2011 年 5 月 10 日 (2011 年 5 月 28 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

# 集合と位相第一講義資料 5

## お知らせ

- 講義日程 (内容) を少々改訂しました．Web ページを参照してください．
- 5 月 16 日より 7 月 3 日までの間，附属図書館は閉館となります．ご注意ください．なお，長期貸出を受け付けているようです．
- 提出物は規定の用紙，あるいはそれと同じサイズ・書式でお願いします．理由は：(1) 一枚だけ違うところに学籍番号・名前があると処理に手間がかかる (2) サイズが違うとまとめてドキュメント・スキャナにくべられない．
- 複数の質問を書いていただいてもなるべく対応するつもりですが，評価は最初の項目に対してのみ行ないます．

## 前回の補足

**■集合族の記号について**　講義資料で集合族を $\{U_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ と書いていますが，これは "集合の集合" と思うとちょっと違います．ここからしばらくたとえ話：高等学校で学んだ数列を考えましょう．数列 $\{a_n\}$ と書くことが多いですが，これは集合 $\{a_1,a_2,\dots\}$ とは少し意味合いが違います．たとえば，全ての項が 1 である数列 $\{1,1,\dots\}$ を集合の記号だと思ってみると $\{1\}$ というただひとつの要素をもつ集合になってしまいます．あるいは $\{1,1,2,2,2,\dots\}$ という数列と $\{1,1,1,1,2,2,\dots\}$ という数列は，集合とみなすと同じになってしまいます．しかしこれらの数列は異なるものですから区別しなければなりません．たとえ話終わり．二つの集合からなる集合族 $\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}\}$ は，ひとつの集合からなる集合族 $\{\boldsymbol{R}\}$ と違う，というように解釈します．前者の直積は $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2$，後者の直積は $\boldsymbol{R}$ となり，違うものになります．そのために添字をつけて，前者を $\{U_1,U_2\}$, $U_1=U_2=\boldsymbol{R}$ と書いている，というのが今回紹介した記号の意味です．したがって，集合族は単に "集合の集合" ではありません．

## 前回までの訂正

- 講義資料 4, 2 ページ；授業に関するご意見の下から 7 行目：(誤) 部分の部分の (正) 部分の
- 講義資料 4, 8 ページ, 6 行目：(誤) $f(A)$ (正) $f(X)$
- 講義資料 4, 8 ページ, 7 行目：(誤) $f(A$ (正) $f(X$

## 授業に関する御意見

- “たかだか可算” って変な名前ですね． **山田のコメント：** 変ですか?
- 面白かったです． **山田のコメント：** ほんとかなぁ
- 難しくなってきました． **山田のコメント：** そうでしょう．
- 選択公理をまだ理解できていないのい質問ができませんでした． **山田のコメント：** たぶん，難しいですよね．
- もう少し聞きとりやすいように話してほしいです． **山田のコメント：** 声? 内容?
- (・∀・){ 髪切った？ **山田のコメント：** Sí.
- 部分点はくださいお願いします． **山田のコメント：** いや
- “変態” はほめ言葉だと僕は思います．僕は変態であることを誇りに思っています． **山田のコメント：** coming out してしまいましたね．
- 変態は褒め言葉だと思います．少なくとも僕は，変態と言われて嬉しいです． **山田のコメント：** me, too
- 今年は五月病にならなそうなのですごく嬉しく思います． **山田のコメント：** 去年はなったの?
- 先生はスターウォーズが好きなのですか **山田のコメント：** 一般教養に含まれる古典．
- 予習の大切さを改めて知りました．
  **山田のコメント：** 予習というか，前回の内容が頭に入っていないと難しいと思います．
- 今回の授業で，自分がどれだけ数学に向いていないのかを思いしらせていただきました．その分，もっとがんばりますので，今後もよろしくお願いいたします．
  **山田のコメント：** 頑張るも頑張らないも，こういう内容は “書いてあることをそのまま読む” 訓練が大事ですよ．
- $\Omega = \{x \mid x$ は集合 $\}$ といった話を途中で入れてもらえると思考を切り替えることができるので，授業に集中する上でも助かります．
  **山田のコメント：** 一応，これは余談ではない，ということですがいいですね．
- 日本語訳ですが，原論持ってます． **山田のコメント：** それはおもしろい．
- 物理学科には辛い. . . **山田のコメント：** そんなことはないと思う．自分で限界を決めない．
- 数学のダークサイドを認めるのは気分の悪いものですか． **山田のコメント：** いいえ．
- なんだかわからなくなってまいりました． **山田のコメント：** そうみたいですね．
- みんなの質問を読むのはすごくためになるのでありがたいです． **山田のコメント：** 今回は低調
- 漢字を添字として使わないのは，最初の文字 (アルファベットなら $A$) がなさそうだからではないですか．これによってしまえば，ひらがなを認めることになりますが． **山田のコメント：** そうね．平仮名くらい使いたいよね．
- エピソード 3 を観て，すぐにエピソード 4 を観ると時代を感じますよね． **山田のコメント：** そうね．John Williams もずいぶんうまくなってる．
- 講義資料の大切さが分かってきました． **山田のコメント：** いまごろ?
- もはや何を質問したらよいかを質問したいくらいになってしまいました．復習します．
  **山田のコメント：** それがよいと思います．質問をきちんと言葉で表すためにはかなり勉強しなければなりません．
- 写像をかくさいに，どういう種のものからどうい種のものへの写像かかいてくれるとありがたいです．(例：集合 $\to$ 集合) 時々こんがらがるので．
  **山田のコメント：** 文脈からわかるはずです．それを読み取る訓練が必要です．
- 定理の説明のときに具体例を示してくださるのはありがたいです．
  **山田のコメント：** 具体的と思う人も思わない人もいるようですね．
- 特になし． **山田のコメント：** me, too.

## 質問と回答

**質問：** 講義内容とは直接関係ないのですが，「定理」「命題」「系」などと書くのはなにか決まりがあって使い分けているのですか．

**お答え：** 定理と命題のつかいわけは，おもに重要性の違い (主観的)．系は “定理＊＊の系” という形で使われ，直前の定理から容易に (主観的) 導ける命題の意味．

**質問：** 「for all 〜」とは「〜に対するすべて」で合っていますか？

**お答え：** いいえ．「全ての〜に対して」です．

**質問：** $\Omega = \{x \mid x$ は集合 $\}$, $\Omega' = \{x \in \Omega \mid x \notin x\}$ のとき，$\begin{cases} \Omega' \in \Omega' \Rightarrow \Omega' \notin \Omega' \\ \Omega' \notin \Omega' \Rightarrow \Omega' \in \Omega' \end{cases}$ というのがよく分かりませんでした．詳しい説明をお願いします．

**お答え：** $\Omega'$ の定義式を見れば “$x \in \Omega'$ であるとは $x \notin x$ となることである” ということです．第 1 回講義の通り．その $x$ を $\Omega'$ と書き換えればよい．

**質問：** 例 4.3 について，(1 つ目) $U_n = (-n, n) \subset \boldsymbol{R}$ とする．このとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{k\to\infty} \bigcup_{n=1}^{k} U_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{n=1}^{k} (-n, n) = \lim_{n\to\infty} (-k, k) = \boldsymbol{R}$$

となる過程で，2 行目〜3 行目，3 行目〜4 行目に論理飛躍はありませんか．

**お答え：** この合併集合は “極限ではない” と言いませんでしたっけ．ですから議論はまったく誤りです．$\cup_{n=1}^{\infty} U_n$ の定義にしたがって確かめなければなりません．

**質問：** $A$ を集合として $2^{|A|}$ と $|2^A|$ って同じですよね？ **お答え：**はい

**質問：** 二つの集合 $\boldsymbol{x}, Y$ の間に単射 $f : \boldsymbol{x} \to Y$ が存在するとき，$|\boldsymbol{x}| \leqq |Y|$．これで，濃度は写像に依存していないか？写像を指定しないで，濃度は比較できるか？

**お答え：** 単射 $X \to Y$ を “一個うまく作ることができたら” $|X| \leqq |Y|$．それがどんなものでも構わない．単射でないものがあったってかまわない．

**質問：** 集合 $A$, $B$, $C$ について $A \subset B \subset C$, $|A| = |C|$ なら，$|A| = |B| = |C|$ ですか？

**お答え：** はい．包含写像は単射だから $|B| \leqq |C|$. 一方 $|A| = |C|$ だから単射 $f\colon C \to A$ が存在する．$B \supset A$ だから，この写像は $C$ から $B$ への単射とみなせるので $|C| \leqq |B|$.

**質問：** 集合 $X$ と $Y$ について $Y \to X$ の単射が存在すれば $|Y| \leqq |X|$ なのは分かるが，どのような場合 $|Y| < |X|$ にな

るのか.

**お答え：** その単射が絶対に全射になりえないとき．たとえば講義資料 3, 定理 3.13 とその証明を見よ．

**質問：** 集合 $X$ の巾集合のことを $2^X$ とかくこともあると資料にありました．$|\mathfrak{P}(X)| = |2^X| = 2^{|X|}$ となっているようですか．$2^{|X|}$, この 2 はどういう 2 なんでしょうか．$2^2 = 4$ のような 2 とみなして良いのですか？ $X$ から集合 $\{1, 0\}$ への写像の濃度は巾集合の濃度と等しいので，それを明示しているだけなのでしょうか？

**お答え：** 最後におっしゃった通り．とくに $X$ が有限集合ならば，$2^{|X|}$ は普通のべき乗.

**質問：** $F(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ ($f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の全体の集合) と $\mathfrak{P}(\boldsymbol{R})$ は，どちらも $\boldsymbol{R}$ より濃度が大きいですがどちらの方が大きいのでしょうか．$|\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}}| = |F(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})|$ より，($|\boldsymbol{N}| = \aleph_0$, $|\boldsymbol{R}| = \aleph$)

$$|\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}}| = \aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \aleph} = 2^{\aleph} = 2^{|\boldsymbol{R}|}$$

で良いのでしょうか.

**お答え：** 間違ってはいないのですが，各々の等号は証明できますか? (すなわち普通に指数法則を使ってよいんでしたっけ).

**質問：** 7 ページの一番下の行「$\mathfrak{X}$」は何と読むんですか？

**質問：** 講義資料の「集合族 $\{U \,|\, U \in \mathfrak{X}\}$」の $\mathfrak{X}$ は何と読みますか？

**お答え：** えっくす.

**質問：** 公理というものは現在でも増えているのですか？数学者・研究者が新たに発表するというのはよくあることなのでしょうか？

**お答え：** あたらしい数学的対象を考える際にどんどんつくられます．公理的にモノを定義するのは数学では日常的です.

**質問：** $\Lambda$ が添字集合だと言ったときには，$\Lambda \neq \emptyset$ とするのですか？ $\Lambda = \emptyset$ とすると集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ は定義できないのでは？それとも $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} = \emptyset$ とよるのですか？選択関数についての Lemma で $X$ は集合とかいていましたが $X = \emptyset$ のときは $\Lambda = \emptyset$ となるので上の理由で別証明がいるのでは？

**お答え：** 定理 4.11 のことでしょうか．ここでは $X \neq \emptyset$ としていますね.

**質問：** 講義資料 4, p7 に $U_1 \times U_2$ は組 $(u_1, u_2)$ $(u_1 \in U_1, u_2 \in U_2)$ 全体の集合と同一視される，とありますが，ということは，$U_1 \times U_2$ の要素は，写像 $\varphi$ ($\varphi(1) = U_1$, $\varphi(2) = U_2$) であって組 $(u_1, u_2)$ ではないということですか.

**お答え：** 定義をその通りに読むとそうなりますが，演習問題 4-2 のようにして同一視できるので，都合によりどちらとも思います．大体，有限個の直積の場合は $(u_1, \ldots, u_n)$ のような記号を用い，無限個の直積の場合はここで扱ったように写像の集合と思うことが多いです.

**質問：** $X \times X$ の要素 $\phi$ について，1 を $x \in X$ へうつす写像を $\phi_x$ とおけば，$X \times X$ から $X$ への全単射が存在するから，$|X^2| = |X|$ と言うことができますか．$\phi_x(2)$ について考えてないからできなそうですね.

**お答え：** その写像は全単射ですか?

**質問：** 集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ と，その直積 $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を考えたとき，$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して，$U_\lambda = \{1, 2\}$ であった場合，$\begin{array}{l} f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \\ \quad \lambda \mapsto 1 \end{array}$ とすると，選択公理を使わずに，$f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ としてよいのでしょうか．つまり，行き先が具体的に定義された写像があった場合，選択公理を使わずに，$\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \neq \emptyset$ としてよいのでしょうか.

**お答え：** 良いと思います.

**質問：** 直積の表記は本によっては $\coprod$ とも書いてあるのですが

**お答え：** それは直和 (非交和) では?

**質問：** Bernstein の定理の系，$A$, $B$ set，$A \sim B_1 \subset B$ かつ $B \sim A_1 \subset A$ ならば $A \sim B$ は扱わないのですか

**お答え：** 包含写像は単射だから自明，とくに扱う必要はないと思います．むしろこれが Bernstein の定理と大きく違う，と感じる方が問題だと思います.

**質問：** 集合族と冪集合は違うのでしょうか.

**お答え：** 違います．冪集合は特別な集合族とみなせます.

**質問：** 集合族という概念がちょっとわかりにくいです．集合族はいったい何ですか．写像の集合ですか.

**お答え：** 考えもイメージもまず捨てて “定義” をよく見よ.

**質問：** $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ と $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ の定義を先生が説明した際に極限は使わないとたしかおっしゃっていました．$\lim_{n \to \infty} n$ と $\infty$ は意味が全く違うと考えてよいのでしょうか？

**お答え：** この文脈では，$\lim_{n \to \infty} n$ という式はどこにもでてきていませんが，なんでこれと比較しなければならないのですか?

**質問：** 資料 4, 6 ページ，集合族

$$\text{写像}\ \Lambda \ni \lambda \mapsto U_\lambda \in \mathfrak{X}\ \text{を}\ \Lambda\ \text{により}\ldots$$

となっていますが，写像が集合族であると言っているようにとれます．

**質問：** $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \{\gamma : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \,|\, \gamma(\mu) \in U_\mu \text{ for all } \mu \in \Lambda\}$ は $\gamma$ の集合 (写像の集合) を意味するのですか．

**お答え：** そうです．授業ではそういったよね．

**質問：** $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \{\varphi : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \,|$ 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi(\lambda) \in U_\lambda\}$ が $X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}((x, y)$ という点の集まり) の概念の拡張になっているという感覚がいまいちつかめなかったのですが，どういう事なのでしょうか．

**お答え：** 問題 4-2 を解いてみましたか?

**質問：** 実数の定義は "デデキントの切断" を用いるものの他に，どのような定義がされるのでしょうか？

**お答え：** 無限小数，有理数の完備化. . .

**質問：** $\underline{\boldsymbol{Q}\ \text{から}\ \boldsymbol{R}\ \text{をどう構成するか}}$ という話のところで気になったのですが，$\{x \in \boldsymbol{Q} \,|\, x \leqq 2\}$ という表記と $\{x \in \boldsymbol{Q} \,|\, x < 2\}$ という表記について，どちらの方が好ましいといった差はあるのでしょうか．

**お答え：** 文脈によります．我々の切断の定義 (講義資料 4, 1 ページ) ではどちらがよいでしょうか．

**質問：** $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{R}$ はどちらの濃度が濃い (大きい？) のでしょうか？複素数が $a + bi$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ と表せることを考えると $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{R}^2| = |\boldsymbol{R}|$ となると，思うのですが．

**お答え：** 濃度が "濃い" とはいいませんね．講義資料 4, 3 ページ下から 9 行目．

**質問：** 前回内容 (原文ママ："前回の内容" のことか?) ですが，$\boldsymbol{R}$ 上連続関数の集合 $A$ に対し，$f, g \in A$ のとき，$f = g \iff f|_{\boldsymbol{Q}} = g|_{\boldsymbol{Q}}$ まではよいのですが，するとなぜ $A$ から $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{Q}$ への単射が存在するのですか．

**お答え：** 直接は作れないようです．少しだけ手間がかかります．(1) 与えられたヒントから，$A$ は $\boldsymbol{Q}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像全体の集合 $A'$ の部分集合になっていることがわかります．ここで $|\boldsymbol{Q}| = |\boldsymbol{N}|$ に注意すると，$A'$ は $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像全体の集合 $B$ と対等です．さらに $\boldsymbol{R}$ は $\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ と対等ですから，$B$ は $\boldsymbol{N}$ から $\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ への写像全体の集合 $C$ と対等です．ここで $\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ の要素は $\boldsymbol{N}$ の部分集合ですから，$\boldsymbol{N}$ から $\{0, 1\}$ への写像全体の集合 $F$ と同一視されます．すると，任意の $\varphi \in C$ と $m \in \boldsymbol{N}$ に対して $\varphi(m) \in F$ は $\boldsymbol{N}$ から $\{0, 1\}$ への写像なので $\varphi(m)(n) \in \{0, 1\}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ となります．これにより $C$ の要素 $\varphi$ と $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ から $\{0, 1\}$ への写像が同一視されますので，集合 $C$ は $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ から $\{0, 1\}$ への写像全体の集合 $D$ と対等です．$\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ は $\boldsymbol{N}$ と対等なので，$D$ は $\boldsymbol{N}$ から $\{0, 1\}$ への写像全体の集合と対等であることが言えますから，$\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ と対等です．以上から，$A'$ と $\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ が対等であることがわかりました．$A \subset A'$ ですから $|A| \leqq |\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})| = |\boldsymbol{R}|$．逆向きの不等号は容易に示せるはずです．

**質問：** $|\boldsymbol{N}|$ と $|\boldsymbol{R}|$ の中間の濃度にあたる無限集合を探す試みはなされているのですか？

**質問：** $\boldsymbol{N}$ は最小の無限集合とあるのですが，無限集合を $A$ とすると $|\boldsymbol{N}| < |A| < |\boldsymbol{R}|$ となる無限集合も存在するのでしょうか？また，そのような $A$ とは，どんな条件がつけられた集合でしょうか？

**お答え：** 連続体仮説に関するコメントを授業中にしましたよね．

**質問：** $|\boldsymbol{N}| < |\boldsymbol{R}|$ の間の濃度というのは興味深いです．大まかに，あってもなくても無矛盾というのはどう示すのでしょうか？

**お答え：** 一言では言えないようです (すくなくとも山田には言えません)．一般向けの解説書がいくつも出ています．

**質問：** $\boldsymbol{R}$ は非可算無限集合ですが，$\boldsymbol{N}$: 可算に対して $\boldsymbol{R}$: 非可算というのは $\boldsymbol{R}$ の元である無理数が小数点以下無限に続くからだと漠然とイメージしていたのですが，単に $\mathrm{card}(X) = 2^{\boldsymbol{N}}$ なる集合を非可算無限と呼ぶだけですか．

**お答え：** 可算でないものを非可算という．言葉通り．

**質問：** $\boldsymbol{N}$ は最小の無限集合でしたが，もしかして $\boldsymbol{R}$ は最大の無限集合ですか？それとも，濃度は，上に際限なしありますか？

**質問：** 最大の無限集合というものは存在するのでしょうか．たぶん存在しないような気がするのですが，そのようなとき "大きい" 集合にはどのようなものがありますか．

**お答え：** 講義資料 3, 定理 3.13 より最大のものは存在しないことがわかります．

**質問：** $\boldsymbol{N}$ が最小の無限集合というのがよく分かりませんでした．そもそも最小の無限集合とはどのような意味ですか．

**お答え：** 講義資料 4, 系 4.12 の意味．

**質問：** Dark side の例の言っている意味がよく分かりませんでした．

**お答え：** どの例?

**質問：** 授業中，Darkside と言って，ラッセルのパラドックスを紹介していましたが，このパラドクスが起こらないような公理系で授業を行っているのでいるのでしょうか．それとも，それこみで，考えるなということなのでしょうか．

**お答え：** 集合を "定義" していないので，なんとも言えないが，"きにするな" いうこと．

**質問：** アナキンスカイウォーカーは怒りに身を任せてしまって Dark side へ堕ちてしまいました．一方で，孫悟空は，怒りに身を任せたことで，スーパーサイヤ人となり，クリリンの敵を討ちます．こう考えると，アナキンも Dark side に堕ち，ダースベイダーとなることで，さらなる力を得たとも言える気がします．従って，Dark side である paradoxical な議論も，とことん追求していけば，立派な学問になる気がするのですが，実際に paradox を扱う分野は数学において存在するのでしょうか．

**お答え：** 前置きが長い．Paradox は重要，実際，それによって公理的集合論が造られた．

**質問：** 選択公理について質問します．講義中に「無限個の集合族のすべての集合が空集合でないとき，そのひとつひとつから元を取り出せる，というのはそこまで自明ではない」と話されてましたが，なぜそこまで自明ではないのですか？すべての $U_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ が空でない $\iff$ $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して $a_\lambda \in U_\lambda$ となる元があるので大丈夫そうに思えますし，それなら $f : \boldsymbol{R} \ni x \mapsto f(x) \in \boldsymbol{R}$ において，「無限にある $\boldsymbol{R}$ の元 $x$ に対し，本当に $\boldsymbol{R}$ の元 $f(x)$ が対応するのか？」も考える必要があるのでは？

**お答え：** 最後の話は $x$ に対して $f(x)$ を定める "手続き" が明確化されていればよいのです．一方，選択公理を使う場面では，本当は "たくさん" あるはずだがそれを選んでいく手続きが明文化できないというところです．本当に "一度に選んでしまえるの? 選び方をいってごらん?" と聞かれて，選び方を答えられないので "ある" と言ってしまう，と，まぁ思っておいてください．

**質問：** 以下の考え方でよろしいでしょうか？選択公理 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 「集合族のすべての集合から一度にひとつずつ要素を取り出すことができる」というのは，Def 4.6 であたえられた射影 $\pi_\mu$ の $\mu$ の集合 $\{\mu\}$ が $\{\mu\} = \Lambda$ となっていて，どのような $U_\lambda$ に対しても，そこの元を直積空間から持ってくる $\pi_\mu$ が存在している，という主張である．

**お答え：** そうではなくて (これだとひとつの $\mu$ に対して $U_\mu$ の要素を取り出しているように見える) すべての $U_\lambda$ たちに対して一度に取り出すことができる，というのが重要．

**質問：** 公理と定義の違いは何ですか？

**お答え：** 定義：— のことを ○○という．公理：○○が成り立つということにしよう．

**質問：** 選択公理のかわりにその否定を公理とした場合，① $X, Y$: sets，$|X| \leqq |Y|$ または $|Y| \leqq |X|$ ② $\exists f : Y \to X$: 全射 $\Rightarrow |X| \leqq |Y|$ ③ $X$: 無限集合 $\Rightarrow |\boldsymbol{N}| \leqq |X|$ などは，成り立たないことが示されるのですか？それとも成り立つか成り立たないかわからないのですか？

**お答え：** 選択公理の否定を書いてみましょう．そのうえでどう思いますか．

**質問：** $\{x$ の濃度 $| \, x$ は集合 $\}$ は集合ですか？

**お答え：** 申し訳ありません．知りません．

**質問：** 選択公理の写像を考えているのですか．よくわかりません．

**お答え：** そうですか (としかいいようがありません)

**質問：** 公理についてですが，まず公理があってそこから議論がはじまると理解していますか．今日の選択公理だと，あとから公理か付け足されたような印象でしたが，そういったことも許されるのですか．(なんでもアリになってしまうんじゃ. . . )

**お答え：** 後付けですが，最初から選択公理は仮定してあったとしておく．そのうえで，第 3 回講義までは "選択公理は使わない事項" だけを扱った．

**質問：** 公理的集合論では，例えば $\Omega' \in \Omega' \rightleftharpoons \Omega' \notin \Omega'$ となるような集合 (？) を集合として扱わないのでしょうか．公理的集合論の特徴は，集合はモノの集りであるという定義ではなく，すべて公理によって定義できる集合を扱うといってよいのでしょうか．

**お答え：** だいたいそうです．

**質問：** 選択公理は特に断りがなければ，成立すると思っていいですか？ **お答え：**はい．

**質問：** 集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ と $\Lambda$ の部分集合 $\Lambda'$ に対して $\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$ と $\bigcap_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$ が定義されると思いますが，添字集合 $\Lambda'$ が空集合 $\emptyset$ のときは，つまり，$\bigcup_{\lambda\in\emptyset} U_\lambda$ と $\bigcap_{\lambda\in\emptyset} U_\lambda$ はどのような集合になりますか？まず $x \in \bigcup_{\lambda\in\emptyset} U_\lambda \iff \exists\lambda \in \emptyset(x \in U_\lambda)$ より $\bigcup_{\lambda\in\emptyset} U_\lambda = \emptyset$ となり，また，$x \in \bigcap_{\lambda\in\emptyset} U_\lambda \iff \forall\lambda \in \emptyset(x \in U_\lambda)$ より $\bigcap_{\lambda\in\emptyset} U_\lambda = X$(普遍集合) となるのでしょうか？

**お答え：** それでよいです．

**質問：** 講義のなかで，選択公理を用いて $(\forall f : Y \to X(\text{全射}))\ (\exists g : X \to Y(\text{単射}))[f \circ g = \mathrm{id}_X]$ (1) がなりたつことを示しましたが，逆に，このことから選択公理を示すことができます．講義 (資料) では集合 (の概念) を用いて選択公理を定義しましたが，(1) を用いれば写像 (の概念) により選択公理を定義できる，あるいは，(1) は選択公理の写像としての見方をより直接的に提示している，と言えるのではないでしょうか？

**お答え：** そうです．選択公理には同値な命題がたくさんあるので．

**質問：** 選択公理はどのようにして導出されたものなのかが分かりません．

**お答え：** 導出という言葉をどういう意味で使っておられるのかわかりませんが，証明した，という意味なら証明されていません．ということを説明したつもり．

**質問：** 切断について：$\sqrt{2}$ なら $x^2 = 2$ のようにすればよいが，$\pi$ などの場合はどうするのか？

**お答え：** 構成的につくるのは易しくないと思いますが，$\pi$ を表す切断は存在します．それは $\pi$ をいくらでも近似する有理数が存在することからわかります．

**質問：** どんな添字集合に対しても集合族がきちんと定まるのか．そこに選択公理は使われないのか？

**お答え：** $\Lambda$ をひとつ固定して各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $U_\lambda = \boldsymbol{R}$ とすればひとつつくれたことになる．

**質問：** $\cdots = f^{-1}(X) = Y$ のとき全射だから $=$ といったが，全射じゃなくても成り立つと思います．($f : X \to Y$ : 単射 $\Rightarrow \ldots$ の証明)

**お答え：** どのことだろう．“全射 $\Rightarrow \ldots$” では? いずれにせよご質問の状況では $f^{-1}(X)$ は意味がないですね．

**質問：** 選択公理の具体例がほしい．どんな集合に分割したときに代表元がとりにくいのか？

**お答え：** 分割とはなんですか?

**質問：** $\Omega = \{x \mid x \text{ は集合 }\}$ となる集合が存在しないように定めた公理とはなんでしょうか？

**お答え：** “公理的集合論” でぐぐってください．

**質問：** 選択公理の説明の際に，講義資料には「一度に一つずつ」要素をとり出せる，と書いてありましたが，先生は口頭で「順番に対応させていく」ともおっしゃいましたよね？同時にとり出しても順番にとり出しても，この場合は結果に影響しないんですか？

**お答え：** 「一度にひとつずつ」が正しい感覚のような気がします．「順番」では $\Lambda$ が変態な (?) 集合のときに意味がなくなりますね．$\Lambda = \boldsymbol{N}$ なら「順番に」でもよいように思います．

**質問：** 先生は変態なんですか？

**お答え：** ひ・み・つ ♡

# 5 二項関係・ツォルンの補題

**■二項関係** 集合 $X$ に対して，直積集合 $X \times X$ の部分集合 $R$ のことを**二項関係**という．二項関係 $R$ が与えられたとき，$(x, y) \in R$ であることを $x \sim_R y$ と書く．

**例 5.1.**
- $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \,|\, x \in X\}$ を**対角集合**という．これを $X$ の二項関係とみなすと $x \sim_{\Delta_X} y$ とは $x = y$ のことである．
- $R = \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \,|\, x \leqq y\}$ を二項関係とみなすとき $x \sim_R y$ とは $x \leqq y$ のことである．

**■順序関係・順序集合**

**定義 5.2.** 集合 $X$ の二項関係 $R$ が次を満たすとき，$R$ を**順序関係**という：

- 任意の $x \in X$ に対して $x \sim_R x$ である．
- 任意の $x, y \in X$ に対して $x \sim_R y$ かつ $y \sim_R x$ ならば $x = y$ である．
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して $x \sim_R y$ かつ $y \sim_R z$ ならば $x \sim_R z$ である．

関係 $R$ が順序関係であるときは，$x \sim_R y$ のかわりに $x \preceq_R y$ と書くことにしよう．

**例 5.3.**
- 例 5.1 の 2 番目 (実数の大小)
- 部分集合 $U, V \subset X$ に対して "$U \preceq_R V$" $\equiv$ "$U \subset V$" と定めると，$\preceq_R$ は冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ の順序関係[*1]．

集合 $X$ に順序関係 $\preceq$ が与えられているとき $(X, \preceq)$ を**順序集合**という．このとき，部分集合 $Y \subset X$ に関係 $\preceq$ を制限すれば順序集合 $(Y, \preceq)$ が得られる．

**■ツォルンの補題**

**定義 5.4.** 順序集合 $(X, \preceq)$ に対して，

- $(X, \preceq)$ が**全順序集合**とは, 任意の $x,\ y \in X$ に対して $x \preceq y$ または $y \preceq x$ が成り立つことである．
- $(X, \preceq)$ の全順序部分集合 $Y$ の**上界**とは, $c \in X$ で，任意の $y \in Y$ に対して $y \preceq c$ となるものである．
- **帰納的順序集合**とは，順序集合 $(X, \preceq)$ で，$X$ の任意の全順序部分集合が上界をもつものである．

**定理 5.5** (ツォルンの補題)**.** 帰納的順序集合 $(X, \preceq)$ と $a \in X$ に対して, $c \in X$ で $a \preceq c$ かつ次を満たすものが存在する：任意の $x \in X$ に対して $c \preceq x$ が成り立つならば $c = x$ である (すなわち $c$ は**極大元**である)．

証明のために，まず次の集合を定義する：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} &:= \{T \subset X \,|\, a \in T \text{ かつ } T \text{ は全順序集合}\}, \\
C_T &:= \{c \in X \,|\, c \text{ は } T \text{ の上界 かつ } c \notin T\} \quad (T \in \mathcal{T}).
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

**補題 5.6.** 集合 $T \in \mathcal{T}$ で $C_T = \emptyset$ となるものが存在する．

---

2011 年 5 月 10 日 (2011 年 5 月 28 日訂正)

[*1] 定義にそのまま従えば $R = \{(U, V) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \,|\, U \subset V\}$ が順序関係ということになるが，このように $\preceq_R$ 自体を順序関係とよんでもよい (というかその方が自然)．

**証明：** 任意の $T \in \mathcal{T}$ に対して $C_T \neq \emptyset$ として矛盾を導く．選択公理より $\gamma \in \prod_{T\in\mathcal{T}} C_T$ が存在する．いま，

$$\text{(5.2)} \qquad \text{任意の } T \in \mathcal{T} \text{ に対して } T' := T \cup \{\gamma(T)\}$$

と書いておく．これを用いて，$\mathcal{T}$ の部分集合の族 $\mathfrak{A}$ とその共通部分 $\mathcal{R}_0$ を次のようにとる：

$$\text{(5.3)} \quad \mathfrak{A} := \left\{ \mathcal{R} \subset \mathcal{T} \;\middle|\; \begin{array}{ll} (a) & \{a\} \in \mathcal{R} \\ (b) & T \in \mathcal{R} \text{ ならば } T' \in \mathcal{R} \\ (c) & \mathcal{S} \subset \mathcal{R} \text{ が “}\subset\text{” に関して全順序的ならば } \cup_{T\in\mathcal{S}} T \in \mathcal{R} \end{array} \right\}, \qquad \mathcal{R}_0 := \bigcap_{\mathcal{R}\in\mathfrak{A}} \mathcal{R}.$$

- $\mathcal{T} \in \mathfrak{A}$ である．すなわち $\mathfrak{A} \neq \emptyset$．実際 (a) $\{a\}$ は $a$ を要素に含む全順序集合だから $\{a\} \in \mathcal{T}$．(b) $T \in \mathcal{T}$ に対して $\gamma(T) \in C_T$ は $T$ の上界だから $T' = T \cup \{\gamma(T)\}$ も全順序集合．(c) $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ を全順序部分集合とする．このとき，$x, y \in \cup_{T\in\mathcal{S}} T$ に対して $x \in T_1, y \in T_2$ $(T_1, T_2 \in \mathcal{S})$ となる $T_1, T_2$ をとると $\mathcal{S}$ が全順序集合であることから $T_1 \subset T_2$ または $T_2 \subset T_1$ が成り立つ．前者の場合，$x, y \in T_2$ かつ $T_2$ が全順序集合だから $x \preceq y$ または $y \preceq x$．後者の場合も同様なので $\cup_{T\in\mathcal{S}} T$ は全順序集合なので $\mathcal{T}$ の要素である．
- $\mathcal{R}_0$ は “$\subset$” に関する全順序集合である．このことを示すために $\mathcal{R}_0$ の部分集合

$$\mathcal{R}_T := \{U \in \mathcal{R}_0 \,|\, U \subset T \text{ または } T \subset U\}, \qquad \mathcal{R}_1 := \{T \in \mathcal{R}_0 \,|\, \mathcal{R}_T = \mathcal{R}_0\}$$

を考える．まず $\mathcal{R}_1 \in \mathfrak{A}$ を示す：(a) $T = \{a\}$ とすると任意の $U \in \mathcal{R}_0$ に対して $T \subset U$ だから $\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_0$．したがって $\{a\} \in \mathcal{R}_1$．(c) $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_0$ を全順序的部分集合とすると，任意の $\mathcal{R} \in \mathfrak{A}$ に対して $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ だから $\mathfrak{A}$ の定義から $T := \cup_{S\in\mathcal{S}} S \in \mathcal{R}$．$\mathcal{R}$ は任意だったから $T \in \mathcal{R}_0$．さらに $T \in \mathcal{R}_1$ であることを示す．各 $S \in \mathcal{S} \subset \mathcal{R}_1$ だから $U \in \mathcal{R}_0$ に対して $U \subset S$ または $S \subset U$ のいずれかが成り立つ．もし，ある $S \in \mathcal{S}$ に対して $U \subset S$ ならば，$U \subset T$．したがって $U \in \mathcal{R}_T$．一方，すべての $S \in \mathcal{S}$ に対して $U \subset S$ でなければすべての $S$ に対して $S \subset U$ なので $T \subset U$．したがって $U \in \mathcal{R}_T$．以上より $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_T$ だから $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_T$．すなわち $T \in \mathcal{R}_1$．(b) $T \in \mathcal{R}_1$ ならば $\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_0$ が成り立っている．このとき，$U \in \mathcal{R}_{T'}$ をとり，$U' \in \mathcal{R}_{T'}$ であることを示したい．定義から $U \subset T'$ または $T' \subset U$ が成り立つ．一方 $U \in \mathcal{R}_{T'} \subset \mathcal{R}_0 \in \mathfrak{A}$ だから $U' \in \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_T$．
したがって $U' \subset T$ または $T \subset U'$ が成り立つ．以上より

$$(U \subset T' \text{ または } T' \subset U) \text{ かつ } (U' \subset T \text{ または } T \subset U')$$

が成り立つ．これに “and”, “or” に関する分配法則を適用すればつぎの 4 つのうちどれか一つが成り立つことがわかる：

| | |
|---|---|
| (A) $U \subset T'$ かつ $U' \subset T$ | (B) $U \subset T'$ かつ $T \subset U'$ |
| (C) $T' \subset U$ かつ $U' \subset T$ | (D) $T' \subset U$ かつ $T \subset U'$ |

ここで $T'$ の定義式 (5.2) から $T \subsetneq T'$ なので (C) は起きえない．また $U' \subset T$ が成り立つなら $U \subset T'$ なので (A) は $U' \subset T$ と書き換えることができる．同様にして (D) は $T' \subset U$ の書き換えられるので，これらは

(A’) $U' \subset T$　　(B’) $U \subset T'$ かつ $T \subset U'$　　(D’) $T' \subset U$

と書き換えられる．(A’) の場合は $U \subset U' \subset T \subset T'$ が成り立つから $U' \in \mathcal{R}_{T'}$，(D’) の場合は $T' \subset U \subset U'$ だからやはり $U' \in \mathcal{R}_{T'}$．(B’) の場合を考える．このとき $U \subset U \cup T \subset U \cup U' = U'$, $T \subset U \cup T \subset T' \cup T = T'$ であるが，$U' = U \cup \{\gamma(U)\}$, $V = V \cup \{\gamma(V)\}$ はそれぞれ $U, V$ に一つの要素を付け加えたものであるから，

$$(U = U \cup T \quad \text{または} \quad U' = U \cup T) \quad \text{かつ} \quad (T = U \cup T \quad \text{または} \quad T' = U \cup T)$$

が成立する．これらに “and”, “or” の分配法則を用いれば次の 4 つの場合のどれか一つが成り立つ：(B1) $U = U \cup T$ かつ $T = U \cup T$．このとき $U = T$ だから $U' = T'$ となり，$U' \in \mathcal{R}_{T'}$．(B2) $U = U \cup T$ かつ $T' = U \cup T$．このとき $U = T'$ なので $U' \supset U = T'$．したがって $U' \in \mathcal{R}_{T'}$．(B3) $U' = U \cup T$ かつ $T = U \cup T$．このときは $U' = T \subset T'$ だから $U' \in \mathcal{R}_{T'}$. $U \in \mathcal{R}_{T'}$．(B4) $U' = U \cup T$ かつ $T' = U \cup T$．このとき $U' = T'$ だから $U \in \mathcal{R}_{T'}$．

以上より $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_T$ のとき，任意の $U \in \mathcal{R}_0$ に対して $U \in R_{T'}$ が成り立つことがわかった．ここで $R_{T'} \subset \mathcal{R}_0$ だから $\mathcal{R}_0 = R_{T'}$ が成り立つ．したがって $T' \in \mathcal{R}_1$ が成り立つ．
これらから $\mathcal{R}_1 \in \mathfrak{A}$ がわかる．したがって $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_1$ かつ $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_0$ なので $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0$.
ここで $\mathcal{R}_1$ は全順序集合だから $\mathcal{R}_0$ は全順序集合である．

- いま $T_0 := \cup_{T\in\mathcal{R}_0} T$ とおくと，$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 \in \mathfrak{A}$ であることから $T_0 \in \mathcal{R}_0$ (性質 (c) と $\mathcal{R}_0$ が全順序集合であること)．とくに $T_0$ の作り方から，任意の $T \in \mathcal{R}_0$ に対して $T \subset T_0$．ここで 性質 (b) から $T_0' = T_0 \cup \{\gamma(T_0)\} \in \mathcal{R}_0$ となるので，$T_0' \subset T_0$：

$$T_0' = T_0 \cup \{\gamma(T_0)\} \subset T_0.$$

ここで $\gamma$ の選び方より $\gamma(T_0) \notin T_0$ であるから矛盾が生じる．

*定理 5.5 の証明.* 補題 5.6 のような $T$ をとる．$X$ は帰納的順序集合だから，$T$ の上界 $c \in X$ が存在する．さらに $C_T = \emptyset$ だから $c \in T$．$T \in \mathcal{T}$ だから $a \in T$ なので，上界の定義から $a \preceq c$. また $x \in X$ が $c \preceq x$ を満たすならば，任意の $t \in T$ に対して $t \preceq c \preceq x$ が成り立つので $x$ は $T$ の上界．とくに $C_T = \emptyset$ だから $x \in T$ なので $x \preceq c$. したがって $x = c$ となる．この $c$ が求めるものであった． □

**■応用: 濃度の比較** 以下の定理は，任意の二つの集合 $X, Y$ に対して $|X| \leqq |Y|$ または $|Y| \leqq |X|$ が成り立つことを示している．

**定理 5.7.** 集合 $X, Y$ に対して，単射 $f\colon X \to Y$ が存在するか単射 $g\colon Y \to X$ が存在する．

一般に，集合 $X$ から集合 $Y$ への写像 $f\colon X \to Y$ が与えられると，そのグラフ

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

が定まる．逆に，$X \times Y$ の部分集合 $G$ に対して

$$\pi_X|_G\colon G \ni (x, y) \longmapsto x \in X$$

が全単射ならば，写像 $f\colon X \to Y$ でそのグラフが $G$ となるものがただ一つ存在する．とくに $f$ が全射 (単射) であるための必要十分条件は $\pi_Y|_G\colon G \to Y$ が全射 (単射) となることである．

*定理 5.7 の証明.* 集合 $S$ を

$$\mathcal{S} := \bigcup_{(A,B)\in(\mathfrak{P}(X)\times\mathfrak{P}(Y))} \{\Gamma \subset A \times B\,;\, \pi_X|_\Gamma\colon \Gamma \to A,\ \pi_Y|_\Gamma\colon \Gamma \to B \text{ は全単射 }\} \subset \mathfrak{P}(X \times Y)$$

とすると，$S$ は集合の包含関係に関して帰納的順序集合となる．実際，$\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ を空でない全順序部分集合とし，

$$G_0 := \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G, \qquad X_0 := \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \pi_X(G), \qquad Y_0 := \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \pi_Y(G)$$

とおく．この $G_0$ が $\mathcal{G}$ の上界となる．実際，

$$\pi_X(G_0) = \pi_X\left(\cup_{G\in\mathcal{G}} G\right) = \cup_{G\in\mathcal{G}} \pi_X(G) = X_0, \qquad \pi_Y(G_0) = Y_0$$

なので $\pi_X|_{G_0}: G_0 \to X_0$, $\pi_y|_{G_0}: G_0 \to Y_0$ は全射．また $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_0$ ならば $(x_1, y_1) \in G$, $(x_2, y_2) \in G'$ ($G$, $G' \in \mathcal{G}$) と書けるが，$\mathcal{G}$ が包含関係に関して全順序集合だから $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$ として一般性を失わない．すると $\pi_X|_G$ は単射であるから $\pi_X(x_1, y_1) = \pi_X(x_2, y_2)$ ならば $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

すなわち $\pi_X|_{G_0}$ の単射性が言えた．同様に $\pi_Y|_{G_0}$ も単射．以上より $G_0$ 上で $\pi_X, \pi_Y$ がともに全単射なので，$G_0 \in \mathcal{S}$．とくに $G \subset G_0$ $(G \in \mathcal{G})$ なので $G_0$ は $\mathcal{G}$ の上界である．

簡単のため $X, Y \neq \emptyset$ とすると $\mathcal{S}$ は空集合でない．実際，1 点からなる集合 $\{(x, y)\}$ $(x \in X, y \in Y)$ は $\mathcal{S}$ の要素である．したがってツォルンの補題から $\mathcal{S}$ の極大元 $G_m$ が存在する．この $G_m$ に対して $\pi_X(G_m) = X$ であるか，$\pi_X(G_m) = Y$ が成り立つ．実際，$\pi_X(G_m) \subsetneq X$，$\pi_X(G_m) \subsetneq Y$ として $(a, b) \in X \times Y$ を $a \notin \pi_X(G_m)$, $b \notin \pi_Y(G_m)$ となるようにとると $G'_m := G_m \cup \{(a, b)\}$ とおくと $G'_m \in \mathcal{S}$ かつ $G_m \subsetneq G'_m$ なので $G_m$ の極大性に反する．

もし $\pi_X(G_m) = X$ ならば，証明の前に注意したことから写像 $f\colon X \to Y$ が存在する．とくに $\pi_Y(G_m)$ は単射だから，この写像は単射である．同様に $\pi_Y(G_m) = Y$ ならば単射 $g\colon Y \to X$ が存在する． □

**■整列可能性定理**

**定義 5.8.** 順序集合 $(X, \preceq)$ が**整列集合**であるとは，$X$ の任意の部分集合が最小元をもつことである．

整列集合は全順序集合である．実際, $(X, \preceq)$ が整列集合 $\{x, y\} \subset X$ とすると $x$ または $y$ はこの部分集合の最小元だから $x \preceq y$ または $y \preceq x$ が成り立つ．

**定理 5.9.** 任意の集合 $X$ には $(X, \preceq)$ が整列集合になるような順序 $\preceq$ を入れることができる．

**証明：** $\mathcal{S} := \{(A, R) \,|\, R$ は $A \subset X$ の順序関係で $(A, R)$ は整列集合 $\}$ とする．さらに $(A, R)$, $(A', R') \in \mathcal{S}$ に対して $(A, R) \preceq (A', R')$ を，ある $a \in A'$ に対して $A = \{x \in A' \,;\, x \preceq_{R'} a\} \cap A'$, $R = R'|_A$ となることと定義すると，$\mathcal{S}$ は帰納的順序集合となる．その極大元 $(X_m, R_m)$ をとると $X_m = X$ となり，$R_m$ がもとめる順序関係である．

**■選択公理との関連**　ツォルンの補題は選択公理を用いて証明されたが，逆にツォルンの補題を認めると選択公理を導くことができる．この意味で，選択公理とツォルンの補題は同値である．実際，整列可能性定理 5.9 を用いると，選択公理は次のようにして示すことができる：空でない集合からなる集合族 $\{X_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ に対して $Y := \cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に整列集合となるような順序を入れ，$g(\lambda)$ を $X_\lambda \subset Y$ の最小元とすれば $g : \Lambda \to Y$ は直積集合の元を与える．

# 問題

5-1 ツォルンの補題から整列可能性定理を示す手順をきちんと実行しなさい．

5-2 体 $k$ 上のベクトル空間 $V$ の**基底**とは，$V$ の部分集合 $B$ で次の条件を満たすものである：

- 任意の $B$ の有限部分集合 $\{b_1, \ldots, b_m\}$ は $k$ 上線形独立.
- 任意の $V$ の元 $v$ は，$B$ の有限個の元 $\{b_1, \ldots, b_m\}$ の線形結合で表すことができる．

任意のベクトル空間 $V$ には基底が存在することを, 集合

$$\mathcal{S} := \left\{ (W, b) \;\middle|\; \begin{array}{l} W \subset V \text{ は } V \text{ の線形部分空間で} \\ b \text{ は } W \text{ の基底} \end{array} \right\}$$

に $(W_1, b_1) \preceq (W_2, b_2)$ を $W_1 \subset W_2$ かつ $b_1 \subset b_2$ で順序関係を定義したものにツォルンの補題を適用することにより示しなさい．