

2011年5月24日(2011年5月31日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

## 集合と位相第一講義資料 7

### お知らせ

- 次回は5月28日(土)です。変則的ですがお間違いのなきように、休日ダイヤに注意。
- 次回5月28日(土)および31日(火)は都合により質問用紙の受付を中止させていただきます(回答が間に合わない可能性が高いためです)。
- 今回のご質問の回答は、たぶん5月31日にいたします。

### 前回の補足

群作用による同値関係(例6.3)について、群作用の定義に“ $\rho(e) = \text{id}$ ”を(とりあえず)付け加えましょう。これで代数学で学んだものと形式的に同じになります。字面は違いますが。

### 前回までの訂正

- 講義資料5, 10ページ, 1行目:(誤)  $X \times X$  (正)  $X \times Y$
- 講義資料6, 3ページ, 一番下:(誤) 二項関係が  $\{(u_1, u_2) \in \mathfrak{P}(A) \mid u_1 \subsetneq u_2\}$  (正) 二項関係が  $\{(u_1, u_2) \in \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(A) \mid u_1 \subsetneq u_2\}$
- 講義資料6の例6.2のはじめ:(誤)  $X \in x, y$  (正)  $X \ni x, y$
- 講義資料6, 5ページ, 例6.3の下から3行目:(誤)  $\rho(a \cdot b) = \rho(a) \circ \rho(b)$  (正)  $\rho(e) = \text{id}_X$  かつ  $\rho(a \cdot b) = \rho(a) \circ \rho(b)$
- 講義資料6, 5ページ, 下から5行目:(誤) 商空間 (正) 商集合
- 講義資料5, ツオルンの補題の証明について誤りのご指摘がありました。次回, コメントします。

### 授業に関する御意見

- まだまだわからない所はあるが、集合が楽しくなってきました。 山田のコメント: そんなに楽しいものでしょうか?
- そろそろ理解するのがむずかしくなってきました。 山田のコメント: いままでは大丈夫でしたか?
- 面白くてよかったです。 山田のコメント: 本当?
- 特になし 山田のコメント: Yo, tambien.
- 三角形の合同を例えに出しましたが、相似を例にとった方が“集合を一つの要素”ととらえるためにはよかったですよね? 山田のコメント: どちらでも同じだと思いますが...
- つまり( )はタモリです。具合良くなるといいですね。お大事に。 山田のコメント: ありがとうございます。
- みんなすごくわかっているようで不安です。なんだか全体的にもやもやするのは自分だけでしょうか? 山田のコメント: みんなそうだと思います。
- 「と」の授業楽しみます。 山田のコメント: 大したことはありません。
- 授業中に群や作用などの内容を取り入れてくださいますとありがとうございます!(今週木曜日に代数学の中間試験なのです) 山田のコメント: それで、できました?
- $C$  は順序集合 山田のコメント: にすることはできる。
- 2次元ユークリッド群のところはテンションがあがった。ローレンツ群とかの話もききたい。 山田のコメント: この授業のテーマとずれますからねえ。
- 今回の授業はギリギリ理解できました。(前回参考書の質問についての続き)今は特に使っておりません。 山田のコメント: 講義の最初に挙げた参考書のうちどれか、ではだめですか? ちなみに、前回の質問用紙も添付していただきましたが、ステープラーの針を外してスキャナに通すのに手間がかかりますのでやめてください。

### 質問と回答

質問: 順序関係がどのような関係なのかよくわかりません。

お答え: 定義5.2

質問: 「 $G'$  は全順序集合なので、「 $G_1 \subset G_2$  or  $G_1 \supset G_2$ 」より、「 $G_1 \subseteq G_2$  or  $G_1 \supseteq G_2$ 」の方が全順序の定義に従って書いている気がするのですが、どうなんでしょうか...?

お答え： 講義資料 1, 3 ページ . 部分集合の記号と真部分集合の記号について最初の時間にコメントしたはず .

質問： 帰納的順序集合の特別な場合について順序集合  $(X, \preceq)$  において  $\preceq$  を包含関係で定義するとき  $(X, \preceq)$  の任意の全順序部分集合  $P$  において  $\tilde{P} := \cup_{A \in P} A$  とおく .  $\forall A \in P$  において  $A \subset \tilde{P}$  は明らかで , 任意の  $A, B \in P$  について  $P$  が全順序集合であるから  $A \subset B$  としてよく , このとき  $A \cup B = B$  である . このことから  $\tilde{P}$  の右辺は任意の 2 つが消し合って最後には  $\exists A_{\max} \in P$  により  $\tilde{P} = A_{\max} \in P$  .  $\tilde{P}$  が上界となるから  $(B, \preceq)$  は帰納的順序集合 .  $\preceq$  を包含関係で定義したとき必ず  $(X, \preceq)$  は帰納的順序集合は正しいですか ?

お答え：  $\tilde{P}$  が  $X$  の要素であることは一般的に自明ですか ?

質問： 整列集合の定義が任意の部分集合に最大元が存在することでないのは自然数を意識してのことなのでしょうか .

お答え： それもあるんでしょうね .

質問： 加群ってなんなののでしょうか ?

お答え： 二つの意味があるようです . 今回はあまり気にしなくてよいです .

質問： 群についてなのですが ,  $(\mathbf{R}, -)$  は群であるが ,  $(\mathbf{N}, -)$  は群でない . ということで大丈夫ですか ?

お答え： 引き算は群演算になりません (結合則が成り立ちません) .

質問： 群  $G$  の集合  $X$  への作用というのが , よく分かりませんでした . 説明をお願いします .

お答え： どこがわからないのでしょうか .

質問： 物理学でよく Lie 群というものを聞いている . どのような群であるか ?

お答え： 群であり , かつ多様体 (“図形” の一般化) であるもの . たとえば , 直交行列全体がなす群 .

質問： 合同変換全体を 2 次元 Euclid 群と呼んでいましたが相似変換全体は名前がついていますか ? またそれはどのような群ですか ? Euclid 群と直交行列の定数倍を加えればできるのかと考えたのですが .

お答え： 相似変換群 .  $\{(A, a) \mid a \in \mathbf{R}^n, A = rA', A' \text{ は直交行列}\}$  にユークリッド群と同じ演算を定義したもの .

質問： 相似変換はどのような群ですか ?

お答え： 上のお答え参照 .

質問： 作用の定義が写像で与えられていますが , この写像は準同型写像ですか ?

お答え： 講義資料 6, 5 ページの脚注参照 .

質問： 空集合は群ですか ?

お答え： いいえ . 単位元  $e$  が存在するのが条件です .

質問： 任意の集合に演算をうまく与えて群にすることができますか ? お答え： どうでしょう .

質問： 群の何が同値関係なのですか ? 作用ですか ?

お答え： 講義資料 6, 5 ページ 例 6.3 の最後の 2 行のように  $\sim_G$  を決めれば同値関係 .

質問： 他学科なので , 群というものをまったく知らなかったのですが , 学生が一般に日常的に使う集合は群なのでしょうか . (ex:  $\mathbf{N}$ )

お答え：  $\mathbf{N}$  は加法に関しても乗法に関しても群となりません . ( $a^{-1}$  の存在がいえない) .

質問：  $X/\sim$  の意味がいまいちよくわかりません お答え： どのように ?

質問： 同値関係の記号「 $\sim$ 」に例 6.3 では「 $\sim_G$ 」と書いていますが , この  $G$  は何か意味があるのですか ?

お答え： 群  $G$  の作用から定まる同値関係なので  $G$  を書いてみた .

質問：  $x, y \in \mathbf{R}$  で ,  $y - x = 2\pi m$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) をみたく  $x, y$  を同じものとみなすというのは , つまり  $x \equiv y \pmod{2\pi}$  という合同数の考え方ですか .

お答え： その通り . 演習問題 6-3 をみよ .

質問：  $\mathbf{R}$  の同値関係を  $x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \text{ s.t. } x - y = 2\pi n$  で定義します . 講義資料の問題 6-3 の記法を拡張して , 商集合  $\mathbf{R}/\sim$  を  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  などと書くことは許されますか .

お答え： よくそのように書きます .

質問： 商空間という名称に “商” が使われているのは , 何か割算に似た性質のものがかかわっているからですか ?

お答え： 例 6.6 (自明な商集合) をみるとそれっぽく見えませんか ?

質問：  $X$  : 集合 ,  $\sim$  : 同値関係とします .  $q : X \ni x \mapsto \{y \in X \mid x \sim y\} \in \mathfrak{P}(X)$  という写像  $q$  を考えます . 授業中に  $q$  が単射であることを否定しましたが ,  $x, y \in X$  に対して  $x \not\sim y \Rightarrow q(x) \neq q(y)$  は成立すると思います . これは単射とは呼べないのですか ? (もちろん  $x \neq y \Rightarrow q(x) \neq q(y)$  が成立していないのはわかっています .)

お答え： 一般に単射の定義を満たさないので単射とはいいいません .

質問： 定義 6.5 にて , 「全射  $q : X \rightarrow X/\sim$  を射影とよぶ」とありますが , この写像  $q$  が単射 , つまり全単射であるときに特に正射影とよぶのでしょうか ? それとも全く違った定義なのでしょうか ?

お答え： 正射影は違った文脈で違った意味です．

質問： 同値類は集合で，商集合は集合の集合ということであってますか． お答え： あってます．

質問：  $Z/nZ$  で  $n = 1$  とした  $Z/Z$  は整数全体を同じものとみなした 1 つの要素からなる集合，で正しいですか？

お答え： 正しいです．

質問：  $X$  を三角形全体の集合とすると，代表元集合，同値類はどう表せるのでしょうか．

お答え： “合同でない三角形全体の集合”，“一つの三角形と合同な三角形全体の集合”．どうかは“表せた”と思いませんか？

質問： 同値関係というのは，集合の範囲によって違いますか．

お答え： ご質問の意味がわかりません．

質問： 結局，初等幾何の合同の話と授業内容にはどういつながりがあったんですか．

お答え： 群作用が誘導する同値関係．

質問： この講義資料の順序関係と同値関係の定義が同じようにみえるのですが，考え方として，“ $\sim$ ”を“ $=$ ”で定めるとき，講義資料の定義をみたしたものを同値関係と呼ぶということでしょうか？

お答え： 同じようにみえてはいけません．違いを発見しなさい．“考え方として”以下はどのようなことを言っているのかわかりません．

質問： 資料 3 の問 3.5(ベルンシュタインの証明の途中の考え) ができません．ヒントだけでもおねがいします．

お答え： たとえば  $X = N$  の要素 3 は  $X_\infty, X_X, X_Y$  のどの要素でしょうか．

質問： “誘導写像”のトコロで，混乱してしまいました．代数のときと表記やイメージが少しちがう気がしました

お答え： 具体的には？

質問： 「 $\tilde{G}$ 」の $\tilde{}$ は何と読むんですか？

お答え： tilder または tilde

質問：  $X, Y: \text{sets} \Rightarrow \exists f: X \rightarrow Y$  単射 or  $\exists g: Y \rightarrow X$  単射は  $X \subset Y$  or  $Y \subset X$  とどちらがうのでしょうか？

お答え： 写像がある，ということと部分集合であるということは違います．たとえば  $R$  から  $(0, 1)$  への単射は存在しますが  $R$  は  $(0, 1)$  の部分集合ではありませんね．

質問： 集合と位相の「と」って何ですか？

お答え： and

質問： 今回の講義において“商空間(商集合)  $X/\sim$  は  $P(X)$  を用いて定義されるので大きい(大きく見える)が本当は  $X$  よりも小さい”という話がありました．これは第 4 回の講義(5月3日)で示された定理( $\forall f: Y \rightarrow X$ (全射) ( $\exists g: X \rightarrow Y$ (単射) [ $f \circ g = \text{id}_X$ ] を用いて，“全射(射影)  $q: X \rightarrow X/\sim$  に対して単射(中略)が存在する”が成り立つことから示されるのではないのでしょうか．

お答え： おっしゃるとおりですね．

質問： 命題 6.7 と群の準同型定理が似ている気がするのですが，この 2 つには何か関係はあるのでしょうか．

お答え： “写像が存在する”というところまでは全く同じ．その写像が群構造を保つ(準同型写像)であるということろまで言っているのが群の準同型定理．

質問： 命題 6.7 で  $\bar{f}$  が全単射であるとき  $\iota = \text{id}$  ですよな．

お答え： そうです．

質問： 5 ページ目の例 6.6 の 2 行目の  $\iota$  (略) はなんという記号ですか？

お答え： ギリシア文字のイオタ．

質問：  $\forall \theta \forall \varepsilon_x, \varepsilon_y: \text{fix}$  すると  $G = \{(A, \mathbf{a}), A: 2 \times 2 \text{ 直交行列}, \mathbf{a} \in \mathbf{R}^2\}$  が 1 つ定まる(ここまで原文ママ:  $G$  が 1 つ定まるのではなく  $G$  の元が 1 つ定まることを言いたかったのか?)．(中略:  $x'$  は  $x$  をユークリッド変換で動かししたもの) 自由粒子の運動方程式は(略)となりもとの運動方程式と同値．これは「古典力学が回転対称性，並進対称性をもつ」と物理の言葉でいいですが，集合と位相の言葉をつかうと「古典力学はユークリッド群の誘導する同値関係を持つ」と言えるのではないのでしょうか．

お答え： 「古典力学は...同値関係をもつ」という言葉の意味が曖昧ですね．「もつ」というのがまずいです．「古典力学の基礎方程式はユークリッド変換で不変である」というのが普通です．実際にはさらに大きな群(時空に作用するガリレイ変換群)で不変です．古典力学の基礎方程式を不変にする時空への群作用はガリレイ変換に限ることも比較的容易に証明できます．なお，ご質問の“ $\forall \theta$ ”に対して決まる，というのはちょっと言い過ぎで，2 次の直交行列には回転を表さないもの(折り返し)もありますよな．

質問： 同値関係で  $x \sim x$  が  $\emptyset$  の存在を排除するとはどういうことでしょうか． $x$  が  $\emptyset$  だったとしても  $\emptyset \sim \emptyset$  は言えな

いということですか?

お答え: 違います. 集合  $X$  の二項関係とは  $X \times X$  の部分集合  $R$  のことです.  $R = \emptyset$  も一つの二項関係と考えます.  $x \in X$  が  $x = \emptyset$  という事とは全く違う文脈です. が, それは“同値関係ではない”というふうにしたいのです.

質問:  $\sqrt{Q^+}$ : 正の有理数の正の平方根全体の集合を  $Q$  から作りたいです.  $f: Q \rightarrow X$   $f(q)f(q) = q$  ( $q \in Q$ ),  $f(q')f(q) = f(q'q)$  なる  $f$  を考え,  $\text{Im } f$  をとれば  $\text{Im } f = \sqrt{Q^+}$  となりそうなのですが  $f$  が存在するかわかりません.

お答え: まず  $X$  は何にしましょうか.

質問: 講義で選択公理を用いて証明した命題は, 選択公理またはこれと同値な命題を仮定しないと証明できないですか.

お答え: 多分そうです.

質問: 例 5.1 で “ $R = \{(x, y) \in R \mid x \leq y\}$  を二項関係とみなすとき” とありますが, そもそも  $R' \subset R \times R$  が順序関係であるとして  $(x, y) \in R'$  のことを  $x \leq y$  とかいているのではないですか?

お答え: そうではないのです. 順序関係をどのような記号で書くかは文脈によります.

## 7 実数の性質とユークリッド距離

### 7.1 実数の性質

実数 実数の構成は他の講義 (たぶん解析学) に委ねるが, ここでは実数全体の集合  $R$  の性質をいくつかまとめておく:

- $R$  には加減乗除の演算が定義されており, しかるべき性質をみたしている\*<sup>1</sup>.
- 大小関係 “ $\leq$ ” という全順序が定義されている.
- 有理数全体の集合  $Q$  は  $R$  の部分集合だが, 実数  $a, b \in R$  が  $a < b$  を満たすならば,  $a < x < b$  を満たす有理数  $x$  が存在する\*<sup>2</sup>

ここに挙げた性質は有理数全体の集合  $Q$  も満たしていることに注意する.  $R$  が  $Q$  より真に大きい集合である, ということを述べているのが次の実数の連続性である.

#### 有界な部分集合

定義 7.1. 実数の部分集合  $X \subset R$  が上に有界であるとは, 次の条件を満たす実数  $m$  が存在することである: 任意の  $x \in X$  に対して  $x \leq m$ . このような  $m$  を  $X$  の上界という.

一般に  $m$  が  $X$  の上界ならば,  $m$  以上の実数は  $X$  の上界である.  $X$  の上界全体の集合が最小値をもつとき, その最小値  $m_0$  を  $X$  の上限といい,  $\sup X$  と表す.

注意 7.2. 有理数全体の集合  $Q$  に対しても有界性, 上界, 上限が定義される. たとえば,  $Y := \{x \in Q \mid x^2 \leq 2\}$  は上に有界な  $Q$  の部分集合である. 実際,  $Y \ni x$  に対して  $x \geq 1$  なら  $x \leq x^2 \leq 2$  なので  $Y$  は上に有界で, 2 はその上界である. しかし, その上限は  $Q$  には存在しない.

ここで, 実数の連続性として次を成り立つものとして話をすすめる:

公理 7.3 (実数の連続性).  $R$  の上に有界な部分集合は上限をもつ.

単調列の収束 実数の数列  $\{a_n\}$  が上に有界である, とはそのすべての項を集めた  $R$  の部分集合が上に有界となることである.

また, 数列  $\{a_n\}$  が単調非減少であるとは, 任意の番号  $j = 1, 2, \dots$  に対して  $a_j \leq a_{j+1}$  が成り立つことである.

定義 7.4. 一方, 数列  $\{a_n\}$  が実数  $a$  に収束するとは, 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して, 次を満たす番号  $N$  が存在することである:

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

2011年5月24日(2011年5月31日訂正)

\*<sup>1</sup> それはなんですか, と訊かないこと. 代数学の言葉では “体をなす” というのだが, 小学校以来用いている算術の法則が成り立つということである.

\*<sup>2</sup> このことを  $Q$  は  $R$  の稠密 (ちょうみつ, またはちゅうみつ) な部分集合である, という.

このとき  $a$  は  $\{a_n\}$  の極限值であるといい,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

と書く.

注意 7.5. 数列  $\{a_n\}$  が収束するならば, その極限値はただひとつしかない. 実際,  $\{a_n\}$  が  $a$  と  $b$  に収束すると仮定すると,

$$|b - a| = |b - a_n + a_n - a| \leq |b - a_n| + |a_n - a| = |a_n - b| + |a_n - a|.$$

ここで, 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して  $n \geq N$  なら  $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  が成り立つような  $N$  をとることができるので, 任意の  $\varepsilon$  に対して  $|b - a| < \varepsilon$ . したがって  $b = a$ .

次が成り立つ.

定理 7.6. 実数の有界な単調非減少数列は収束する.

注意 7.7. いま,  $\{p_n\}$  を, 0 から 9 までの自然数の列とする.

$$x_n := \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{10^j} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と定めると,  $\{x_n\}$  は単調非減少数列である. 一方, 任意の  $n$  に対して

$$x_n \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \leq \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \leq 1.$$

したがって  $\{x_n\}$  は上に有界なので, 極限をもつ. これが, 無限小数

$$0.p_1p_2p_3\dots$$

が表す実数である.

### コーシー列

定義 7.8. 数列  $\{a_n\}$  がコーシー列であるとは, 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して, 次をみたま番号  $N$  が存在することである:

$$m, n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

補題 7.9. コーシー列は有界である.

証明: コーシー列  $\{a_n\}$  に対して, 番号  $N$  を  $|a_m - a_n| < 1$  ( $m, n \geq N$ ) となるようにとる. すると,  $n \geq N$  ならば  $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq 1 + |a_N|$  である. したがって, 任意の  $n$  に対して  $|a_n|$  は  $\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$  の最大値を超えない.

定理 7.6 を用いると次が示せる:

定理 7.10. コーシー列は収束する.

## 7.2 ユークリッド距離

ユークリッド内積・ノルム・距離 ここでは、正の整数  $n$  に対して

$$\mathbf{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

とする。  $\mathbf{R}^n$  の要素  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  をベクトルとして表す場合は、しばしば列ベクトルを用いて表す。このことを明示するために転置の記号を用いて  $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  などと書くこともある。  $\mathbf{R}^n$  は実数を係数体とするベクトル空間 (線形空間) とみなすことができる。

定義 7.11 (ユークリッド内積). 実ベクトル空間  $\mathbf{R}^n$  の標準内積またはユークリッド内積とは、  $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n)$  に対して

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$$

によって実数を与える写像

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{R}$$

のことである。

とくに、  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  だから

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

によって与えられる写像  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  をユークリッド・ノルムという。

ユークリッド距離と極限

定義 7.12 (ユークリッド距離). 2点  $P = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbf{R}^n$  に対して

$$d(P, Q) := |\overrightarrow{PQ}| = |Q - P| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}$$

で与えられる写像  $d: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  を  $\mathbf{R}^n$  のユークリッド距離という。

ユークリッド内積・ノルム・距離が与えられていると考えるとき、  $\mathbf{R}^n$  を  $n$  次元ユークリッド空間という。

定理 7.13. ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  のユークリッド距離  $d$  は次を満たす：

- 任意の  $P, Q \in \mathbf{R}^n$  に対して  $d(P, Q) \geq 0$ . 等号は  $P = Q$  のとき、そのときに限り成り立つ。
- 任意の  $P, Q \in \mathbf{R}^n$  に対して  $d(P, Q) = d(Q, P)$ .
- 任意の  $P, Q, R \in \mathbf{R}^n$  に対して  $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ .

定理 7.13 の第 3 の性質を三角不等式という。

点列の収束 ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  の点列  $\{P_k\}$  が点  $P$  に収束するとは

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(P_k, P) = 0$$

が成り立つことである。ただし  $d$  はユークリッド距離である。このとき “ $\{P_k\}$  の極限は  $P$  である” といい、 “ $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P$ ” とかく。

補題 7.14. ユークリッド空間の点列  $\{P_k\}$  が収束するとき、その極限は一意的である。

ユークリッド空間の点列  $\{P_k\}$  がコーシー列である、とは任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、次をみたす番号  $N$  が存在することである：

$$m, k \geq N \quad \text{ならば} \quad d(P_m, P_k) < \varepsilon.$$

定理 7.15. ユークリッド空間の点列  $\{P_k\}$  が収束するための必要十分条件は、それがコーシー列となることである。

## 問題

7-1 下に有界な  $R$  の部分集合、下界、下限 ( $\inf X$  など書くことがおおい) の定義をつくりなさい。

7-2 上に有界な有理数の単調非減少数列で、有理数に収束しない例を挙げなさい。

7-3 注意 7.5 で用いた絶対値の性質を列挙しなさい。

7-4 定理 7.6 を次のようにして証明しなさい：

- 上に有界な単調非減少数列  $\{a_n\}$  の項全体からなる集合  $A$  の上界を  $\alpha$  とする。
- 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して  $\alpha - \varepsilon < a_N < \alpha$  となる番号  $N$  が存在する。
- $n \geq N$  のとき  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ 。

7-5 すべての項が有理数であるようなコーシー列で、有理数に収束しないものの例をあげなさい。

7-6 定理 7.10 を、次のようにして示しなさい：

- コーシー列  $\{a_n\}$  は有界であるから、任意の番号  $m$  に対して  $A_m = \{a_n \mid n \geq m\}$  は有界である。
- とくに  $b_m = \inf A_m$  とすると、 $b_m$  は上に有界な単調非減少数列。その極限值  $\beta$  が  $\{a_n\}$  の極限值である。

7-7 実数を係数とするベクトル空間  $V$  の内積とは写像  $V \times V \ni (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in R$  で次を満たすものである：

- 任意の零ベクトルでない  $x \in V$  に対して  $\langle x, x \rangle > 0$ 。
- 任意の  $x, y \in V$  に対して  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ 。
- 任意の  $x, y, z \in V$  と  $\alpha, \beta \in R$  に対して  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ 。

一方、実数を係数とする  $n$  次対称行列  $A$  が正値行列であるとは、任意の  $x \in R^n \setminus \{0\}$  に対して  ${}^t x A x > 0$  となることである。ここで、 $x$  は列ベクトルとみなし、 $1 \times 1$  行列をスカラーと同一視している。このとき、次を示しなさい：

- $n$  次実対称行列  $A$  が正値であるための必要十分条件は  $A$  の固有値がすべて正の実数である。
- $R^n$  の任意の内積は  $(x, y) \mapsto {}^t x A y$  の形にかけられる。ただし  $A$  は正値実対称行列である。

7-8 定理 7.13 を示しなさい。(三角不等式を示すには、内積のコーシー・シュワルツの不等式を用いる。)

7-9 定理 7.15 を示しなさい。(定理 7.10 を用いる。)