 $\emptyset^c = \{x \in X \,|\, x \notin \emptyset\}$ ですが，右辺の条件はいつでも成り立ちます.

質問： 空集合の記号 $\emptyset$ について質問があります．“$\emptyset$” というのは集合を表す記号なのですか？ “$\{\emptyset\}$” という表記も見かけます．例えば “$\emptyset \subset X$” と “$\{\emptyset\} \subset X$” (X は集合とします) ではどちらの表現が正しいのですか？

お答え： $\emptyset$ と $\{\emptyset\}$ は違うものを表しています．前者は「要素をひとつも持たない集合」で，要素の個数は 0 です．後者は「“$\emptyset$” という集合をただひとつの要素としてもつ集合 (集合の集合)」です．要素の個数は 1 です．$\emptyset \in \{\emptyset\}$ です.

質問： ちょっと確認したいのは：空集合は任意の集合の部分集合だから $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ になる．ここの $\emptyset$ は元素ですか．もし $\emptyset$ は元素なら，$\emptyset \in \emptyset$ も成立ちますか.

お答え： 「元素」という言葉の意味がわからないのですが，$\emptyset \subset \{\emptyset\}$ は正しいです．しかし $\emptyset \in \emptyset$ は正しくありません．実際 $\emptyset$ はひとつも要素を持ちません.

質問： $\cap, \cup \leftarrow$ この記号自身の名前はなんでしょうか.

お答え： “intersection”, “union” です

質問： $\equiv$ と $\Leftrightarrow$ の違いを教えてください.

質問： “$\equiv$” という記号も “$\Leftrightarrow$” という記号も同値と呼ぶそうですが，この 2 つの記号に違いはあるのでしょうか？

お答え： 「前回の補足」参照.

質問： $\forall$ や $\exists$ などの記号は，文字の左上．補集合を表す c は右上に書く違いには，どのような理由があるのでしょうか.

お答え： 残念ながら知りません．転置行列も A^t と書く人と ${}^tA$ と書く人がいますね.

質問： A^c と書いて $\bar{A}$ と書かないのは，集合 A に違う位相を入れたものを区別するとき A と $\bar{A}$ というように書いて，区別するためだったと記憶しておりますが，正しいでしょうか？

お答え： 位相空間の部分集合 A の「閉包」(後半でやります) の意味で $\overline{A}$ を用いたいので，それと区別するのです.

質問： $\cup$ と $\vee$ のちがいはなんですか？

お答え： $\cup$ は集合の演算，$\vee$ は条件の演算.

質問： 記号の扱い方に関して質問です．1 つのことを表すのに，複数の書き方があります．「P でない」,「not P」,「$\neg P$」「P または Q」,「P or Q」,「$P \cup Q$」,「$P \vee Q$ 」「P かつ Q」,「P and Q」,「$P \cap Q$」,「$P \wedge Q$ 」これらは場合に応じて使いわける必要はありますか？また，これらを混同して用いることは問題ですか？例) (not P) $\vee$ (not Q), $(P \cup Q) \wedge (R \cup S)$

お答え： 授業では，日常語に近い言葉で説明しました．“$\vee$”, “$\wedge$” などの記号はそこまで「一般的」でないと思うので．とくに，状況で使い分けるということはありませんが，同じ文脈では同じグループの記号を使ったほうがよいと思います.

質問： $\Rightarrow$ の他に $\rightarrow$ という記号を見たことがありますが，どう違うのですか．どちらを使ってもいいのですか.

お答え： この授業では “$\rightarrow$” は写像の記号として用います.

質問： $A \subset B$ は $(x \in A \rightarrow x \in B)$ と表せます．$P \rightarrow Q$ は $(\neg P) \vee Q$ と表せます．この講義で扱う事柄は，and, or, not, $\in$ で全て表せるのでしょうか.

お答え： 「事柄」が何をさしているかによります.

質問： $\wedge$ と $\cap$ と & の使い分けの基準がわかりません．扱っているものの違い (命題か集合かとか) で使い分けてるんですか？

お答え： $\wedge$ と & は同じ意味で使いました．$\cap$ は違う意味です.

質問： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ はどのように示すのですか？

お答え： $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \wedge R)$ (この資料の「前回の補足」のようにして示せる) を用いて，授業でやったド・モルガンの法則の証明を真似する.

質問： $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 等について，括弧はつけなくても良いのでしょうか？ $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$ の方が私はスッキリするのですが. . . .

お答え： つけても良いです．しかし $2 = (x^2 - 1)$ とはあまり書かないのでは?

質問： $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ から $\neg({}^\forall x \in X, P(x)) \equiv {}^\exists x \in X, s.t.\ \neg P(x)$ を導くことができるか.

お答え： 少し枠組みが違います．授業で話したのは「例えばなし」だと思ってください.

質問： 結合法則や交換法則においての「法則」は公理のような形で群や環の定義に使われます．一方，ド・モルガンの法則は証明があることから定理のような存在に思えます．同じ法則でもこのような違いが生じるのはなぜですか.

お答え： たしかに，このように用語には文脈によって違った意味をもつものがありますね.

質問： 扱う集合がいいかげんで困るような例は以下のもの以外にはありますか？ラッセルのパラドックス：X：あらゆる集合を要素として持つ集合，S：自分自身を要素として持たないような集合の全体，$S = \{A \in X | A \notin A\}$ であるが，$S \in S$ でも $S \notin S$ でもない (説明は略).

お答え： ほかにもいろいろあるので調べてご覧なさい.

質問： de Morgan の法則は，有限個の場合成り立つのは真理表などによりわかりますが，無限個の時は成立するのでしょうか.

お答え： 成立します．これは $\neg(\forall x : P(x))$ と $\exists x : \neg P(x)$ が同値であることです．ちょっと枠組みが違うのですが，とりあえず認めておいてください.

質問： $A = \{x \in \boldsymbol{N} | x = 1$ または $1 \in A\}$ のような記述は集合 A$(= \boldsymbol{N}?)$ をさだめられているのか？ (A が集合あるかわからないのに $1 \in A$ とかけるのか，条件の中に A を入れることはできるか)

お答え： ちょっと意味がわからないのですが，集合 A の定義に集合 A を用いるのはまずいです．“自己言及” はパラドクスを引き起こすことがあります.

質問： 集合を次のように表してよいか．ただし f は写像.

$$\{f(x) | P(x)\} \qquad (\text{例}) \left\{\frac{x}{2} | x \in \boldsymbol{Z}\right\}$$

お答え： よく使います．たとえばご質問の例は

$$\left\{y \,|\, \exists x \in \boldsymbol{Z} : y = \frac{x}{2}\right\} = \left\{y \,|\, y = \frac{x}{2} \text{ となるような整数 } x \text{ が存在する}\right\}$$

と書き直すこともできますね.

質問： 任意の集合 A に対して，文字 x に対する条件 $f(x)$ が存在して (原文ママ：$P(x)$ のことか) $A = \{x | P(x)\}$ とかけるのか？

お答え： 条件としてどんなものを考えているのかによりますが，このようにかけないとすると，集合の要素を特定できないことになります.

質問： $\{x|$ それが満たすべき条件 $\}$，このときの x の全体集合はなにか.「それが満たすべき条件」となれる条件はどんなものか.

お答え： 全体集合は文脈による．条件は何でもよい.

質問：「数学的対象」という言葉がとても主観的に思えるのですが，具体的にどのような対象のことをいうのでしょうか.

お答え： 非常に主観的です．この講義で扱う集合は，数の集合 ($\boldsymbol{N}$ など) から具体的に構成されるものです.

質問： 授業中に「ちょっと嘘だけど無限個あるものを扱う時，集合が役に立つ」と言っていたと思うのですが，具体的にどのように嘘なんでしょうか.

お答え：「集合の考えが必要なのは無限を考えるとき」といったような気がしますが．非常に大きな有限集合は，闇雲に扱えないので. . . ということです.

質問：「要素の個数」とプリントにあるがそれは何か？この授業ではなんとなくとしてよいのか.

お答え： とりあえずなんとなくでよい．5 月 3 日の講義でやることになると思います.

質問： テストの難度はプリントの最後にある問題と同じくらいですか？

お答え： 未定.

質問： 講義資料の問題の解答は，どこかで提示されるのですか.

お答え： いいえ.

質問： 授業内容に関する質問が考えつかなかった場合，授業内容以外の数学の質問をしてもいいのですか．それか提出しないほうがいいのですか.

お答え： どちらでも結構です．得点が低くなる可能性がありますが，なるべく回答するように努力します.

2 写像

■写像 集合 X の各要素 $x \in X$ に対して，集合 Y の要素 $f(x) \in Y$ を対応させる対応の規則 f を X **から** Y **への写像**，X を f の**定義域**, Y を f の**値域**という[*1]．写像 f の定義域が X，値域が Y であることを

$$f\colon X \longrightarrow Y$$

と書く．この写像 f が $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ を対応させる，ということを明示するときは，矢印 "$\to$" の代わりに "$\mapsto$" を用いて

$$f\colon X \ni x \longmapsto f(x) \in Y$$

と書く．とくに，値域が $\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}$ であるような写像 $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{C}$) を X 上の**関数** (実数値関数・複素数値関数) ということがある．

■制限 写像 $f\colon X \to Y$ と $A \subset X$ に対して

$$f|_A\colon A \ni x \longmapsto f(x) \in Y$$

で与えられる $f|_A\colon A \to Y$ を f の A への**制限**という．

■像と逆像 写像 $f\colon X \to Y$ が与えられているとき，$A \subset X, U \subset Y$ に対して

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y, \qquad f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$$

をそれぞれ f による A の**像**, U の**逆像**とよぶ[*2]．像 $f(A)$ は

$$f(A) = \{y \in Y \mid f(x) = y \text{ となる } x \in A \text{ が存在する }\}$$

と表すこともできる．

写像 $f\colon X \to Y$ と $A, B \subset X, U, V \subset Y$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) & f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \\ f^{-1}(U \cup V) &= f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) & f^{-1}(U \cap V) &= f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ f(A) \setminus f(B) &\subset f(A \setminus B) & f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V) &= f^{-1}(U \setminus V) \\ A &\subset f^{-1}(f(A)) & U &\supset f(f^{-1}(U)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

■直積 集合 X, Y に対して，

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

を X と Y の**直積**という．

例 2.1. $\boldsymbol{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \boldsymbol{R}\}$ は $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ とみなすことができる．

直積 $X \times Y$ に対して，

$$\pi_X\colon X \times Y \ni (x, y) \longmapsto x \in X, \qquad \pi_Y\colon X \times Y \ni (x, y) \longmapsto y \in Y \tag{2.2}$$

をそれぞれ第一成分，第二成分への**射影**という．

2011 年 4 月 19 日 2011 年 4 月 19 日

[*1] 値域という言葉を f による X の像 $f(X)$ の意味で使うこともある．

[*2] 紛らわしい記号だが，要素 $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ であるが，$A \subset X$ に対して $f(A) \subset Y$ である．また，f^{-1} は逆関数の記号と同じであるが，f が全単射でない場合でも定義される．

■**グラフ**　写像 $f\colon X \to Y$ に対して

$$\mathrm{graph}(f) = \bigl\{\bigl(x, f(x)\bigr) \in X \times Y \mid x \in X\bigr\} = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in X, y = f(x)\} \subset X \times Y$$

を f の**グラフ**という．

■**全射・単射**　写像 $f\colon X \to Y$ が**全射**であるとは $f(X) = Y$ が成り立つことである．また，**単射**であるとは，

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

が任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して成立することである．写像 f が全射かつ単射であるとき f は**全単射**であるという．

例 2.2.
- 集合 X から X への写像 $\mathrm{id}_X\colon X \ni x \mapsto x \in X$ を**恒等写像**であるという．恒等写像は全単射である．
- 集合 X の部分集合 A に対して
$$i_A\colon A \ni x \longmapsto x \in X$$
で定義される写像 $i_A\colon A \to X$ を**包含写像**という．包含写像は単射である．さらに包含写像 i_A が全射であるための必要十分条件は $A = X$ となることである．

■**合成写像**　写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ に対して

$$g \circ f\colon X \ni x \longmapsto g \circ f(x) = g\bigl(f(x)\bigr) \in Z$$

で与えられる写像 $g \circ f\colon X \to Z$ を f と g の**合成**という．

■**逆写像**　写像 $f\colon X \to Y$ に対して，写像 $g\colon Y \to X$ で

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

となるものが存在するとき g を f の**逆写像**といい，$g = f^{-1}$ と書く．

定理 2.3. 写像 f の逆写像が存在するための必要十分条件は f が全単射となることである．

問題

2-1 集合 $X=\{1,\dots,m\}$，$Y=\{1,\dots,n\}$ に対して X から Y への写像全体の集合は n^m 個の要素からなる．

2-2 (2.1) を示し，等号でないものは等号が成り立たない具体例をあげなさい．

2-3 写像 $f\colon X\to Y$ が全射 (単射) であるための必要十分条件は，$\pi_Y|_{\mathrm{graph}(f)}$ が全射 (単射) となることである．ただし $\pi_Y\colon X\times Y\to Y$ は第二成分への射影である．

2-4 写像 $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to z$ に対して $g\circ f$ が単射ならば f は単射であり，$g\circ f$ が全射なら g は全射である．

2-5 写像 $f\colon X\to Y$ と $g\colon Y\to X$ で，$g\circ f=\mathrm{id}_X$ かつ f は全射でないような具体例をあげなさい．

2-6 X, Y をベクトル空間，$f\colon X\to Y$ を線形写像とする．
- 写像 f が単射であるための必要条件は $f^{-1}(\{0_Y\})=\{0_X\}$ となることである．ただし $0_X, 0_Y$ はそれぞれ X, Y の零ベクトルである．
- X と Y の次元がともに有限で一致するとき，f が全射であるための必要十分条件は f が単射であることである．

2-7 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合

$$X=S^2\setminus\{(0,0,-1)\}\qquad S^2=\left\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

に対して，

$$f\colon X\ni(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z)=(\xi,\eta)\in\boldsymbol{R}^2,\qquad \text{ただし}\qquad \xi=\frac{x}{1+z},\quad \eta=\frac{y}{1+z}$$

により写像 $f\colon X\to\boldsymbol{R}^2$ を定める．この写像は全単射であることを示し，逆写像を求めなさい．