2011 年 4 月 26 日 (2011 年 5 月 3 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一講義資料 3

お知らせ

- 次回は **5 月 3 日** (火) です．休日ですが，お忘れなきように．鉄道の休日ダイヤにご注意ください．
- 毎回提出していただいている質問用紙ですが，以下の回の授業の後は受付を中止させていただきます：
  - 5 月 28 日 (土)：授業曜日変更のため
  - 5 月 31 日 (火)：1 日午後より出張のため
  - 6 月 21 日 (火)：試験前のため
- 上記と関連して授業日程表を改訂しました．OCW または講義 web ページをご覧ください．

前回の補足

- 写像 $f\colon X \to Y$ の定義について "$f(x)$ は x に対してただ一通りに決まる" ことを言わなくてよいのか，というご質問がありましたが $f(x)$ と書いた時点でひとつ決まっている，とみなしています (不親切ですが)．いずれにせよ，1 年生の線形代数の "線形写像" の項目で学んだ "写像" と全く同じものです．
- 写像の定義：集合 X, Y に対して集合 $\Gamma \subset X \times Y$ が次の性質を満たしているとする：任意の $x \in X$ に対して $(x, y) \in \Gamma$ となる $y \in Y$ がただ一つ存在する．このとき x に対応する y を $f(x)$ と書き，f を X から Y への**写像**という．
  とくに $X = \emptyset$ のときは $X \times Y$ が $\emptyset$，したがって $\Gamma \subset X \times Y$ は空集合でなければならない．このとき，$x \in X$ は常に偽だから上の性質は成り立っている．すなわち Γ は写像を定めているといえる．
- 逆像の記号について：写像 $f\colon X \to Y$ と $U \subset Y$ に対して

$$f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$$

  で定義される X の部分集合で U の逆像とよびました．
  一方，f が全単射のとき，任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただひとつ存在します．このようにして得られる写像

$$f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$$

  を f の**逆写像**といいます．
  これらは同じ記号 "f^{-1}" を用いますが**違うもの**です．とはいえ，$f^{-1}(*)$ のカッコの中が値域の部分集合なら逆像，値域の要素なら逆写像を表す，という意味で，使い分けは明確です．
  ちなみに，f が全単射のとき

$$f^{-1}\bigl(\{y\}\bigr) = \bigl\{f^{-1}(y)\bigr\}$$

  です．左辺と右辺の f^{-1} の意味の違いがわかりますか?

前回までの訂正

- 講義資料 2, 6 ページ (2.1) 式：$U \subset f\bigl(f^{-1}(U)\bigr) \Rightarrow U \supset f\bigl(f^{-1}(U)\bigr)$
- 講義資料 2, 8 ページ 問題 2-3: $\pi_Y|_{\mathrm{graph}\,X} \Rightarrow \pi_Y|_{\mathrm{graph}(f)}$

授業に関する御意見

- 濃度という概念の存在を前回の授業で初めて知った．早く習いたい．自分で図書をみたが，曖昧な理解で止まっている． **山田のコメント：** というわけでとりあえず今回やってみます．
- 自分で行動しなければいけない，ということ非常に正しいです．わかりやすくて，ていねいな教科書が必ずしも良い教科書ではないと最近思います．
  山田のコメント： 大学は「放任主義とえこひいき」の場だそうです．
- 次回の講義が楽しみです． **山田のコメント：** あまり期待しないでくださいね．
- もっと資料を刷ってほしいです． **山田のコメント：** 受講者数が確定していないので，前回の資料提出者 $+10$ としました．
- 明快で理解しやすかったと思う． **山田のコメント：** そう?
- 講義資料の先生の HP からのリンクが無効です．OCW-i からはみれます． **山田のコメント：** 修正しました．ご迷惑をおかけしました．
- 字が読みややすいときと読みにくいときの差が激しいです． **山田のコメント：** ごめんなさい．
- 先週は提出し忘れてしまいました．すみません．マイクのおかげでとても聴き取りやすくなりました． **山田のコメント：** うるさくありませんか?
- x と X の読み分けに難儀されているようですが，X を「キャピタルエックス」or「ラージエックス」のように表現してみてはいかがでしょうか?
- 大文字の「X」を言葉で言うときは「ラージエックス」と言えば良いと思います．
  山田のコメント： それってよく使われる英語なんですかね? 身近のアメリカ人は “big X” なんて言ったり “uppercase X” ってのもありますね．
- 細かいことですが今回の質問用紙の提出は 47 件 $\neq$ 数学科 18 名 $+$ その他 30 名．
  山田のコメント： 失礼．1 名あとから提出でした．
- 遅刻してきた生徒に対しては，原則として無視で良いのではないか．
  山田のコメント： 生徒ではなく学生です．意味の違いに気をつけてください．
- 急に大きな声を出されると驚いてしまうから，それはしないでほしいです． **山田のコメント：** そんなに?
- 時々聞きとりにくくなります． **山田のコメント：** ごめんなさい．
- 次回の講義資料を早めに OCW に上げてほしいです． **山田のコメント：** ぎりぎりまでかかるので配布後になります．
- 面白かったです． **山田のコメント：** どうも．
- 授業をもっとはやく進めてほしい．
- 先生の授業の進度よりも，演習 (数学科の) の方が進度がはやいです．進度をもう少しはやめてくれるとありがたいです． **山田のコメント：** そうします．
- 日本語で定義をかかれても (あいまいで) わからないので集合の記号でかいて下さい．
  山田のコメント： 集合の記号で書くとわかりやすいのでしょうか? 日本語の定義でも “あいまいさ” をなるべく排除するようにしていますが，どこが曖昧なのか指摘してみてください．集合や論理の記号で**書かなくても**，正しく内容を読み取れる能力は絶対に必要です．
- p のスクリプトの書き方がわからない． **山田のコメント：** 黒板見て．
- 書いてあって説明しなかった内容は使ってよいのか．また授業で使うのか． **山田のコメント：** 少なくとも読んでいる，ということは前提．
- わかりにくい授業を目指しているようなので，復習したいと思います． **山田のコメント：** そうしてください．
- 定義 (def)，定理 (Th)，補題 (Lem) などを書いてほしいです． **山田のコメント：** だらだらした文から読み取るのも一つの訓練と思ってください．20 世紀初頭のフランスの論文はだらだらしたものが多く，難儀します．
- 学生の質問に時間を割いてお答えいただきありがとうございます． **山田のコメント：** どういたしまして．
- 人数が減ってよかったですね．私も嬉しいです． **山田のコメント：** 本当に減っているのだろうか?
- 前回の授業での理解が足らず，この用紙は $+3$ 点が欲しければ提出すればよいと思っていたのですが，必須のものなのでしょうか．
  山田のコメント： 少なくとも第 1 回目は受講者の把握をしたいので出して欲しかった．少なくとも講義資料にはそう書いた．
- 他学科なので時間割の関係でこの科目の演習をとることができません．試験は講義資料にある問題と同程度でしょうか．（演習クラスの問題も出るのでしょうか？） **山田のコメント：** そのつもり
- 特になし．
- 特にありません． **山田のコメント：** me, too

質問と回答

質問： $f: \boldsymbol{R} \ni x \mapsto f(x) = x^2 \in \boldsymbol{R}$ で $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ とかけるなら $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ ともかけるのでしょうか？

お答え： それでもよいですね．

質問： 絵で申し訳ないですが. . . (山田注：申し訳ないが絵を省略) $f: \boldsymbol{R} \to x \mapsto x^2 \in \boldsymbol{R}$ の 2 つめの $\boldsymbol{R}$ が $[0, \infty)$ とせずとも，それより広い (含んだ) 集合であれば良い，という意味で合ってますか． **お答え：**はい．

質問： $f(x) = x^2$ で $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ですが，右の $\boldsymbol{R}$ は $[0, \infty)$ で $\boldsymbol{R}$ の負まで至る必要はないということでしたが，ということは，値域と定義域は必ずしも一対一ではないということでしょうか．例 $f(x) = 2x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のとき $f: [0, 1] \to [-100, 100]$ このようなものも正しいのでしょうか．

お答え： 正しいのです．そこの文脈で何を値域と考えるか，というだけです．

質問： 講義で，単純に $f: X \to Y$ の Y を値域という人と f の像を値域と呼ぶ人がいる，ということでしたが，2 つの違いがよくわかりませんでした．Y は X の f による写像ですよね．写像と f の像は別物なんでしょうか．

お答え： Y は写像ではありません．f が写像です．

質問： $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ の証明について，

$$
\begin{array}{ll}
(1) & y \in f(A \cap B) \Rightarrow y = f(x) \text{ となる } x \in A \cap B \text{ が存在} \\
(2) & \qquad \Rightarrow y = f(x), \quad x \in A \text{ かつ } x \in B \\
(3) & \qquad \Rightarrow (y = f(x), x \in A) \quad \text{かつ} \quad (y = f(x), x \in B) \\
(4) & \qquad \Rightarrow y \in f(A) \quad \text{かつ} \quad y \in f(B) \\
(5) & \qquad \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)
\end{array}
$$

この証明で逆の $\Leftarrow$ はどこで成り立たないのですか．$f(A)$ の定義は $y = f(x)$ となる $x \in A$ が存在する y の集合なので，(1) 行で成り立ち，(2)〜(5) でも成り立つように思えるのですが．

お答え： (4) $\Rightarrow$ (3) が成り立ちません．“$y \in f(A)$ かつ $y \in f(B)$” からの帰結は “ある $x_A \in A$ が存在して $y = f(x_A)$, かつある $x_B \in B$ が存在して $y = f(x_B)$”．(3) ではこの x_A と x_B が等しく取れると言っているわけで，(4) より強いのです．

質問： graph(f) を図として書いたものが，所謂「グラフ」(軸かいて曲線引くアレ) という認識で合ってますか？

お答え： です．

質問： 授業を聞いていて思ったのですか，紙には 3 次元までのグラフが書けるし，空間には 4 次元までのグラフが書けるけど，4 次元の場所は地球上にないから，5 次元以上のグラフって書けないんですか？ (こういうことって証明できるんですか？)

お答え： “書ける” がどういうことかよく分かりません．そこから逃げるために “集合の言葉” を使っているのです．

質問： 講義資料 p. 6, “例 2.1, $\boldsymbol{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \boldsymbol{R}\}$ は $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ とみなすことができる” とありますが，$\boldsymbol{R}^\infty$ は直積で表すとしたらどうすればよいのですか.

お答え： $\boldsymbol{R}^\infty$ をどう定義しましょうか．無限個の直積については選択公理の項で注意します．

質問： 写像の定義について $(X, Y$: sets) 各 $x \in X$ に対して Y の要素 $f(x) \in Y$ を対応させる規則 f のことを写像としたのですが，対応させる規則とはどういうことなのですか．たとえば $X = \{1\}$, $Y = \{1,2\}$ のとき，f による X から Y への対応を $f(1) = 1$ または $f(1) = 2$ とする，のような f も写像といえるのですか.

お答え： いいえ．“または” はまずいです.

質問： 写像を X, Y: sets 各 $x \in X$ に対して Y の要素 $f(x) \in Y$ を対応させる規則 f と定義していますが，$\forall x \in X$ に対して定まる $f(x) \in Y$ は 1 通りでなくても良いのでしょうか？

質問： $f : X \to Y$ という写像は $\forall x \in X, [\exists 1 y \in Y, [f(x) = y]]$ と論理記号で書けますが今回の授業で f の値域の一意性を明記しなかったのはどうしてですか？

質問： 写像の定義の中の “集合 Y の要素 $f(x) \in Y$” の部分で $f(x)$ は x に対して一意に定まるのか.

お答え： 一通りです．日本語は単数, 複数の区別が曖昧なので困るのですが，“an elemet $f(x)$ of Y” です.

質問： まだやっていない内容になるんですが，$f : X \to Y$ が全単射，$U \subset Y$ とした時に，f による U の逆像 $f^{-1}(U) = \{x \in X|f(x) \in U\}$ と，逆写像 f^{-1} による U の像 $f^{-1}(U) = \{f^{-1}(y)|y \in U\}$ は一致しますが，このとき，この 2 つの式の左辺にある f^{-1} は同じものとして考えてよいのでしょうか. **お答え：**いいえ.

質問： 冪集合の記号に関して，講義資料ではドイツ文字の $\mathfrak{P}$ が，板書では筆記体の $\wp$ が用いられていたように思います．ドイツ文字で記されたものを実際に書く時は，筆記体を用いるのでしょうか．尤も，冪集合の場合は 2^X (X: 集合) のように書くこともありますが. . . .

お答え： 本来，ドイツ文字の筆記体を使うべきですね．ググると出てきます.

質問： 空集合 $\emptyset$ を定義域とする写像は存在しますか？講義資料によれば “対応の規則 f” のことを写像と定義するため，この “対応の規則” を明らかにしないと決定できないように思われます．なお，グラフを用いて写像を定義するのであれば，$\emptyset \subset \emptyset \times Y$ であり，さらに

$$\forall x \in \emptyset, \exists y \in Y, [(x,y) \in \emptyset] \quad \wedge \quad \forall x \in \emptyset, \forall y, y' \in Y, [(x,y),(x,y') \in \emptyset \to y = y']$$

がなりたつので写像 $\emptyset : \emptyset \to Y$ が存在すると思います.

お答え： “対応の規則” と思うとちょっと気持ち悪いですが，直積集合を用いて写像を定義する，という方法で理解することができます．ここでは簡単のために $X \neq \emptyset$ としておきましょう.

質問： 関数 f を $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = x^2$ としたとき，$f(\boldsymbol{R}) = \{y \in \boldsymbol{R}\,|\,y \geqq 0\}$ となるのはわかります．しかし $f^{-1}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}$ というのが納得できません．例えば $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ だとすれば，$f^{-1}(-1) = i$ は間違っていないと思うのです．たしかに f の定義域は $\boldsymbol{R}$ なので，$i \notin \boldsymbol{R}$ よりみたしてはいけません．$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ と定義した時点で $f^{-1} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ なのでしょうか？もしそうだとすれば，授業中の板書も $f^{-1} = \{x \underline{\in \boldsymbol{R}}|f(x) \in \boldsymbol{R}\}$ のように (下線部の “$\in \boldsymbol{R}$” は書かれていませんでした) するべきではないのでしょうか.

お答え： 正確に言えば，下線部が必要ですが，f の定義域を決めた時点で “暗黙のうちに” 省略されることが多いです．ちなみに，この例の場合 $f^{-1} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ と思ってはいけません．逆写像は存在しないのですから.

質問： 証明の最後につける $\square$ は数学的な記号なのでしょうか？ (こう書くと「何をもって数学的か？」と言われてしまいますか？)

お答え： 証明終わりの意味です．Halmos 記号と言われます (講義で説明しなかったっけ).

質問： $\square$ (ハルモス記号) を初めて見ました．これは「証明終」の意味ですか．高校の時に証明終のことを (Q.E.D.) と書く先生がいたのですが，(Q.E.D.) と $\square$,「証明終」に使い方の違いはあるんでしょうか.

お答え： 違いはないですが，同じ文脈で混用すると見苦しいですね.

質問： 「連続性」と「稠密性」とは別の意味ですか？ **お答え：**別の意味です.

質問： 位相とは具体的には何を指しているんですか？ **お答え：**それをこの科目の後半に扱います.

質問： 超関数は写像に分類されるのでしょうか？ ($\delta(x) = \infty (x = 0), 0 (x \neq 0)$ で定義されるデルタ関数など)

お答え： 少なくとも $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像ではありません.

質問： 制限や射影については講義ではふれないのですか？ **お答え：**触れます．触れなくても読んでください．

質問： $x \in X$ の中に，異なる 2 つの元 $y_1, y_2 \in Y$ と対応するものがある場合は写像とはよびませんか？また，プリント p. 6 の下に f^{-1} は f が全単射でない場合も定義される，とあり，一方プリント p7 の下には f の逆写像が存在するための必要十分条件は f が全単射となることである，とあります．これは，逆像と逆写像の違い，すなわち，集合そのものである $f^{-1}(U)$ と集合の元である $f^{-1}(y)$ の違いと考えればいいですか？

お答え： 前半：呼びません．後半：講義で説明したように f^{-1} には "逆像" と "逆写像" の二つの意味があります．$f^{-1}(*)$ の括弧の中が値域の部分集合なら逆像，値域の要素なら逆写像を表しています．

質問： 集合と数をともに要素としてもつ集合を定義するのもできますか？このような集合を定義域とする写像はどういうふうに定義されますか？

お答え： 例えば $\{1, 2, \{1, 2\}\}$ は集合．各要素に "何か" を対応させれば写像が得られる．

質問： 授業内容に関する質問ではありませんが，集合と位相で学ぶ数学も物理学で応用されるケースもありますか？

お答え： 最近の理論物理学では見境なく (そっちの方，ごめんなさい) どんな数学でも使います．"これは使わない" などということが事前にわかるとはとても思えません．

質問： $A \subset X, x \in X, f(A)$ と $f(x)$ のちがう点は何かよくわからないです．教えてください．

お答え： $f(x)$ は写像 f によって x に対応する値域の要素．$f(A)$ の定義は講義資料にある．

質問： ベキ集合のベキ集合を取る等，元が延々と集合を元とする集合である様な物を取り扱う事はありますか．又，逆写像と逆像について，逆写像 $f^{-1} : X \to X$ が取れる時，その集合は逆像に等しいという認識で良いですか．

お答え： 前半：あります．後半：その集合とはどれを差すのでしょうか．

質問： (a, b) を直積とみるか，開区間とみるかは文脈によってしか判断できないのでしょうか． **お答え：**その通り．

質問： X から Y への写像 f について Y が $\boldsymbol{R}$ か $\boldsymbol{C}$ の場合，f を関数と呼ぶそうですが，Y が $\boldsymbol{R}$ でも $\boldsymbol{C}$ でもないというのは具体的に何がありますか？

お答え： 線形代数で "線形写像" なんてのを習いませんでしたか?

質問： 冪集合の $\mathfrak{P}$ は何ですか？パソコンでどう打ったら $\mathfrak{P}$ と変換できるのでしょうか？

お答え： TeX なら `\mathfrak{P}`.

質問： 集合の集合というのが出てきましたが，集合と要素の集合というのも存在しますか？ **お答え：**考えます．

質問： $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}$ は数列ではないのですか？ **お答え：**ここでは $\boldsymbol{R}$ にしましたね．$\boldsymbol{C}$ でもよいです．

質問： 全射の定義で $f(X) = Y$ というのは，Y の各要素 $y \in Y$ はすべて，$y = f(x)$ となるある $x \in X$ で表されるということを示しているのですか．たとえば $f : \boldsymbol{R} \ni x \mapsto x^2 \in [0, \infty)$ のとき写像 f は全射であるといえるのですか．

お答え： いえます．

質問： 例えば，$f : X \to Y$ を全単射な写像とします．すると逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在していて，$\forall x \in X, \forall y \in Y$ に対して

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x, \tag{1}$$

$$f(\{x\}) = \{f(a) \in Y | a \in \{x\}\} = \{y\} \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) = \{b \in X | f(b) \in \{y\}\} = \{x\} \tag{2}$$

という事は理解した (つもり) なのですが，(1) は元としての対応，(2) は像としての対応を表しているという事でよろしいでしょうか？また，(1) のようにかかれている場合と，(2) のようにかかれている場合とでは，受ける印象に違いはありますか？この場合だと，(2) のようにかかれていたら，「(1) のようにかいた方がわかりやすいのに」と僕なんかは思ってしまいますが....

お答え： 全単射な場合はそうですが.

質問： 前回の問題で，n 個の要素をもつ集合の冪集合の要素が 2^n 個であることを示す問題がありました．結局は帰納法を使ったのですが，帰納法なしでやろうとしたらうまくできませんでした．諦めるべきなのでしょうか．

お答え： 集合 X の各要素に 0 または 1 を対応させるやり方を数え上げなさい．

質問： この授業では対応についてはやりませんでしたが，以降も取り扱わないのでしょうか？また，f^{-1} は対応なのでしょうか？ (f が全単射でないとき) **お答え：**"対応" という語で何を表していますか?

質問： グラフと直積が不安なので確認したいのですが，$X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 4, 9\}$, $f(x) = x^2$ のとき，$X \times Y = \{(1, 1), (1, 4), (1, 9), (2, 1), (2, 4), (2, 9)\}$, $\mathrm{graph}(f) = \{(1, 1), (2, 4)\}$ ということでいいのでしょうか．

お答え： この場合はよいです．

質問： $f : X \to Y$，(f のグラフ)$= \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in X\}$ と板書していた部分の，この等号は $\equiv$ の間違いではないのか．見間違いかもしれませんが． **お答え：**$\equiv$ をどういう意味で使っていますか? この $=$ は単に集合の等

式です.

質問： f^{-1} が f が全単射でなくとも定義されるなら $f : X \to Y$ として $x, x' \in X$ かつ $x \neq x'$, $f(x) = f(x')$ とすると $f^{-1}(f(x)) = x, x'$ か.

質問： 集合から集合，要素から要素への写像はありますが，要素から集合への写像もしくは集合から要素への写像はあるのでしょうか.

お答え： ご質問の意味がよくわかりません.

質問： 像と逆像のところに「$A \subset X, U \subset Y$」と書いてありましたが，何故 U なのですか.

お答え： U じゃいけませんか?

質問： "$\to$" と "$\mapsto$" の使い分けがわかりません．使い分ける必要はあるのですか. **お答え：**あります．講義資料 2 6 ページの冒頭.

質問： 常用対数 $\log_{10}$ を log，自然対数 $\log_e$ を ln と表記するのは科学系の論文や参考書ではよく見かけるのですが，数学において，ln の表記はほとんど見ない気がします．数学で，ln を用いるのは何か問題があるのでしょうか.

お答え： 数学でもよく ln を使いますよ．日本語の書物では，高等学校の教科書に配慮して log を使っているものと思われます.

質問： $x \notin \boldsymbol{x} \Rightarrow x \notin \emptyset$ が真であるから，$x \in \emptyset \Rightarrow x \in \boldsymbol{x}$ が真である．これは正しいですか？

お答え： 正しくありません.

質問：「$x \in \emptyset$」はどうしても納得できないから，もう少し説明してもらいますか？

お答え： どの部分が納得できないのでしょうか.

質問： 選択関数は値域が $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ でなくても関数と呼ぶと思います.

お答え： このように "習慣による呼び名" は例外があるんですね.

質問： $f : A \to B$, $b \in B$, $f^{-1}(b) = \{a \in A | f(a) = b\}$ という表現をよく見るのですが，f の逆写像が存在するとき $f^{-1}(a)$ を集合か元か間違える可能性はないでしょうか.

お答え： ちゃんと書けばないです.

質問：「$\emptyset$」はギリシャ文字のファイですか？数学の 0 に否定がついて空集合と逆のイメージがついてしまいます.

お答え： ギリシア文字ではないようです．`http://jeff560.tripod.com/set.html`

質問： 任意の集合 X に対して 2^X がきちんと定まるのか.（つまりどのような元が入っているのか分かるのか．2^X は一意に定まるのか）

お答え： 決まります．一つの集合が X の部分集合であるかそうでないかは判定できますから.

質問： $\mapsto$ は TeX では`\mapsto`ですが日本語と英語で何とよむのか. **お答え：**"... を ... に移す写像" かな.

質問： 像のことを Imf とかいたりしないのか. **お答え：**書くことも (文脈も) あります.

質問： $[0, \infty)$ の) は何故] でないのでしょうか？ **お答え：**$\infty \notin \boldsymbol{R}$ だからです.

質問： $\boldsymbol{N} \notin \boldsymbol{R}$ ということは分かりましたが，$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}$ ということでいいのですか？ **お答え：**もちろん.

質問： 直和と直積って何か似てますけど，どんな関係にあるんですか？直積についての知識が少ないので，教えてほしいです.

お答え： 直和はどんな集合に対しても定義されるわけではありません．直積はどんな集合にも定義されます.

質問： $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ の例のときに使っていた $f(A \cap B) = \{0\} \subsetneq f(A) \cap f(B) = [0, 1]$ の $\subsetneq$ という記号が分かりません.

お答え： $X \subsetneq Y$ は $X \subset Y$ かつ $X \neq Y$ であることです.

質問：「「〜でない」を証明する時に，背理法が有効でない」と先生は言いましたが,「〜である」時を証明するときもまた有効ではあると思います．この発言の本質は,「何にでも，バカのひとつおぼえのように，背理法を使うな」ということなのでしょうか．他に真意があるのであれば，教えてください.

お答え： "背理法が有効である" ですね．真意はそのとおり．たいていの場合，背理法を使うべきところでは命題自体が "背理法を使え" とささやいています.

質問： $(A \cap B) \subset A$ より $f(A \cap B) \subset f(A)$．同様にして $f(A \cap B) \subset f(B)$．したがって $f(A \cap B) \subset f(A)$ かつ $f(A \cap B) \subset f(B)$．すなわち $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$．右辺の形からこの証明を考えました．要素はいっさい使ってませんが，これはこれで正しいですか？

お答え： いいえ．"$(A \cap B) \subset A$ より $f(A \cap B) \subset f(A)$" はどうしてですか?

質問： 授業中，集合の濃度としては $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ の方が $\boldsymbol{Q}$ より大きいとおっしゃっていましたが，どのように証明すればよいのですか？

お答え： それを今回やります.

質問： &, $\wedge$, and を一度に複数使うのはいいのでしょうか. **お答え：**書いたものではやめたほうがいいと思います.

質問： 写像の定義と関数の定義は同じなのでしょうか？

お答え： 同義. 値域が "数の集合" であるときに関数ということが多い.

質問： $\mathbb{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ に対して, $\{1\} \in \mathbb{P}(X)$, $\{\{1\}\} \subset \mathbb{P}(X)$ と書けますが, 一方 1 と $\mathbb{P}(X)$ については, どのような関係で呼ばれるのでしょうか.

お答え： 要素でもないし部分集合でもない.

質問： ($1 \in \boldsymbol{R}$, $\{1\} \notin \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{N} \notin \boldsymbol{R}$ とありました. 前回の質問の確認のようになってしまいますが, 集合は要素になり得ないという認識でよろしいのでしょうか.) 今回の講義では「集合の集合」というワードがでてきたので, 自分の認識は間違っていることは分かりました. ベキ集合の場合は, 集合も要素になりますね.

お答え： そうですね.

質問： 要素, 集合, 集合の集合 (ベキ集合) のようにレベルで分けるとよいとありましたが, 集合の部分集合は集合, 冪集合の部分集合は冪集合となるという認識でよいでしょうか.

お答え： 冪集合の部分集合は, "集合の集まり" です. 冪集合といったら "全部の部分集合を集めたもの" ですね.

質問： 写像に関する板書で, $f(A) = \{f(x) | x \in A\} = \{y | x \in A$ で $y = f(x)$ となるものがある $\} \subset Y$ とありました. 最後の「〜となるものがある」というのは, 何か意味があるのですか. 単に $\{y | x \in A, y = f(x)\}$ としてはいけないのですか.

お答え： y に関する条件なので "$y = f(x)$ となる x がある" というのが自然だと思います.

質問： よく最初不思議に思うことですが, $0.\dot{9} = 0.9999\cdots = 1$ というものがありますが, $0.\dot{9} \in \boldsymbol{N}$ といえるのでしょうか. **お答え：**そうです.

質問： $f : X \to Y$ について $x \in X$ に対して $f(x)$ が唯 1 つに定まっていることや定義域や値域が違うと写像が違うことに関してあまり強調されなかったがそれに関しては参考書などと同じでよいか. $f : X \to Y$ が写像 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X, \exists! y \in Y, y = f(x)$ ということだとしてよいか.

お答え： よいです.

質問： $A = \{x \in \boldsymbol{N} | x = 1$ または $1 \in A\}$ は集合であるかと前回質問しましたが $1 \in \boldsymbol{N}$ に対して $1 \in A$ となるから結局 $\forall x \in \boldsymbol{N}$ に対して $x = 1$ または $1 \in A$ が成り立つから $A = \boldsymbol{N}$ となるのではないかと思ったのですがこれはパラドクスがおきているのですか？

お答え： $2 \in A$ はどうやって示しますか?

質問： 包含写像 i_A の $A \ni x \mapsto x \in X$ の 2 つの x は同じものなのか. 要するに全体集合をより大きなものと取りかえているということなのか. **お答え：**そうです.

質問： $f(A) \subset f(B) \cap f(C)$ という式を表すとき, $f(A) \subset (f(B) \cap f(C))$ としなくてもいいのですか? $\begin{array}{c} f(A) \cap f(C) \\ \cap \\ f(B) \end{array}$ とは絶対に区別されるものなのか.

お答え： あまり後者の意味には読まないと思う. 文脈依存かつ文脈から明確にわかるはず.

質問： $X = \{x | x \in \boldsymbol{R}\}$ に対して $\mathfrak{P}(X)$ はどう表せますか? **お答え：**$\mathfrak{P}(X) = \{A \mid A \subset \boldsymbol{R}\}$.

質問： 逆像の説明がわかりにくかったです. $f^{-1}(U) = \{\forall x, x \in X \mid f(x) \in U\}$ ですか? $f^{-1}(U) = \{\exists x, x \in X \mid f(x) \in U\}$ ですか?

お答え： $\{x \in X \mid f(x) \in U\}$ です. ちなみに $\{\forall x, x \in \boldsymbol{R} \mid -1 < x < 1\}$ や $\{\exists x, x \in \boldsymbol{R} \mid -1 < x < 1\}$ はどういう集合ですか (すなわち, 山田はご質問の意味が理解できていないということです).

質問： 先週の講義で $f(x) \in \boldsymbol{R}$ の $\in$ は "element" だ! とおっしゃっていたような気がするのですが, 今週の $f \colon \boldsymbol{R} \ni X \mapsto f(x) \in \boldsymbol{R}$ の表記 ("$\ni$") は別にいいんでしたっけ?

お答え： 多少悪乗りっぽいきもしますが, いいようです.

質問： 4/12 の講義で B は A の subset であることを "$B \subset A$" と表す, としたのですが "$A \supset B$" という表記は認めないのですか. と思ったら先生は "$X \supset A, B$" と板書されたので大丈夫とします. **お答え：**してください.

質問： 有理数と無理数では無理数の方が多いと言ってましたが, $\frac{(\text{無理数の個数})}{(\text{有理数の個数})}$ は収束しますか? 発散しますか?

お答え： 何を動かして極限をとるのでしょう.

3 集合の濃度

■対等 2 つの集合 X, Y の間に全単射 $f\colon X \to Y$ が存在するとき，X と Y は**対等**であるという．

補題 3.1. 集合 X, Y, Z に対して

- X と X は対等である．
- X と Y が対等ならば Y と X は対等である．
- X と Y が対等，かつ Y と Z が対等なら X と Z は対等である．

例 3.2. 自然数全体集合 $\boldsymbol{N}$ は次のものと対等である：

- 自然数 m に対して m 以上の自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}_m = \{k \in \boldsymbol{N} \mid k \geqq m\}$．実際 $f(k) = k + m - 1$ とすると $f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}_m$ は全単射である．
- 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$．実際，$f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}$ を
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & (x \text{ は偶数}) \\ -\frac{x-1}{2} & (x \text{ は奇数}) \end{cases}$$
と定めればよい．
- 直積 $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$．
- 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$．

例 3.3. 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は次のものと対等である．

- 開区間 $(0, 1)$．実際，$f(x) = \frac{1}{2}\bigl(1 + x/(1 + |x|)\bigr)$ は全単射 $f\colon \boldsymbol{R} \to (0, 1)$ を与える．
- 閉区間 $(0, 1]$．実際，開区間 $(0, 1]$ との間の全単射 $f\colon (0, 1) \to (0, 1]$ を
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} & \bigl(x = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots\bigr) \\ x & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
と定めると，これは全単射である．

定義 3.4. 二つの集合 X, Y が対等であるとき，X と Y の**濃度は等しい**といい，$|X| = |Y|$ と書く．

■有限集合と無限集合

補題 3.5. 自然数 m, n に対して $\{1, \dots, m\}$ と $\{1, \dots, n\}$ が対等であるならば $m = n$ である．

証明： m に関する数学的帰納法による[*1]．全単射 $f\colon \{1\} \to \{1, \dots, n\}$ が存在するならば，f の像は要素を 1 つもつから $n = 1$ でなければならない．すなわち $m = 1$ の場合，補題は成立する．
一般に全単射 $f\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ が存在したとする．適当に順番を取り替えて $f(m) = n$ として一般性を失わない．すると $f|_{1,\dots,m-1}$ は $\{1, \dots, m-1\}$ から $\{1, \dots, n-1\}$ への全単射だが，数学的帰納法の仮定から $m - 1 = n - 1$ である．

2011 年 4 月 26 日 (2011 年 5 月 3 日訂正)

[*1] 講義資料の証明はたいてい “証明の概略” に留められている．各自，証明を完全にする工夫をすること．

定義 3.6. 集合 X が**有限集合**である，とは，ある自然数 m が存在して m 以下の自然数の集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ と X が対等となることである．このとき，X の濃度は m である，といい，$|X| = m$ と書く．

定義 3.7. 集合 X が有限集合でないとき**無限集合**という．

例 3.8. 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ は無限集合である．

補題 3.9. 集合 X の部分集合 Y が無限集合ならば X は無限集合である．

■濃度の比較

定義 3.10. 二つの集合 X，Y の間に単射 $f\colon X \to Y$ が存在するとき，Y の濃度は X の濃度より大きい，といって $|X| \leqq |Y|$ と書く．

定理 3.11 (Bernstein)**.** 二つの集合 X, Y が $|X| \leqq |Y|$, $|Y| \leqq |X|$ を満たすならば $|X| = |Y|$ である．

証明： 単射 $f\colon X \to Y$，$g\colon Y \to X$ が存在するとして，X から Y への全単射を構成すればよい．いま，X, Y の要素を交互に並べた (有限または無限) 列

$$x_0, y_1, x_2, \dots, \qquad \text{または} \qquad y_0, x_1, y_2, \dots$$

が適合的である，ということを

$$x_j = g(y_{j+1}), \qquad y_j = f(x_{j+1})$$

が成り立つことと定義する．この定義のもと，

$$\begin{aligned}
X_\infty &= \left\{ x \in X \;\middle|\; \text{適合的な無限列 } x_0, y_1, x_2, \dots \text{ で } x = x_0 \text{ となるものが存在する} \right\} \\
X_X &= \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{適合的な有限列 } x_0, y_1, x_2, \dots, x_m \text{ で } x = x_0 \\ \text{かつ } x_m \in X,\ x_m \notin g(Y) \text{ となるものが存在する} \end{array} \right\} \\
X_Y &= \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{適合的な有限列 } x_0, y_1, x_2, \dots, y_m \text{ で } x = x_0 \\ \text{かつ } y_m \in Y,\ y_m \notin f(X) \text{ となるものが存在する} \end{array} \right\} \\
Y_\infty &= \left\{ y \in Y \;\middle|\; \text{適合的な無限列 } y_0, x_1, y_2, \dots \text{ で } y = y_0 \text{ となるものが存在する} \right\} \\
Y_X &= \left\{ y \in Y \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{適合的な有限列 } y_0, x_1, y_2, \dots, x_m \text{ で } y = y_0 \\ \text{かつ } x_m \in X,\ x_m \notin g(Y) \text{ となるものが存在する} \end{array} \right\} \\
Y_Y &= \left\{ y \in Y \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{適合的な有限列 } y_0, x_1, y_2, \dots, y_m \text{ で } y = y_0 \\ \text{かつ } y_m \in Y,\ y_m \notin f(X) \text{ となるものが存在する} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

とおくと，X と Y は

$$X = X_\infty \cup X_X \cup X_Y, \qquad Y = Y_\infty \cup Y_X \cup Y_Y$$

と，共通部分をもたない合併集合に分解できる．さらに

$$f|_{X_\infty}\colon X_\infty \to Y_\infty, \qquad f|_{X_X}\colon X_X \to Y_X, \qquad g|_{Y_Y}\colon Y_Y \to X_Y$$

はそれぞれ全単射になる．そこで $F\colon X \to Y$ を

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in X_\infty \cup X_X) \\ g^{-1}(x) & (x \in X_Y) \end{cases}$$

とおけば F は全単射である．

とくに $|X| \leqq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ のとき，$|X| < |Y|$ と書くことにする．

例 3.12.

- 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$，区間 $(0, 1)$ と $(0, 1]$, $[0, 1]$ は互いに対等である．

- $(0,1)\times(0,1)$ と $(0,1)$ は互いに対等である．実際 $f\colon (0,1)\to(0,1)\times(0,1)$ を $f(x)=(x,0)$ とすればこれは単射．一方 $g:(0,1)\times(0,1)\to(0,1)$ を次のように定める：$x,\,y\in(0,1)$ に対してそれらの 10 進小数表示を $x=0.x_1x_2\dots$, $y=0.y_1y_2\dots$ とする．ただし $x_j,\,y_j$ は 0 から 9 までの整数で，小数表示は一通りに決まるような約束をしておくものとする．このとき $g\bigl((x,y)\bigr)=0.x_1y_1x_2y_2\dots$ とすると g は単射.

■冪集合の濃度

定理 3.13. 集合 X に対して $|X|<|\mathfrak{P}(X)|$.

証明： 単射 $f\colon X\ni x\mapsto\{x\}\in\mathfrak{P}(X)$ が存在するので $|X|\leqq|\mathfrak{P}(X)|$．したがって $|X|\neq|\mathfrak{P}(X)|$ であることを示せばよい．全単射 $g\colon X\to\mathfrak{P}(X)$ が存在したとして矛盾を導こう．いま $V=\{x\in X\,|\,x\notin g(x)\}\in\mathfrak{P}(X)$ とおく．g は全射だから $g(v)=V$ となる $v\in X$ が存在する．いま $v\in V$ とすると $v\notin g(v)=V$，また $v\notin V$ とすると $v\in g(v)=V$ であり矛盾が生じる．

以下，X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)=2^X$ の濃度を $2^{|X|}$ と書く．

■実数全体の集合の濃度

定理 3.14. $|\boldsymbol{R}|=2^{|\boldsymbol{N}|}$．とくに $|\boldsymbol{N}|<|\boldsymbol{R}|$.

証明： 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{N}$ と対等だから全単射 $\varphi\colon\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{N}$ が存在するが，これは全単射 $\tilde\varphi\colon\mathfrak{P}(\boldsymbol{Q})\to\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ を誘導する．一方，$\psi\colon\boldsymbol{R}\to\mathfrak{P}(\boldsymbol{Q})$ を

$$\psi(x)=\{r\in\boldsymbol{Q}\,|\,r<x\}$$

とすると ψ は単射．したがって，単射 $\tilde\varphi\circ\psi\colon\boldsymbol{R}\to\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ が存在する．
一方，$V\in\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ に対して $g(V)\in\boldsymbol{R}$ を

$$g(V)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{v_j}{3^j}\qquad v_j=\begin{cases}1 & (j\in V)\\ 0 & (j\notin V)\end{cases}$$

と定めると，これは単射.

問題

3-1 補題 3.1.

3-2 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ の要素を "一列に並べる" ことで $\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{N}$ が対等であること (例 3.2) を示しなさい.

3-3 閉区間 $[0,1]$ と開区間 $(0,1)$ は対等であることを示しなさい.

3-4 $\boldsymbol{R}$ 上で定義された連続関数全体の集合 $\mathcal{F}$ は $\boldsymbol{R}$ と対等であることを示しなさい. (ヒント：連続関数の性質から $f, g \in \mathcal{F}$ に対して $f = g$ であるための必要十分条件は $f|_{\boldsymbol{Q}} = g|_{\boldsymbol{Q}}$)

3-5 $X = \boldsymbol{N}$ から $Y = \boldsymbol{N}$ への単射 $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$ に対して, 定理 3.11 の証明の X_∞, X_X, $X_Y \ldots$ を具体的に求めなさい.

3-6 $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^2$ は対等である.

3-7 $|\boldsymbol{N}| < |\boldsymbol{R}|$ であることを, 次のようにして直接証明しなさい：

- $\boldsymbol{R}$ と $(0,1)$ は対等である.
- 全射 $f\colon \boldsymbol{N} \to (0,1)$ が存在すると仮定し, $y_j = f(j)$ とし, その十進小数表示を

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ y_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

  としておく. ただし, 小数展開は一意的になるような約束をしておく.
- $j = 1, 2, \ldots$ に対して $b_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ を $b_j \neq a_{jj}$ となるようにとる.
- 実数 $0.b_1b_2\ldots$ は y_1, y_2,... のいずれとも異なる.