2011 年 5 月 3 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一講義資料 4

お知らせ

- 休日のところ出席ご苦労さまです.
- ご存知かもしれませんが，付属図書館は移動のため 5 月 16 日から 7 月 3 日まで休館いたします．図書の貸出もできなくなりますので，必要な方はそのまえに長期貸出をご利用ください.

前回の補足

■対角線論法　講義資料 3 で与えた定理 3.13 ($|X| < |\mathfrak{P}(X)|$) の証明を “対角線論法” と呼びますがなぜ対角線論法というか，というご質問を複数いただきました.

集合 X と自分自身の直積 $X \times X$ の部分集合 $\Delta_X := \{(x,x) \,|\, x \in X\} \subset X \times X$ を**対角線集合**という[*1]. さて $g\colon X \to \mathfrak{P}(X)$ に対して $G := \{(x,y) \in X \times X \,|\, y \in g(x)\}$ とすると，証明の中の集合 V は

$$V = X \setminus \pi_1\bigl(G \cap \Delta_X\bigr) \qquad \text{ただし} \qquad \pi_1\colon X \times X \ni (x,y) \mapsto x \in X$$

と表される.

■実数の定義とデデキントの切断　デデキントの切断について複数のご質問がありました：有理数を既知として実数を定義する方法は何通りもありますが，そのうちのひとつが “デデキントの切断” です.

いま，有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ の部分集合の組 (A,B) $(A, B \subset \boldsymbol{Q})$ が $\boldsymbol{Q}$ の**切断**であるということを次の性質を満たすことだとしておきます：

- $A \cup B = \boldsymbol{Q}$, $A \cap B = \emptyset$, すなわち $B = \boldsymbol{Q} \setminus A$.
- 任意の $a \in A$, $b \in B$ に対して $a < b$.
- A は最大数をもたない: “任意の $a \in A$ に対して $a \leqq a_{\max}$” となる有理数 $a_{\max}$ は存在しない.

そのうえで, 次の集合 $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とよぶ，というのが “切断による実数の定義” です：

$$\boldsymbol{R} := \{A \subset \boldsymbol{Q} \,|\, (A, \boldsymbol{Q} \setminus A) \text{ は } \boldsymbol{Q} \text{ の切断 }\}.$$

単射 $\iota : \boldsymbol{Q} \ni r \mapsto \{s \in \boldsymbol{Q} \,|\, s < r\} \in \boldsymbol{R}$ による像を $\boldsymbol{Q}$ と同一視することにより，$\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ とみなせます．また，たとえば $\{s \in \boldsymbol{Q} \,|\, s < 0 \text{ または } s^2 < 2\} \in \boldsymbol{R}$ は $\sqrt{2}$ を表しています．いま $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対して $x < y$ ということを (これらを $\boldsymbol{Q}$ の部分集合とみなして) $x \subset y$ により定義すれば $\boldsymbol{R}$ には自然に大小関係が入ります．$\boldsymbol{Q}$ を $\iota(\boldsymbol{Q})$ と同一視して $\boldsymbol{R}$ の部分集合と思ったとき，$x \in \boldsymbol{R}$ に対して $A_x := \{r \in \boldsymbol{Q} \,|\, r < x\}$ と定めると A は x 自身 (x を定める切断) となっています．定理 3.14 の証明ででてきた $\psi\colon \boldsymbol{R} \to \mathfrak{P}(\boldsymbol{Q})$ はこれに対応する写像です.

[*1] この言葉の意味は $X = [0,1]$, $[0,1] \times [0,1] \subset \boldsymbol{R}^2$ の場合を考えれば明らかでしょう.

前回までの訂正

- 講義資料 3, 5 ページ 16 行目：(誤) 正しくありません (正) 正しいです
- 講義資料 3, 7 ページ 17 行目：(誤) 閉区間 $(0,1]$ (正) 区間 $(0,1]$
- 講義資料 3, 7 ページ 17 行目：(誤) 開区間 $(0,1]$ (正) 区間 $(0,1]$
- 講義資料 3, 8 ページ 1 行目：(誤) 集合 X (正) 空集合でない集合 X
- 講義資料 3, 8 ページ定義 3.6: 末尾に追加：空集合 $\emptyset$ は有限集合で，その濃度は 0 であると定める．
- 講義資料 3, 8 ページ 7 行目：
  (誤) Y の濃度は X の濃度より大きい，といって $|X| \leqq |Y|$ と書く．(正) $|X| \leqq |Y|$ と書く．
- 講義資料 3, 8 ページ下から 4 行目：(誤) g^{-1} (正) $g|_{Y_Y}^{-1}$
- 講義資料 3, 9 ページ 8 行目 (証明の最初の行)：(誤) $|X| < |\mathfrak{P}(X)|$ (正) $|X| \leqq |\mathfrak{P}(X)|$

授業に関する御意見

- だんだん難しくなってきました．予想はしていましたが．．．．　**山田のコメント：** よかった．易しすぎては失礼ですよね．
- 毎回質問ができてかつ返事が返ってくるので，とても授業がわかりやすいです．　**山田のコメント：** 活用してください．
- ヒルベルトのホテルの論法は以前も聞いたことがあるのですが，以前講義を受けていた教授よりもなぜか面白く聞くことができました．全体的な話の面白さに起因するものでしょうか？ (笑)　**山田のコメント：** 知りません．
- 他のみんなの質問がとても興味深く，おもしろいです．　**山田のコメント：** なので，積極的なネタ提供希望．
- 他人の質問を読むのがこんなにも刺激的とは新しい発見です．　**山田のコメント：** ですよね．今後ともネタ提供よろしく．
- 訂正のところに $\Rightarrow$ という記号を使わないで下さい．　**山田のコメント：** そうですね．今回から変えてみましょう．
- 自分の好きな内容について勉強できるので楽しいです．　**山田のコメント：** そう？ 嫌いにならないとよいですね．
- 僕はガンダムに詳しくはないのですが，不意打ちは良くないと思います！ (笑)　**山田のコメント：** 山田も詳しくありません．
- 僕は G ガンダムが好きです (笑)　**山田のコメント：** 承りました．
- どのガンダムシリーズが好きなのか気になります．　**山田のコメント：** 気にしないでください．
- 面白かったです．　**山田のコメント：** そう？
- 無限ホテルに泊まりたいです．　**山田のコメント：** 無理だと思います．
- なんでこの紙のコピーをとる必要があるんですか．．．　**山田のコメント：** 山田がなくしてしまったときの保険．一般に提出物はコピーをとっておくのが普通だと思う．
- この講義の資料の質問と回答の部分の作成にはどれくらい時間がかかっているのでしょうか？　**山田のコメント：** 2 時間くらい (＋ TA のお仕事．Thanks >本田さん)．
- 今回の講義は話題にしている内容があっちこっちに飛ぶように感じられ非常に理解しにくかったです．　**山田のコメント：** あとで思うとあまり飛んでいなかったりしません？
- 次からは，授業に遅れたら立って授業を受けようと決めました．　**山田のコメント：** じゃまにならないようにね．
- 集合論が専門の方って発狂しないんですか？　**山田のコメント：** 知りません．少なくとも，普通の数学者でもこの程度は日常会話です．
- ヒルベルトのホテルの話がわかりやすくて面白かったです．　**山田のコメント：** わかりやすいひととわかりにくいひとがいるんですよ．
- 濃度のところはしっかりやりたいので特に頑張ります．だいぶ写像に関しての証明になれてきました．もう少しつめていきたいです．講義の最初の方はわかりやすかったです．　**山田のコメント：** あとの方もそれほど分かりにくい話題ではないと思いますよ．

質問と回答

質問： 補題 3.9. の証明で，X を有限集合と仮定してすすめていくと，$|Y| \leqq m$ (m は自然数) ということがいえました．このことは Y が無限集合であることに反するといってもよいのですか？

お答え： Y から $\{1,\ldots,m\}$ への単射があることから，うまく n を選んで Y から $\{1,\ldots,n\}$ への全単射が作れますか?

質問： 単射の時の Rem の話で $f^{-1}(\{y\})$ というふうに，$f^{-1}(y)$ ではなく $\{y\}$ の逆像を考えたのは，$f^{-1}(\{y\})$ の要素が 2 つ以上になった時に $f^{-1}(y)$ では不便だからですか？　**お答え：**不便だからでなく，$f^{-1}(y)$ が定義できない．

質問： 無限ホテルの話で，部屋が満室であると言っていたのですが，無限に部屋があるのに満室になるということはあるのでしょうか．　**お答え：**例え話なのでそういうことにする．それがいやなら忘れてください．たかが例え話．

質問： リンゴを順番に数えるときと同じ数え方をしたときに，整数と奇数の個数はどちらが多いのかという問いに対する答えは，「(両者は対等だから) 等しい」で合ってますか？

お答え： “個数” という言葉が曖昧です．我々の今回の文脈で，“個数” を “濃度” と読み替えれば等しいですね．

質問： 講義資料の $(0,1) \times (0,1)$ と $(0,1)$ が対等であることの証明の中の小数点表示が一通りに決まるような約束というのは，有限小数の表し方を $0.1000\ldots$ のようにするか，$0.0999\ldots$ のようにするか決まるだけでよいのでしょうか．　**お答え：**そうです．

質問： どうして $|\boldsymbol{R}| = 2^{|\boldsymbol{N}|}$ となるのですか．$f : \boldsymbol{R} \to \mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ が全単射となる f が存在するのですか．

お答え： そうです．定理 3.14 の証明は読みましたか．その中で，定理 3.11 を使っています．

質問： $\boldsymbol{R}^2 \sim \boldsymbol{R}$ がなりたつというのは奇妙な気がしますが，これは (このようなことが成り立つのは) 任意の (制限のない) 写像を考えたからなのでしょうか？ (たとえば線形代数では，写像として線形写像を扱いますが $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ となる全単射の線形写像は存在しないと思います．また古典的な物理では写像として微分可能関数 (や連続関数) を扱いますが，この場合も $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ となる全単射の微分可能関数 (や連続関数) は存在しないと思います)

お答え： おっしゃるとおりで，集合 (ほとんど構造をもたない) の要素の個数の比較には，このような方法くらいしか考

えつかないわけですが，線形空間や可微分多様体など，さまざまな構造をもつ集合 (“空間” という言葉の意味に関連して講義でもちょっと触れましたね) を考える場合は，その構造を保つ写像を考えることによってより精度の高い比較ができることになります．

質問： 講義の中で，逆写像を用いた対等 (全単射) の定義が示されていましたが，これは数学の各文脈 (状況) における “対等” を定義するためのものなのでしょうか？ (たとえば線形代数 (の文脈) において (線形写像 $f: X \to Y$ により $X \sim Y$) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(\exists g: Y \to X)[(g: \text{線形写像}) \wedge g \circ f = \mathrm{id}_X \wedge f \circ g = \mathrm{id}_Y]$ としようということなのでしょうか).

お答え： ご質問の意味がわからないのですが，講義では “対等” を “集合の比較” の方法として定めました．それだけ．

質問： $f: X \to Y$: bijection $\Rightarrow \forall y \in Y, \exists! x \in X, f(x) = y$, 逆もなりたつのでは？ **お答え：**なりたちます．

質問： 無限個の部屋に番号がつけられるのか． **お答え：**番号が付けられているとする，と述べたはず．ただの例え話．

質問： 可算集合の無限部分集合は可算集合か．

お答え： はい．可算集合を $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ のように番号付けすると，その部分集合も順番に並べることができますね．

質問： $|\emptyset|$ は何か．0 と定めるのか．

質問： 空集合は有限集合との間に全単射がありませんが，無限集合となってしまうのですか．

お答え： 説明し忘れました． $|\emptyset| = 0$ と定めましょう．

質問： $[0, \infty]$ と $[0, \infty)$ の違いは何ですか？ **お答え：**$[0, \infty) \subset \boldsymbol{R}$ ですが，$[0, \infty]$ は $\boldsymbol{R}$ の部分集合ではありません．

質問： $\mathrm{id}_X: X \to X$ と $\mathrm{id}_X(x) = x$ に関してこの 2 つは同値なんでしょうか？同値じゃないように見えたので質問させていただきました．$X \to X$ だと $x_1 \neq x_2$ $(x_1 \in X, x_2 \in X)$ で $\mathrm{id}_X(x_1) = x_2$ でもいい気がするのですが.

お答え： 写像の定義域と値域を特定する記法 $f\colon X \to Y$ と具体的な対応関係を表す記法 $f\colon X \ni x \mapsto f(x) = \cdots \in Y$ の違いは理解できていますか? (講義でも 1–2 回触れましたが).

質問： 全射を上への写像ともよぶ理由は何ですか？なぜ ‘上への’ 写像なんですか.

お答え： $f\colon X \to Y$ の像 $f(X)$ が Y 全体，すなわち $f(X)$ が Y の “上” を覆っているという意味です．

質問： 集合 X, Y に対して，$X \to Y$ の全射が存在すると，$\mathrm{card}(X) \geqq \mathrm{card}(Y)$ と言えますか．

質問： X, Y を集合とする．全射 $f: Y \to X$ が存在することと $|X| \leqq |Y|$ は同値ですか？

質問： 単射 $f: X \to Y$ が存在するとき $|X| \leqq |Y|$ ですが，全射 $g: X \to Y$ が存在するとき $|X| \geqq |Y|$ があっても良い気がするのですがなぜないのですか？

お答え： 今回の講義で扱います．証明には選択公理が用いられます．

質問： 単射，全単射以外に無限集合の濃度を比較する方法はありますか． **お答え：**全射も使えます．今回やります．

質問： 全射 $f: X \to Y$ が存在すれば $|Y| \leqq |X|$ ですか？ $\forall x_1, x_2 \in X$ に対し，$x_1 \sim x_2 \overset{\text{def}}{\iff} f(x_1) = f(x_2)$ と同値関係 $\sim$ を定義すると ($\sim$ が同値関係となることは略) $|X/\sim| = |f(X)| = |Y|$ が成り立つ ($\because$ 集合論的準同型定理 (「集合と位相」(内田伏一) p34 など)). $X/\sim$ の完全代表系 $P \subset X$ を (選択公理とかで) とれば $|X| \geqq |P| = |X/\sim| = |Y| \Rightarrow |Y| \leqq |X|$ という証明を今思いついたのですが正しいですか？

お答え： 大丈夫そうですが，もう少しシンプルな証明を今回紹介します．いずれにせよ選択公理が必要です．

質問： 写像 $f: A \to A$ が単射であるなら，全射であると言ってよいか． **お答え：**いいえ．

質問： 演習などで単射性を示すのは容易に感じるが全射性を示すことが難しく感じる．自明であると簡単に言ってしまうのは良くないですよね． **お答え：**もちろんよくありません．

質問： 講義資料で $\boldsymbol{R} \sim [0, 1)$ (例えば) となっていますが $\boldsymbol{R} \sim [0, 1)$ ということは $\forall x, \forall y \in \boldsymbol{R}$ に対して $[x, y) \sim \boldsymbol{R}$ が成立するということですか？ **お答え：**$x < y$ ならそうです.

質問： $|\boldsymbol{C}|$ は $|\boldsymbol{R}^2|$ と同じように計算して $|\boldsymbol{R}| = |\boldsymbol{C}|$ と出すのでしょうか？

お答え： $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{R}^2|$ であることが簡単に示せるのでは (直接全単射が構成できますよね).

質問： $f(x) = x^2$ のとき $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は全射でも単射でもない，$f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ は全単射ということは写像は定義域と値域によって全射だったり, 単射だったり, そうでなかったりするのでしょうか.

お答え： 講義で述べたように, そうです.

質問： 平方数は一見少ないように感じますが，平方数の集合を $\mathcal{S}$ として $f: \boldsymbol{N} \ni x \mapsto f(x) \in \mathcal{S}$ 全単射として f が $f(x) = x^2$ がとれるので $|\boldsymbol{N}| = |\mathcal{S}|$ となり，濃度が等しいんですね．このギロンは正しいですか？

質問： $X := \{x \in (0, 1] \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \boldsymbol{N}\}$ という集合は $f: \boldsymbol{N} \to X$, $f(n) = \frac{1}{n}$ という写像を考えると，f は全単射なので $|X| = |\boldsymbol{N}|$ となるのでしょうか？

お答え： 二つとも正しいです．すでに番号付けられているからほとんど明らかですね．

質問： 2 つの無限集合 A, B を考えるとき，単射 $f : A \to B$ と単射 $g : B \to A$ が見つかれば，$A \sim B$ となります．また，$A \sim B$ であれば，A と B の間に全単射が存在するので「単射 $f : A \to B$ と単射 $g : B \to A$ が存在する $\iff$ 全単射 $h : A \to B$ が存在する」ということでいいのでしょうか． **お答え：**そうです．定理 3.11.

質問： $f^{-1}(\{y\}) = \underline{\{x \in X \mid f(x) \in \{y\}\}} = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ この下線部分は明記する必要があるのか．個人的には省略してしまいそうなところだったので.

お答え： 不要といえば不要．$\{y\}$ が複数の要素をもつ集合なら，下線のように書かなければなりませんね.

質問： 写像の始域と終域に関して $f : x \mapsto x^2$ は $\boldsymbol{R} \to [0, 1]$ の写像とはならないことになりますか．($x = 2$ に対応する $[0, 1]$ の元が存在しない). **お答え：**なりません.

質問： 上への写像とはどのような意味なのですか？ **お答え：**全射

質問： 単射に関して，$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ひとつの要素} \end{cases}$ としていましたが，$f(\emptyset) = \{y\}$ というように，空集合と $\{y\}$ が f の写像になるのですか？ **お答え：**“f の写像” とはなんでしょうか.

質問： 授業で，$\boldsymbol{Q}$ を (正確には $\boldsymbol{Q}_+$ を) 可算集合だというとき，重複した時 (例えば 1/1 と 2/2) に「忘れればいい」と言いましたが，アバウトな説明とは言え，腑に落ちませんでした．だからと言って，重複した部分も可算であることを言うには，それはそれでめんどくさい気がします.

お答え： たしかに面倒くさいですね．この数え方では $\boldsymbol{Q}_+ \subset \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ と思えるから, 可算ではありますね.

質問： 講義資料 3，p5 の下から 2 つ目の質問の解答で，「“$(A \cap B) \subset A$ より $f(A \cap B)$” はどうしてですか？」とありますが，これは f がどのような写像であるか，定義されていないからでしょうか？例えば $f : X \to Y$, $A, B \subset X$ とすれば「$(A \cap B) \subset A$ より $f(A \cap B) \subset f(A)$」といえるのでしょうか？

お答え： “要素の関係を何も使っていない” というご意見だったのでそれではこの部分はどう? という質問でした．$A \subset B$ ならば $f(A) \subset f(B)$ の証明は? ってなこと.

質問： 講義資料 3 の 5 ページ 15–16 行目「$\forall x, x \notin \boldsymbol{x} \Rightarrow x \notin \emptyset$ なので $\forall x, x \in \emptyset \Rightarrow x \in \boldsymbol{x}$ である」が正しくないと書かれていますが，これはなぜですか？ $x \in \emptyset$ は常に偽なので，真理表を見る限りでは少なくとも後半の主張は正しいように思えます.

質問： 「質問と解答」より，質問：$x \notin \boldsymbol{x} \Rightarrow x \notin \emptyset$ が真であるから，$x \in \emptyset \Rightarrow x \in \boldsymbol{x}$ が真である．これは正しいですか？お答え：正しくありません．とありましたが，なぜですか？対偶をとっているため正しいと思います.

お答え： おっしゃるとおりですね．修正します．申し訳ありません.

質問： $\{|x| \mid x \text{ は集合}\}$ は集合ですか？もし集合ならば，その濃度は $|\boldsymbol{N}|$ や $|\boldsymbol{R}|$ と比べ，大きいですか？

お答え： “集合全体の集合” は考えません．いま Ω をご質問の集合，$\Omega' = \{x \in \Omega \mid x \notin x\}$ と定めます．いま $\Omega' \in \Omega'$ とすると条件より $\Omega' \notin \Omega'$ となります．また $\Omega' \notin \Omega'$ とすると条件より $\Omega' \in \Omega'$ になり，矛盾です．これは Ω' (Ω) を “集合” と考えたことによるので，こういうものは考えない，ということにしたいのです．この講義は集合の定義をきちんとしない，という “素朴集合論” の立場に立ちますが，このような “パラドクスがおきるような状況を除外する” ために公理的集合論が構築されました.

質問： 逆写像と逆像について，確認したいのは，プリントの問題です．$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$. 左辺は逆像で，右辺は逆写像である．つまり,「逆像は集合で，逆写像は写像だ」と言えますか． **お答え：**そうです.

質問： $|\boldsymbol{N}| < |\boldsymbol{R}| < |\mathfrak{P}(\boldsymbol{R})| < |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\boldsymbol{R}))| < \ldots$ となるようですが,「無限集合の濃度」全体の集合は可算集合となるのでしょうか． **お答え：**それはわからない (なんとも言えない) のです．連続体仮説と関連しています.

質問： $A = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x = 1 \text{ または } 1 \in A\}$, $P(x) \equiv$ “$x = 1$ または $1 \in A$” とおく．$P(1) \equiv$ “$1 = 1$ または $1 \in A$” $P(1)$ は真より $1 \in A$. $P(2) \equiv$ “$2 = 1$ または $1 \in A$” $1 \in A$ は真だから $P(2)$ も真で $2 \in A$ ではないのですか？

お答え： 集合 A が確定するまえに A をつかっていいものか，というのが微妙ですね.

質問： 濃度の定義は「X と Y とが対等であるとき X と Y の濃度は等しい」(定義 3.4) 「単射 $f : X \to Y$ が存在するとき，Y の濃度は X の濃度より大きい」(定義 3.7)．定義 3.6，定義 3.7 にも濃度の定義があります．どちらかを認めれば，どちらかを導けないのでしょうか.

お答え： 定義 3.4, 3.7 は濃度の関係，定義 3.6 では具体的な集合の濃度を定義しています．互いに独立です.

質問： 定理 3.11 の証明の適合的というのがまだ理解できていませんが，X, Y の要素を交互に並べるということは，X と Y は可算集合ということになりませんか． **お答え：**X, Y の要素を “全て並べる” などとは言っていません.

質問： $\boldsymbol{N}$ の濃度と $2^{\boldsymbol{N}}$ の濃度の中間の濃度は存在しない．と授業の最後におっしゃいましたが (証明できないという話をどこかの本で読みました)．同様に，$\boldsymbol{R}$ の濃度と $2^{\boldsymbol{R}}$ の濃度の中間の濃度は存在しないのでしょうか.

お答え： 存在しない，とはいっていないはずです．“$|\boldsymbol{N}|$ と $2^{|\boldsymbol{N}|}$ の中間の濃度が存在する” という命題は通常の集合

論の公理系と独立だということがわかっています (連続体仮説).

質問： X, Y: 集合とするとき，$|X|=|Y| \Rightarrow 2^{|X|}=2^{|Y|}$ は証明なしに用いてよいのでしょうか.

お答え： 簡単に証明できるので自分で証明をつけておくべきです．そのうえで "当たり前" とおもって使ってください.

質問： "濃度" の単語から，"要素/体積" のような印象を受けるのですが，どうして集合 X の要素の個数を濃度というのでしょうか. **お答え：**残念ながら知りません．Cardinal number に対応して "基数" という語もあるようです.

質問： $\boldsymbol{R}=2^{|\boldsymbol{N}|}$ である理由がまだよく理解できていません， **お答え：**定理 3.14 の証明は読みましたか?

質問： 定理 3.11 で $|X| \leqq |Y|$ かつ $|Y| \leqq |X|$ ならば $|X|=|Y|$ である，とありますが，$|X| \leqq |Y|$ かつ $|Y| \leqq |X|$ とは例えば X と Y がどのような集合のときですか．例 3.12 では少し分かりにくかったです.

お答え： 自明な例として X と Y が同じ集合．恒等写像が単射になる.

質問： $|X| \leqq |\mathfrak{P}(X)|=2^{|X|}$ という式なのですが，$|\mathfrak{P}(X)|=2^{|X|}$ とかくと $|X| \leqq |\mathfrak{P}(X)|$ をあらわすのでしょうか. $=$(イコール) でつながれているので，どこまでがひとくくりなのか分かりません.

お答え： 講義資料 9 ページ，定理 3.13 あたりです.

質問： $|\boldsymbol{N}|=|\boldsymbol{Z}|=|\boldsymbol{Q}|$ について，"濃度が等しい" とは数直線上での「密度」のようなものでしょうか．数値の密度であれば $|\boldsymbol{N}|=|\boldsymbol{Z}|$ は納得できるのですが，$|\boldsymbol{Z}|=|\boldsymbol{Q}|$ が理解し難いです.

お答え： "濃度が等しい" ということの定義を読んでおられないようですね．定義通りにたしかめることができる，という意味で等しいのです．定義を知らなければ理解できないのは当たり前.

質問： ある 2 つの集合間において，各要素を 1 対 1 対応させることができる (全単射) から，その 2 つの集合の間の濃度が等しいというのはたしかに納得できますが，例えば，要素の分布の仕方が一様 (言いにくいですが，$\boldsymbol{N}$ や $\boldsymbol{Q}$ のこと) な集合なら任意の区間をとったときのその区間の要素の個数の比較といった方が「感覚的」に濃度を定義しやすいと思います．これだと $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{Q}$ になりますけど....

お答え： "分布の仕方" というのは "集合の要素であるか要素でないかが判別できる" という構造だけからは述べることはできません．さらに集合に "構造" をいれて，順序集合，線形空間や位相空間や，そいういうものを考えれば，区別されるものです．感覚的である必要はありません.

質問： $\boldsymbol{N}$ と $\boldsymbol{N} \setminus \{1\}$ は集合の濃度は同じですよね？ ($f: \boldsymbol{N} \ni x \mapsto x+1 \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$ という全単射の写像 f が存在するので．) つまり $|\boldsymbol{N}|=|\boldsymbol{N} \setminus \{1\}|$ が成立します．しかし $\boldsymbol{N} \setminus \{\boldsymbol{N} \setminus \{1\}\}=\{1\}$ となり要素が 1 つ存在します．明らかに $\boldsymbol{N}$ の方が要素の数が多いと思うのですが，この議論はどこがおかしいのでしょうか？それとも「濃度が同じ集合でも要素の数が違う」ということが起こり得ていいのでしょうか？

お答え： 我々の立場は "要素の個数" は "濃度"，"要素の個数の大小" は "濃度の大小"．したがって，ご質問のようなことはなにもおかしくありません．どうも，ご質問では "濃度の大小" と "要素の個数の大小" は別のもの，と思っていらっしゃるようです．それでは質問です：無限集合の要素の個数の大小はどのように定義するのですか?

質問： 先生は $\forall$ ガンダムが好きなのですか？ **お答え：**いいえ.

質問： なぜ $|\boldsymbol{R}|=|(0,1)|$ となるのでしょうか？考えたのですが，分かりません. **お答え：**講義資料 3，例 3.3.

質問： シラバスに参考書が 3 つ載っていましたが，どの参考書が分かりやすく書かれていますか？

お答え： 実際に手にとって眺めてください.

質問： $f\colon \boldsymbol{N} \ni x \mapsto f(x) \in \boldsymbol{Z}$ の f が $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & (x \text{ が偶数}) \\ -\frac{x-1}{2} & (x \text{ が奇数}) \end{cases}$ となっていますが，全単射になっていれば $f(x)$ が x の値によって変化してもいいのでしょうか.

お答え： $f(x)$ が x の値によって変化しないと定値写像になります．定義域の要素が 2 つ以上なら単射になりません.

質問： $g\colon Y \to X$ $g(x)=\frac{x}{2}$ のように $Y \to X$ の写像でも $g(y)=\frac{y}{2}$ ではなく $g(x)=\frac{x}{2}$ と書くのですか?

お答え： 独立変数の名前のつけ方はとくにルールがあるわけではありません．たとえば有理数は必ず q と書かなければならないわけではありません．この状況では $g(s)=\frac{s}{2}$ と書いても大丈夫です．g の定義域が X である，と明示されているので $s \in X$ でなければならないとわかるからです.

質問： $g(x) \in f(X)$ とありますが，$g(x)$ は集合なのですか? **お答え：**どういう状況で?

質問： $(0,1) \times (0,1)$ と $(0,1)$ が対等であることを示す際，講義では $|I| \leqq |I^2|$ かつ $|I^2| \leqq |I|$ を示しましたが，演習では $I^2 \to I$ の全単射をつくっていました．どちらがよいのでしょうか．また，全単射の作り方について少し説明してもらいたいです．(内田さんの本の p. 31 のものだと思います).

お答え： "どちらがよいか" は "どちらが好きか" ですね．お好きな方を．実際には "きちんと全単射をつくる" のはかなり気配りが必要です．この場合も難しかったでしょ.

4 直積・選択公理・可算集合

■集合族 適当な集合の集まり (集合) $\mathfrak{X}$ と集合 Λ に対して，写像

$$\Lambda \ni \lambda \longmapsto U_\lambda \in \mathfrak{X}$$

を Λ **により添字付けられた集合族**, Λ をその**添字集合**という.

この集合族のことを $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ と書くこともある.

例 4.1.
- 有限集合 $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ によって添字付けられた集合族とは n 個の集合 A_1, A_2, ..., A_n の集まりのことである.
- 集合 $\Lambda = \boldsymbol{N} = \{1, 2, \dots\}$ により添字付けられた集合族とは，集合の (無限) 列 $\{A_1, A_2, \dots\}$ のことである.
- $\Lambda = \boldsymbol{R}$ として，実数 $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して $U_\lambda = \{x \in \boldsymbol{Q} \,|\, x < \lambda\}$ とすると $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \boldsymbol{R}\}$ は $\boldsymbol{R}$ の部分集合からなる集合族である．この集合族は，写像 $\boldsymbol{R} \to \mathfrak{P}(\boldsymbol{R})$ とみなすことができる.

次の演算を定義しておこう：

定義 4.2. 集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ に対して

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda := \{x \,|\, x \in U_\lambda \text{ となる } \lambda \in \Lambda \text{ が存在 する }\}, \qquad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda := \{x \,|\, \text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in U_\lambda\}$$

と定める．とくに，添字集合が $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \dots\}$ のとき, 集合族 $\{U_1, U_2, \dots\}$ に対してこれらを

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

と書く.

例 4.3.
- 自然数 n に対して $U_n = (-n, n) \subset \boldsymbol{R}$ とする．このとき $\cup_{n=1}^{\infty} U_n = \boldsymbol{R}$ である.
- 自然数 n に対して $V_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subset \boldsymbol{R}$ とする．このとき $\cap_{n=1}^{\infty} V_n = \{0\}$ である.
- 自然数 n に対して $W_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset \boldsymbol{R}$ とする．このとき $\cap_{n=1}^{\infty} W_n = \{0\}$ である.

■直積 すでに 2 個の集合 X, Y の直積の定義は与えた：

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

この概念を無限個の集合 (集合族) に拡張しよう.

定義 4.4. 集合 Λ によって添字付けられた集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ に対して, 写像の集合

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda := \left\{ \varphi \colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \,\middle|\, \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して} \varphi(\lambda) \in U_\lambda \right\}$$

を $\{U_\lambda\}$ の**直積**という.

2011 年 5 月 3 日

例 4.5. 有限集合 $\Lambda = \{1, 2\}$ で添字付けられた集合族 $\{U_1, U_2\}$ に対して

$$V := \prod_{\lambda \in \{1,2\}} U_\lambda \left(= U_1 \times U_2 \right)$$

の各要素 $\varphi \in V$ は $\{1, 2\}$ から $U_1 \cup U_2$ への写像で $\varphi(1) \in U_1$, $\varphi(2) \in U_2$ となるものである．U_1 の要素 u_1 と U_2 の要素 u_2 を与えれば，そのような写像 φ はただ一つ定まるので，V は組み (u_1, u_2) $(u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2)$ 全体の集合と同一視される (問題 4-2 参照).

定義 4.6. 集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の直積から各 U_μ $(\mu \in \Lambda)$ への写像

$$\pi_\mu \colon \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \ni \varphi \longmapsto \varphi(\mu) \in U_\mu$$

を**射影** projection という．

■選択公理

公理 4.7 (選択公理)**.** すべての U_λ が空集合でないような集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，直積 $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は空集合でない．

このことは，“(一般に有限個とは限らない) 集合族のすべての集合から一度に一つずつ要素を取り出すことができる”ということを述べている．

命題 4.8. 空でない集合からなる集合族 $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対して，定義 4.6 の射影 $\pi_\mu \colon \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) \to U_\mu$ は全射である．

証明： 選択公理より $\varphi \in \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が存在する．各 $y \in U_\mu$ に対して

$$\varphi_y \colon \Lambda \ni \lambda \longmapsto \varphi_y(\lambda) = \begin{cases} \varphi(\lambda) & (\lambda \neq \mu) \\ y & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

とすると $\varphi_y \in \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ で $\pi_\mu(\varphi_y) = \varphi_y(\mu) = y$ となる．

定理 4.9. 集合 X, Y に対して全射 $f \colon X \to Y$ が存在するならば，写像 $g \colon Y \to X$ で $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となるものが存在する．

証明： 各 $y \in Y$ に対して $U_y = f^{-1}(\{y\})$ とおくと，f が全射であることから $U_y \neq \emptyset$. 従って, 選択公理より $\prod_{y \in Y} U_y$ は空集合でないで，その要素 g をとる．直積の定義から g は Y から $\cup_{y \in Y} U_y$ への写像であるが，

$$\cup_{y \in Y} U_y = \cup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}\left(\cup_{y \in Y} \{y\}\right) = f^{-1}(Y) = X$$

なので $g \colon Y \to X$ が得られたことになる．直積の定義から，任意の $y \in Y$ に対して $g(y) \in U_y = f^{-1}(\{y\})$ だから $f \circ g(y) = y$ となり結論が得られた．

系 4.10. 集合 X から Y への全射 f が存在するならば，単射 $g \colon Y \to X$ が存在する．とくに $|Y| \leqq |X|$ である．

定理 4.11. 空でない集合 X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ から空集合をのぞいたものを $\mathfrak{X}$ とする：$\mathfrak{X} = \mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. このとき，写像 $f \colon \mathfrak{X} \to X$ で，各 $U \in \mathfrak{X}$ に対して $f(U) \in U$ となるものが存在する．

証明. 集合族 $\{U \mid U \in \mathfrak{X}\}$ は空集合を要素にもたないので，選択公理からそれらの直積は空でない．そこで $f \in \prod_{U\in\mathfrak{X}} U$ をとると，f は写像

$$f\colon \mathfrak{X} \longrightarrow \bigcup_{U\in\mathfrak{X}} U = X$$

で $f(U) \in U$ となるものである． □

系 4.12. 無限集合 X に対して，単射 $g\colon \boldsymbol{N} \to X$ が存在する．

証明. 集合 X に対して, 定理 4.11 のような写像 $f\colon \mathfrak{P}(X)\setminus\{\emptyset\} \to X$ をとる．いま $X \neq \emptyset$ だから $a_1 = f(X)$, $a_{j+1} = f(X \setminus \{a_1, \dots, a_j\})$ $(j = 2, 3, \dots)$ により，帰納的に $\{a_j\}$ を定める．$n \in \boldsymbol{N}$ に対して $g(n) = a_n$ とすれば g は単射である． □

■**可算集合**　系 4.12 より $\boldsymbol{N}$ の濃度は無限集合の最小の濃度であることがわかる．そこで $|\boldsymbol{N}|$ のことを**可算濃度**とよび，$\boldsymbol{N}$ と対等な集合を**可算無限集合**または**可算集合**，有限集合か可算無限集合であるような集合を**たかだか可算**という．

可算濃度を $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$ を $\aleph$ (ヘブライ文字のアレフ) と書くことがある．

問題

4-1 例 4.3 を確かめなさい．

4-2 有限個の集合族 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ に対して

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in A_j (j = 1, \dots, n)\}$$

と直積集合

$$W := \prod_{j=1}^{n} A_j = \left\{ \varphi\colon \{1, \dots, n\} \to \bigcup_{j=1}^{n} A_j \;\middle|\; \varphi(j) \in A_j (j = 1, \dots, n) \right\}$$

の間の写像

$$\iota\colon W \ni \varphi \longmapsto \bigl(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\bigr) \in V$$

は全単射である．

4-3 系 4.12 の証明で構成した g が単射であることを確かめなさい．