2011 年 5 月 28 日 (2011 年 5 月 31 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一講義資料 8

お知らせ

- 前回頂いたご質問への回答は次回の講義資料にていたします．
- 今回と次回は質問 (提出物) の受付を中止させていただきます．ご迷惑をおかけいたしますが，お許しください．

前回までの訂正

講義資料 5, ツォルンの補題の証明 (補題 5.6 の証明) に不備がある，とご指摘いただきました．以下のリストに修正をいれておきます．来週の講義資料に修正された証明を載せます．ご指摘いただいた皆様，ありがとうございました．

- 講義資料 5, 8 ページ, 12 行目：(誤) $T \subset \mathcal{R}_0$ (正) $T \subset U$
- 講義資料 5, 8 ページ, 18 行目：(誤) このとき，$U \in \mathcal{R}_{T'}$ をとると...
  (正) このとき，$U \in \mathcal{R}_{T'}$ をとり，$U' \in \mathcal{R}_{T'}$ であることを示したい．
- 講義資料 5, 8 ページ, 下から 16 行目：(誤) $T \subset T'$ (正) $T \subsetneq T'$
- 講義資料 5, 8 ページ, 下から 12 行目：(誤) $U' \in \mathcal{R}_{T'}$ (正) $U' \in \mathcal{R}_{T'}$
- 講義資料 5, 8 ページ, 下から 12 行目：
  (誤) (D') の場合は $T' \subset U$ だからやはり $U \in \mathcal{R}_{T'}$.
  (正) (D') の場合は $T' \subset U \subset U'$ だからやはり $U' \in \mathcal{R}_{T'}$.
- 講義資料 5, 8 ページ, 下から 11 行目 “(B') の場合を考える” 以下 7 行：次のように差し替えてください

  このとき $U \subset U \cup T \subset U \cup U' = U', T \subset U \cup T \subset T' \cup T = T'$ であるが，$U' = U \cup \{\gamma(U)\}, V = V \cup \{\gamma(V)\}$ はそれぞれ U, V に一つの要素を付け加えたものであるから，

  $$(U = U \cup T \quad \text{または} \quad U' = U \cup T) \quad \text{かつ} \quad (T = U \cup T \quad \text{または} \quad T' = U \cup T)$$

  が成立する．これらに “and”, “or” の分配法則を用いれば次の 4 つの場合のどれか一つが成り立つ：(B1) $U = U \cup T$ かつ $T = U \cup T$．このとき $U = T$ だから $U' = T'$ となり，$U' \in \mathcal{R}_{T'}$. (B2) $U = U \cup T$ かつ $T' = U \cup T$．このとき $U = T'$ なので $U' \supset U = T'$．したがって $U' \in \mathcal{R}_{T'}$. (B3) $U' = U \cup T$ かつ $T = U \cup T$．このときは $U' = T \subset T'$ だから $U' \in \mathcal{R}_{T'}$. $U \in \mathcal{R}_{T'}$．(B4) $U' = U \cup T$ かつ $T' = U \cup T$．このとき $U' = T'$ だから $U \in \mathcal{R}_{T'}$.
- 講義資料 5, 8 ページ, 下から 4 行目以降：(誤) $\mathcal{R}'_T$ (正) $\mathcal{R}_{T'}$ (3 箇所)
- 講義資料 5, 8 ページ，下から 3 行目：(誤) $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_0$ (正) $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_1$ かつ $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_0$
- 講義資料 7, 6 ページ 7 行目：(誤) $\varepsilon\varepsilon 2$ (正)$\frac{\varepsilon}{2}$ (講義前に指摘した)
- 講義資料 7, 7 ページ：ユークリッド・ノルムの記号を $\|\ \|$ から $|\ |$ に変更．
- 講義資料 7, 8 ページ, 問題 7-8: (誤) 三角不等式を用いる (正) 三角不等式を示す

8 距離空間の定義と例

■距離空間

定義 8.1. 空でない集合 X に対して，写像 $d\colon X \times X \to X$ が X の**距離** (**距離関数**) であるとは，次の条件を満たすことである：

- 任意の $x,\, y \in X$ に対して $d(x,y) \geqq 0$．等号は $x = y$ のときで，そのときに限る (正値性).
- 任意の $x,\, y \in X$ に対して $d(x,y) = d(y,x)$ (対称性).
- 任意の $x,\, y,\, z \in X$ に対して $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$ (三角不等式).

このとき，集合 X と距離関数 d の組 (X,d) を**距離空間**という.

例 8.2.
- $\boldsymbol{R}^m$ のユークリッド距離 d_{E} は距離関数である[*1]．$(\boldsymbol{R}^m, d_{\mathrm{E}})$ を m 次元**ユークリッド空間**という.
- 任意の空でない集合 X に距離を定義することができる．実際，$x,\, y \in X$ に対して

$$d_{\mathrm{disc}}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

  と定めると d_{disc} は X 上の距離関数である．これを**離散距離**とよび，(X, d_{disc}) を離散距離空間とよぶ.

■ノルムと距離

定義 8.3. $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 V の**ノルム**とは, 写像 $||\ ||\colon V \ni \boldsymbol{x} \to ||\boldsymbol{x}|| \in \boldsymbol{R}$ で

- 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $||\boldsymbol{x}|| \geqq 0$．等号は $\boldsymbol{x}$ が零ベクトルのときに成り立ち，その時に限る.
- 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して $||\lambda \boldsymbol{x}|| = |\lambda|\, ||\boldsymbol{x}||$.
- 任意の $\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leqq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$.

を満たすものである.

ノルム $||\ ||$ が定義されたベクトル空間 $(V, ||\ ||)$ を**ノルム空間**という.

定理 8.4. ノルム空間 $(V, ||\ ||)$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||$ と定めると d は V 上の距離となる.

例 8.5.
- $\boldsymbol{R} \ni x$ に対して絶対値 $|x|$ を対応させる写像 $|\ |$ は $\boldsymbol{R}$ のノルムを与える．このノルムから得られる距離は $\boldsymbol{R}$ のユークリッド距離である.
- $\boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ に対して

$$|\boldsymbol{x}|_1 := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|$$

  とおくと，$|\ |_0$ は $\boldsymbol{R}^m$ のノルムを与える．このノルムから定まる $\boldsymbol{R}^m$ の距離関数を d_1 と書く.
- $\boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ に対して

$$|\boldsymbol{x}|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|\}$$

2011 年 5 月 28 日 (2011 年 5 月 31 日訂正)

[*1] 前回は単に d と書いたが，今回はいろいろな距離と比較するために d_{E} と書くことにする.

とおくと，$|\ |_\infty$ は $\boldsymbol{R}^m$ のノルムを与える．このノルムから定まる $\boldsymbol{R}^m$ の距離関数を d_∞ と書く．

定理 8.6. $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ (問題 7-7 参照) に対して

$$||\boldsymbol{x}|| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}$$

と定めると，これは V のノルムを与える．

証明： 一般に，内積に関してシュワルツの不等式

$$(*) \qquad |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqq ||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}||$$

が成り立つ．実際，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なら等号が成り立つが，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ のときは，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y} - \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{||\boldsymbol{x}||^2}\boldsymbol{x} \qquad \text{に対して} \qquad \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geqq 0$$

という式から $(*)$ がただちに得られる．ノルムの第 1，第 2 の性質は内積の性質からすぐに得られるので第 3 の性質 (三角不等式) を示そう：

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| &= \big(\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle\big)^{1/2} = \big[||\boldsymbol{x}||^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + ||\boldsymbol{y}||^2\big]^{1/2} \\ &\leqq \big[||\boldsymbol{x}||^2 + 2||\boldsymbol{x}||\,||\boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y}||^2\big]^{1/2} = ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||. \end{aligned}$$

例 8.7. $\boldsymbol{R}^m$ のユークリッド内積 (第 7 節参照) から定まるノルムはユークリッド・ノルムで，それが定める $\boldsymbol{R}^m$ の距離はユークリッド距離である．

■点列の収束と距離の同値性

定義 8.8. 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に**収束する**とは

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

が成り立つことである．このことを

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

と書く．

ユークリッド空間の場合と同様に次を示すことができる：

補題 8.9. 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が x に収束し，かつ y に収束するならば $x = y$ である．

定義 8.10. 集合 X 上の 2 つの距離関数 d_1, d_2 が**同値**であるとは，正の定数 A, B で

$$Ad_1(x, y) \leqq d_2(x, y) \leqq Bd_1(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

が成り立つものが存在することである．

補題 8.11. 距離が同値である，という関係は，集合 X の距離関数全体の集合の同値関係を与える．

命題 8.12. 集合 X の 2 つの距離 d_1, d_2 が同値であるとする．このとき，X の点列 $\{x_n\}$ が d_1 に関して x に収束することと d_2 に関して x に収束することは同値である．

証明： 正の定数 A, B に対して $Ad_1 \leqq d_2 \leqq Bd_1$ が成り立っているとする．$\{x_n\}$ が d_1 に関して x に収束するならば,

$$0 \leqq d_2(x_n, x) \leqq Bd_1(x_n, x) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

だから $\{x_n\}$ は d_2 に関して x に収束する．逆に $\{x_n\}$ が d_2 に関して x に収束するならば $d_1(x_n, x) \leqq A^{-1}d_2(x_n, x)$ なので $\{x_n\}$ は d_1 に関して x に収束する．

例 8.13. $\boldsymbol{R}^m$ のユークリッド距離 d_{E}, および例 8.5 の d_1, d_∞ は互いに同値である．実際

$$\frac{1}{\sqrt{m}}d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq d_E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq m\, d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成り立つ．

問題

8-1 定理 8.4 を示しなさい．

8-2 例 8.5 の $|\ |_0$, $|\ |_\infty$ はともに $\boldsymbol{R}^m$ のノルムであることを示しなさい．

8-3 一般に，$p>1$ となる実数 p をひとつ固定し，$\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_m)$ に対して

$$|\boldsymbol{x}|_p := \bigl(|x_1|^p+|x_2|^p+\dots+|x_m|^p\bigr)^{1/p}$$

と定めると，$|\ |_p$ は $\boldsymbol{R}^m$ のノルムを与える (証明は少し面倒くさい)．任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^m$ に対して

$$\lim_{p\to+\infty}|\boldsymbol{x}|_p=|\boldsymbol{x}|_\infty$$

であることを確かめなさい．

8-4 距離空間 (X,d) の部分集合 $U\subset X$ に対して $d'=d|_{U\times U}$ とすると (U,d') は距離空間である．

8-5 距離空間 (X,d_X),(Y,d_Y) に対して

$$d\colon (X\times Y)\times(X\times Y)\ni\bigl((x_1,y_1),(x_2,y_2)\bigr)\longmapsto d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2)\in\boldsymbol{R}$$

は $X\times Y$ の距離を与える．これを d_X と d_Y の直積距離という．

8-6 集合 X の距離関数 d に対して，次で与えられる d_j は距離関数であることを示しなさい．

- $d_1(x,y)=\log\{1+d(x,y)\}$.
- 単調増加な C^2-級関数 $\varphi\colon[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ で $\varphi(0)=0$, $\varphi''(x)<0$ を満たすものに対して $d_2(x,y)=\varphi\bigl(d(x,y)\bigr)$.

8-7 例 8.13 を確かめなさい．

8-8 $\boldsymbol{R}^m$ のユークリッド距離と離散距離は同値でないことを示しなさい．

8-9 離散距離によって距離が与えられた距離空間 (X,d_{disc}) の点列が収束するとはどういうことか．

8-10 単位球面

$$S^2:=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\boldsymbol{R}^3\mid\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=1\}\subset\boldsymbol{R}^3\qquad(\langle\ ,\ \rangle\text{ は }\boldsymbol{R}^3\text{ の標準内積})$$

の点を $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルとみなす．このとき

- $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S^2$ に対して $d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$ と定めると，d_1 は S^2 の距離を与えることを示しなさい．ただし $|\ |$ は $\boldsymbol{R}^3$ のユークリッドノルムである．
- $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S^2$ に対して $d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\cos^{-1}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ とすると，d_2 は S^2 の距離を与えることを示しなさい．この距離はどのような幾何学的意味をもつか．
- 距離 d_1, d_2 は同値か．

8-11 二葉双曲面のひとつのピース

$$H^2:=\{\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^3\mid-(x_0)^2+(x_1)^2+(x_2)^2=-1,x_0>0\}\subset\boldsymbol{R}^3$$

を考える．

- $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_0,y_1,y_2)$ に対して $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\cosh^{-1}(x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2)$ とすると d は H^2 の距離を与えることを示しなさい．

- 写像
$$\pi\colon H^2 \ni (x_0, x_1, x_2) \longmapsto \frac{1}{x_0 - x_2}(x_1, 1) \in \boldsymbol{R}^2$$
は H^2 から上半平面 $H_+ = \{(u_1, u_2) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, u_2 > 0\}$ への全単射を与えていることを確かめなさい.
- 上半平面 H_+ 上の 2 点 $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ に対して
$$d_H(u, v) := \log \frac{\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} + \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}}{\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} - \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}}$$
と定めると，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H^2$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_H\bigl(\pi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})\bigr)$ が成り立つ，すなわち d_H は H_+ の距離を与え，π は距離空間 (H^2, d) から距離空間 (H_+, d_H) への等長写像であることを確かめなさい．このように距離を定義した上半平面 (H_+, d_H) のことを**双曲平面**という.

8-12 実数を成分とする無限数列全体の集合を $\mathcal{S}$ とする．$\mathcal{S}$ の要素 $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ と実数 λ に対して $x + y = \{x_n + y_n\}$, $\lambda x = \{\lambda x_n\}$ とすることにより $\mathcal{S}$ には加法・スカラ倍の演算が定義され，$\boldsymbol{R}$ 上の線形空間となる.

- $l^\infty := \{x = \{x_n\} \in \mathcal{S} \,|\, \{|x_n|\}$ は有界 $\}$ は $\mathcal{S}$ の線形部分空間であることを示しなさい.
- 数列 $x = \{x_n\} \in l^\infty$ に対して $||x||_\infty = \sup\{|x_n| \,|\, n = 1, 2, \dots\}$ と定めるとこれは l^∞ のノルムを与えることを確かめなさい.
- $l^1 := \{x = \{x_n\} \in \mathcal{S} \,|\, \sum |x_n|$ が収束する $\}$ は $\mathcal{S}$ の線形部分空間であることを示しなさい.
- 数列 $x = \{x_n\} \in l^1$ に対して $||x||_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ と定めると，これは l^1 のノルムを与えることを確かめなさい.
- $l^2 := \{x = \{x_n\} \in \mathcal{S} \,|\, \sum |x_n|^2$ が収束する $\}$ は $\mathcal{S}$ の線形部分空間であることを示しなさい.
- 数列 $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\} \in l^2$ に対して $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ とすると，これは l^2 の内積を与えることを示しなさい．したがって，これはノルム $||\ ||_2$ を誘導する.
- $l^\infty \cap l^1 \cap l^2$ 上で $||\ ||_\infty$, $||\ ||_1$, $||\ ||_2$ が定める距離は同値か.