2011 年 5 月 31 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一講義資料 9

お知らせ

- 4 月 26 日の講義資料にてお知らせしておりますが，都合により今回も質問用紙の受付を中止いたします．ご迷惑をおかけいたしますが，ご容赦ください．

前回の補足

講義で扱った上限の条件についての疑問が複数ありました：

$$(*)\ \xi = \sup X \Leftrightarrow (1)\ \forall x \in X : x \leqq \xi,\ (2)\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \text{ s.t. } \xi - \varepsilon \leqq x.$$
$$(**)\ \xi = \sup X \Leftrightarrow (1)\ \forall x \in X : x \leqq \xi,\ (2')\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \text{ s.t. } \xi - \varepsilon < x.$$

板書したのは $(*)$ ですが，2 つの違いは (2) と (2’) の最後の不等式に等号があるかないかです．

(2) または (2’) の条件は，“ξ より小さい数は X の上界ではない” ということです．すなわち，“$\forall\varepsilon > 0$: NOT $(\forall x \in X\,; x \leqq \xi - \varepsilon)$ ということですから，否定をとれば (2’) のようになります．

ところで (2) ではいけないか，というとそうでもないわけです．(2’) なら (2) が成り立つのはすぐにわかりますが，逆も示すことができます．実際，(2’) を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\xi - \frac{\varepsilon}{2} \leqq x$ をみたす $x \in X$ が存在しますが，これは $\xi - \varepsilon < x$ を満たしています．

前回までの訂正

- 講義資料 7, 7 ページの最後 4 行：(誤) P_n (正) P_k ；(誤) $\lim_{n\to\infty}$ (正) $\lim_{k\to\infty}$
- 講義資料 7, 8 ページの最初 5 行：(誤) P_n (正) P_k ；(誤) $m, n \geqq N$ (正) $m, k \geqq N$
- 講義資料 8, 2 ページ，定義 8.3 の項目 2: (誤) $||\lambda \boldsymbol{x}|| \leqq |\lambda|\,||\boldsymbol{x}||$ (正) $||\lambda \boldsymbol{x}|| = |\lambda|\,||\boldsymbol{x}||$

授業に関する御意見

- 距離の定義のしかたで全く様子が異なっていく幾何学って難しそう. . . **山田のコメント：** べつに幾何学でなくても. . .
- ヨウカンの 3 等分の話が非常に楽しく，分かりやすかったです． **山田のコメント：** それで，なにがわかりましたか?
- 1 年時の微積の授業を思い出しました. **山田のコメント：** どんどん思い出してください.
- $0.999\cdots \neq 1$ スレとかありましたね.
  山田のコメント： 不思議な人々ですねぇ．重要なのは「無限小数が実数を表すというのはどういうことか」ですよね.
- この時間帯に羊かんの話をされると，空腹で気が散ってしまいます. **山田のコメント：** 羊羹持ち込み可.
- 最近雨がふりますね．雨は見てるのは好きですが，ぬれるのが嫌いです. **山田のコメント：** 全くです.
- 先生は，数学者とはどのような人種だと思いますか？ **山田のコメント：** 普通の人々と同じで多様です.
- 5/28 は火曜日なので気合い入れて 1 日をすごします **山田のコメント：** 雨でしたね.
- ケーキの三等分の話がわかりやすかったです．ケーキが直方体である限り，ユークリッドならケーキを三等分できるので，二等分人よりも優秀だと思いました. **山田のコメント：** ケーキだったっけ.
- 一般の（日本語の）三角関係は三角不等式を満たさないと思います. **山田のコメント：** そうかもね.
- 先生は左目を横に動かしながら右目を縦に動かせるのですか? 僕には出来ません （・ω・）` 練習したらできるようになりますか? **山田のコメント：** さぁ
- 面白かったです. **山田のコメント：** それはどうも.
- 段々と暑くなってきましたね. **山田のコメント：** こまりましたね.
- 特になし **山田のコメント：** Ich auch.

質問と回答

質問： $\lim_{k\to\infty} P_k = P \iff \lim_{k\to\infty} d(P_k, P) = 0$ で，プリントでは k は n でかかれていて，黒板の方もはじめは k ではなく n でかいていたのになぜ書き換えたのですか．

お答え： 空間の次元を n としていますので，この文脈では n は決め打ち．したがって，$\{P_n\}$ の動く変数に n は使えないのでした．プリントは修正しました．

質問： 体とはなんですか？ $\boldsymbol{Q}$ も体ですか？

お答え： 加減乗除の演算が定義されていて然るべき性質を満たす集合．$\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ を思い浮かべてもらえばよい．

質問： 授業でいっていた公理 7.3 と同値なこととはどんなものがあるか？

お答え： 定理 7.6 とか定理 7.10 とか．

質問： 7-5 のヒントを下さい 考え方がよくわかりません．

お答え： 無理数の無限小数展開．

質問： 内積はどのへんが内積なんですか？ $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ なので積が外に出ているような気がするのですが．むしろ $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ となる外積の方が内積っぽいような．

お答え： なんで "外にでている気がする" のか分かりません．

質問： ノルムと距離にはほぼ同じ性質をもたせることができます．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ とすると $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ です．ノルムと距離は，見やすいように，わかりやすいように使い分けるものなのですか．

お答え： いいえ．ノルムは線形空間に対してしか定義されません (引き算やスカラ倍が定義されていなければなりません)．一方，距離の定義には線形空間の構造は必要ありません．5 月 31 日の講義で少しだけコメントした球面上の距離などを思い浮かべてください．

質問： 今後距離空間を扱うようですが，内積空間やノルム空間なども紹介されるのですか．

お答え： 紹介しました．

質問： ユークリッド幾何学はユークリッドさんが 3 次元までを考えたものですよね？ n 次元に拡張したのは比較的最近ですよね？

お答え： "空間" を考えたのではないと思います．のちの人々が "ユークリッド幾何学が成り立つ空間" の本質はなにか，ということを考えたのだと思います．

質問： ユークリッド内積以外でよく使われる内積はありますか？

お答え： たとえば関数空間の L^2-内積．

質問： 今日，内積の話が出ましたが，この講義では $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間での内積は $(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ or $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ のどちらとしているのでしょうか？また，1 年生時の線形代数の講義では前者，演習では後者を定義していたのですが，それぞれの定義にはもう片方と比べて何かメリットがあるのでしょうか？

お答え： よく言われるのは，数学屋は $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, 物理屋は $(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ということだそうです．実際，古典的な量子力学では後者のようにするのが普通のようです．メリットというよりは習慣なのでしょう．以下余談：実は内積を後者のように定義することにすると，$\boldsymbol{C}^m$ の標準的なエルミート内積は

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots \bar{x}_m y_m = \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{x}^* = {}^t\overline{\boldsymbol{x}})$$

とすっきり書けるのはメリットかもしれません．1 年生の教科書では二木先生の本がこちらの定義を採用していますね．

質問： ユークリッド距離とは，正規直交規定 (原文ママ：正規直交基底のことか) 以外でも適用できますか？他の規定でユークリッド距離を求めると，正規直交規定とは，異なる値が出そうですが ...

お答え： ご質問の意味がわかりません．"正規直交" という性質は，内積が定義されて初めて意味があるものです．

質問： 高校数学ではベクトルの内積を "$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$" のようにドット $\cdot$ で表しました．大学でも，力学などでは "$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$"(外積) と区別するためにドットを用いることがよくあります．なぜ大学数学では内積を表すのにドットをあまり使わないのでしょうか？

お答え： 習慣です．図形的な意味がある場合は "$\cdot$" を使う場面も多いのですが，応用上はそうでないものをたくさん考るので．古典的な量子力学で現れる内積はドットではありませんね．

質問： ユークリッド距離以外，別の距離の定義ありますか？ユークリッド距離は一般的な定義ではありませんか．

お答え： 一般的の意味が不明．他の定義は紹介しましたね．

質問： $\boldsymbol{R}^n$ やその部分集合以外にユークリッド空間となるものにはどんなものがありますか？

お答え： あなたが言う "ユークリッド空間" の定義はなんでしょうか.

質問： 高校では内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ 以外に $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = ||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}|| \cos\theta$ という表記も習いましたが，これは $\boldsymbol{R}^n$ 上でも成立するのでしょうか．それとも，$\boldsymbol{R}^n$ 上で，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角 θ が，上の内積の式で定義されるのでしょうか.

お答え： 後者です．たとえば $\boldsymbol{R}^{135}$ に分度器をおくことはできないので，内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ で定義し，零でないベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角を $\cos^{-1}\left(\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|}\right)$ と**定義する**のです．もちろん，これが well-defined になるためにはカッコの中の絶対値が 1 以下である必要があります．それを保証するのが Schwartz の不等式です.

質問： $0.p_1p_2p_3\dots$ が実数だということの理由がまだよく分かっていないのですが，この数列が収束するからということですか？

お答え： そうです.

質問： Cauchy 列の話が出てきたので質問です．たとえば，$a_1 = 1$, $\underline{a_2 = \infty}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}, \dots$ 以降 $a_n = \frac{1}{n}$ とするとき，これは有界ではないので Cauchy 列ではない (補題 7.9 の対偶) ですが，任意の $\varepsilon > 0$ をとってある N としてとれる数が 3 以上になるので，N が全ての条件 (つまり $1, 2, \dots$) をカバーできないから Cauchy 列でないというのが理由なのでしょうか？

お答え： $\infty \notin \boldsymbol{R}$ です.

質問： 数列を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とかくことがありますが，$\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のように $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で集合を表すこともあるのでしょうか.

お答え： あるようです．文脈でわかります.

質問： 授業で「無限小数が」一つに定まらない例として $0.99\dots = 1$ を挙げていましたが，「1」は無限小数だという解釈をした上での話なのですか？それとも 1 の無限小数としての表し方は $0.99\dots$ 以外にも何かある，ということなのですか？ (聞いたことはないですが. . .)

お答え： "(無限) 小数表示はひと通りでない" ということです．実際 $1 = 0.999\dots = 1.000\dots$ という表示がある，ということです.

質問： ξ(クシイ) って，どうやったら上手く書けますか？いつもグニャグニャと縦長になってしまいます.

お答え： 黒板をみて慣れてください.

質問： $Z = \{x \,|\, x \in \boldsymbol{Q},\ x^2 < 2\}$ で $\sup Z$ は存在しないというのがよく分からないです．$\forall x$ で $x \leqq \sqrt{2}$, $\forall \varepsilon > 0$ に体して，$\sqrt{2} - \varepsilon \leqq x$ を満たす x が存在すると思うのですが.

お答え： ちゃんと聞いてください．"$\boldsymbol{Q}$ では上限をもたない" といったはずです.

質問： 「$\boldsymbol{R}$ の下に有界な集合は下限をもつ」という命題も実数の連続性を表すと思うのですが，これは「$\boldsymbol{R}$ の上に有界な集合は上限をもつ」という命題と同値でしょうか.

お答え： 同値です．X が $\boldsymbol{R}$ の下に有界な集合ならば，$X' = \{-x \,|\, x \in X\}$ とすればこれは上に有界な集合で，その上限は $-\inf X$ ですね.

質問： 数学相談室で，整列可能定理はあまり使わないとききました．選択公理は，やはり <u>そのままの意味</u> で使うことが多いのですか？

お答え： 人に (分野) によると思います.

質問： 無限小数として，各桁の値がはっきりとわかっている場合，(例えば $0.1010010001\dots$ など) は実数だとわかりますか．$\sqrt{2}, e, \pi$ などの数が実数だということは，これらの数が，無限小数の形に，展開することが出来るという事実によって保証されうるのでしょうか？

お答え： いいえ．これらはそれぞれの定義から実数であることが保証されています．(1) $x^2 - 2 = 0$, $x > 0$ となる実数はただひとつ存在する．実際，$f(x) = x^2 - 2$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ は連続関数で $f(0) = -2 < 0$, $f(2) = 2 > 0$ なので，中間値の定理より $f(c) = 0$, $0 < c < 2$ となる**実数** c が少なくともひとつ存在する．さらに，そのような c はただひとつである．実際，$f(c') = 0$, $0 < c' < 2$ をみたす c' がもうひとつあったとすると，$0 = f(c) - f(c') = (c + c')(c - c')$ となるが，$c + c' > 0$ なので $c = c'$．以上より，$c^2 = 2$, $0 < c < 2$ をみたす実数 c がただひとつ存在する．それを $\sqrt{2}$ と定める．(2) 数列 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ は上に有界な単調増加数列であるから，(実数の範囲で) 極限値が存在する．その極限値を e と書く．(3) 円周率の定義をどうするかはいろいろですが $1/(1 + x^2)$ は連続関数だからたとえば区間 $[-1, 1]$ で積分可能．したがって $\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ は実数.

質問： 点列で Cauchy 列の考え方を使えるということは，応用すれば行列にも Cauchy 列の考え方が使えたりするんですか.

お答え： はい．普通に使います．

質問： 有理数の稠密性について，講義資料 7, p5 に実数 a, b が $a<b$ を満たすならば，$a<x<b$ を満たす有理数 x が存在するとありますが，これは，a, b が有理数であっても同値ですか．

お答え： 同値ではないはずです．実際，“任意の有理数 α, β $(\alpha<\beta)$ に対して $\alpha<\gamma<\beta$ を満たす有理数 γ が存在する” ことを認めて (これは $\gamma=(\alpha+\beta)/2$ とおけば，たしかに存在しますね)，“任意の**実数** a, b $(a<b)$ に対して $a<\gamma<b$ を満たす**有理数** γ が存在する” ことを示せますか?

質問： X の上限 α は，「① $\forall x\in X$ について $x\leqq\alpha$ かつ ② $\forall\varepsilon>0$ について $\exists x\in X, \alpha-\varepsilon<x$」と定義するのと，「① $\forall x\in X$ について $x\leqq\alpha$ かつ ② $\forall\varepsilon>0$ について $\exists x\in X, \underline{\alpha-\varepsilon\leqq x}$」と等号を入れるのと，どちらでもいいのですか．

お答え： 同値であることが示されますが ($a-\varepsilon\leqq x$ ならば $a-(2\varepsilon)<x$ であることに注意する)，たしかに前者の方が気持ちよいですね．

質問： 「コーシー列は収束する」の逆は成立するのですか．つまり「収束する数列はコーシー列」といえるのですか．

お答え： はい．実際，数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとしましょう．このとき，任意の正の数 ε に対して，番号 N を “$n\geqq N$ なら $|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$” となるようにとることができます．このとき， $m,n\geqq N$ となる任意の番号 m, n に対して

$$|a_m-a_n|=|(a_m-\alpha)+(\alpha-a_n)|\leqq|a_m-\alpha|+|\alpha-a_n|=|a_m-\alpha|+|a_n-\alpha|<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

したがって $\{a_n\}$ はコーシー列.

質問： 一般に無理数は無限の連分数で表すことができますが，連分数自体は有理数のハズです．そこに無限が入ってくると無理数になるのだから，不思議なものです．

お答え： それでしたら無限小数が無理数を表すことも同じくらい不思議だと思いますが．

質問： 実数の連続性より，座標軸は実数のすべて表示できます．虚数はどうやって表示ますか？

お答え： 複素平面．

質問： Cauchy 列の収束ですが，例えば $\{a_n\}=(-1)^n$ で，$\forall\varepsilon>0, \exists N: m, m+2\geqq N$ で $|a_m-a_{m+2}|<\varepsilon$ となる気がするのですが，どこが誤っているのでしょうか？

お答え： ここまではどこも誤っていませんが，ここに書いていることから “$\{a_n\}$ がコーシー列” と結論することはできません．実際 $|a_m-a_{m+3}|=2$ となります (コーシー列の定義をよくよんでくださいね)．

質問： $\boldsymbol{R}$ の連続性の公理として，「任意の単調増加で有界な有理数列は $\boldsymbol{R}$ 上で収束する」とることはできますか．

お答え： できます．このことから上に有界な単調非減少数列の収束性を示してごらんなさい．

質問： 黒板に（前略）キョリ空間 と書いてあったのですが,「このキョリ空間」とはなんでしょうか．

お答え： 「これは次回説明する距離空間とよばれるものの特別な例です」と述べたはずなんですが．

質問： p.8 問題 7-6 の方針は，十分大きな m のもとで $\forall n\geqq m$ に対して $b_m\leqq a_n<b_m+\varepsilon$ (a_n: 基本列) ということですよね．解析の講義では $t_m=\sup\{a_n|n\geqq m\}$ も考えて $\lim_{n\to\infty}a_n$ が収束することを示しました．

お答え： それでよいはずです．

質問： p.2 「加群には二つの意味がある」とありますが (1) 可換群のこと (2) 加法 “+” を演算とする群のことでしょうか? 気になってしまいました (汗)

お答え： (2) はあまり意味がないような気がしますね．可換群 (Abelian groups) の意味で使うこともありますが，“module” の意味で使うことが多いので．

質問： 前回 5 月 17 日の授業内容に関する質問とその回答が掲載されていませんが. . .

お答え： 一応，講義資料最初のページの「前回の補足」で回答したつもりです．同様のご質問が何件かありましたので．

質問： “単調非減少数列” と “単調増加数列” は同義な気がします．授業中に前者である理由をおっしゃっていましたが，納得できません．どちらも数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\forall m\in\boldsymbol{N}$ をとったとき $a_m\leqq a_{m+1}$ となることでいいのではないでしょうか?

お答え： 単調増加数列とは $a_m<a_{m+1}$ $(m=1,2,3\dots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ のこととします (たぶんこちらが普通と思うんですが，ご質問のような定義もあるようですね)．

質問： 一年の時に $\{a_n\}$ について $a_n<a_{n+1}\Rightarrow$ 狭義単調増加，$a_n\leqq a_{n+1}\Rightarrow$ 単調増加と習った気がするのですが，この講義では $a_n<a_{n+1}\Rightarrow$ 単調増加，$a_n\leqq a_{n+1}\Rightarrow$ 単調非減少ということで良いのでしょうか．

お答え： そうです．

質問： 順序体になるための十分条件はどのようなものですか? 標数 0 だけでは足りないですよね．

お答え： $\boldsymbol{C}$ は順序体になりませんが.

質問： 全宇宙の素粒子は数えられるのですか? だれが数えることが出来るのですか?

お答え： 喩え話に突っ込まないこと.

質問： 空集合の上限はなんですか. $-\infty$ ですか?

お答え： 空集合は上に有界でしょうか.

質問： $\sup X$ のとれる値は $\boldsymbol{R}$ 内ですか? $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ですか? 定義によって異なりますか? そもそも $\sup X$ は必ず値をもつのか.

お答え： 定義により異なる. 上に有界ならかならず $\boldsymbol{R}$ に値をとる, というのが連続性の公理.

質問： $0.1010010001\ldots$ は何を定めているのですか?

お答え： そういう実数.

質問： ツォルンの (b) の証明で $U \in \mathcal{R}_{T'}$ をとり $U \in \mathcal{R}_{T'}$ が成り立つことがわかるとかいてあるがこれでは変.

お答え： すでに前回他の方からご指摘いただいていて, 前回の講義資料に訂正案を上げています.

質問： ローレンツ変換を $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ を定義すると, この変換は (ミンコフスキー計量から定まる) 長さ $s(t,x)^2 = -t^2 + x^2$ を普遍に保ちます. 同様に考えると, 回転 (変換) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ はユークリッドノルム (の 2 上) を不変に保つ, といえるのではないでしょうか.

お答え： もちろんです. 実際, ご質問の変換は $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ (A は直交行列) とかけますので,

$$||\boldsymbol{x}'||^2 = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle = {}^t\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}||^2$$

ですね. 問：$\boldsymbol{R}^2$ のユークリッドノルム (ローレンツ内積, あるいはユークリッド距離) を不変にする変換をすべてあげなさい.

9 連続関数・連続写像・連続関数の空間

9.1 関数の極限と連続関数 (復習)

ここでは，区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ で定義された実数値関数 $f\colon I \to \boldsymbol{R}$ を考える．

定義 9.1. 関数 $f\colon I \to \boldsymbol{R}$ が $a \in I$ で**連続**であるとは，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことである．すなわち，任意の正の数 ε に対して，次の条件をみたす正の数 δ が存在することである：

$$|x-a| < \delta \qquad \text{をみたす任意の } x \text{ に対して} \qquad |f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

関数 f が定義域 I で連続，とは I の各点で**連続**であることとする．

補題 9.2.
- 定数関数は連続である．
- 恒等関数 $f\colon \boldsymbol{R} \ni x \mapsto x \in \boldsymbol{R}$ は連続である．
- 関数 $f, g\colon I \to \boldsymbol{R}$ が $a \in I$ で連続ならば，和 $f+g$, 積 fg も a で連続である．さらに $f(a) \neq 0$ なら逆数 $1/f$ も a で連続である．
- 連続関数の合成は連続である．

定理 9.3 (最大・最小値の定理)**.** 閉区間 $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ で定義された実数値連続関数 $f\colon [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は $[a,b]$ で最大値・最小値をとる．すなわち，ある $p,\, q \in [a,b]$ で $f(p) \leqq f(x) \leqq f(q)$ がすべての $x \in [a,b]$ に対して成り立つようなものが存在する．

定理 9.4 (中間値の定理)**.** 閉区間 $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ で定義された実数値連続関数 $f\colon [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ を満たすならば，$f(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ が存在する．

9.2 連続写像

■ε-近傍

定義 9.5. 距離空間 (X,d) 上の点 p と正の実数 ε に対して，

$$B_p(\varepsilon) := \{q \in X \mid d(p,q) < \varepsilon\} \subset X$$

を p の (距離 d に関する) **ε-近傍**という．

定義 9.6. 距離空間 (X,d_X) から距離空間 (Y,d_Y) への写像 f が**連続である**とは，任意の $a \in X$ と任意の正の数 ε に対して，ある正の数 δ が存在して

$$f\bigl(B_a(\delta)\bigr) \subset \widetilde{B}_{f(a)}(\varepsilon)$$

が成り立つことである．ここで $B_a(\delta)$ は (X,d_X) における a の δ-近傍，$\widetilde{B}_p(\varepsilon)$ は (Y,d_Y) における p の ε-近傍である．

2011 年 5 月 31 日

9.3 例：連続関数の空間

区間 I 上で定義された実数値連続関数全体の集合を

$$C^0(I) := \{f\colon I \to \boldsymbol{R} \,|\, f \text{ は } I \text{ で連続 }\}$$

と書くことにする．任意の $f,\, g \in C^0(I)$ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

で関数 $f+g,\, \lambda f$ を定義してやると $f+g,\, \lambda f \in C^0(I)$ で (補題 9.2)，これらの演算によって $C^0(I)$ は線形空間になる．

以下，簡単のため $I = [a,b]$ (閉区間) としておく．

例 9.7.

- 関数 $f \in C^0(I)$ は I で最大値・最小値をとる．そこで

$$||f|| := \max\{|f(x)| \,|\, x \in I\}$$

とすると $||\ ||$ は $C^0(I)$ のノルムを与える．これを $C^0(I)$ の一様ノルムとよぶ.

- 関数 $f \in C^0(I)$ は f で積分可能である．そこで

$$||f||_1 := \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

と定めこれを L^1-ノルムとよぶ.

- 関数 $f,\, g \in C^0(I)$ に対して

$$(f,g) := \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

とすれば，これは $C^0(I)$ の内積を与える．これを L^2-内積，この内積から定まるノルム $||\ ||_2$ を L^2-ノルムと呼ぶ.

問題

9-1 平均値の定理：閉区間 $[a,b]$ で連続かつ開区間 (a,b) で微分可能な関数 f に対して

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c) \qquad a < c < b$$

を満たす c が存在する．このことを，連続関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

が区間 $[a,b]$ で最大値・最小値をとることを用いて証明しなさい．

9-2 平均値の定理を用いて，次のことを示しなさい：

- 区間 I 上で定義された微分可能な関数 f の導関数が恒等的に 0 ならば f は定数である．（ヒント：$a \in I$ を一つ固定し，任意の $x \in I$ に対して区間 $[a,x]$ または $[x,a]$ で平均値の定理を用いる)．
- 区間 I 上で定義された微分可能な関数 f の導関数が I 上でつねに正の値をとるならば f は I で単調増加である．（ヒント：x_1, $x_2 \in I$ に対して $[x_1, x_2]$ で平均値の定理を用いる．）

9-3 区間 I 上で定義された関数 f が C^1-級であるとは，I で微分可能で，導関数 f' が連続となることである．開区間 (a,b) で定義された C^1-級関数 f が $c \in (a,b)$ で $f'(c) > 0$ を満たすならば，ある正の数 ε が存在して $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ で f は単調増加である．このことを示し，"f が C^1-級" の仮定を "f が微分可能" に変えると正しくないことを示しなさい．

9-4 $\boldsymbol{R}^2 \ni \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対して

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}, \\ d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|, \\ d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} \end{aligned}$$

により距離 d_{E}, d_1, d_∞ を定める．これらの距離に関する原点の ε 近傍を図示しなさい．

9-5 $\boldsymbol{R}$ に標準的な距離 (ユークリッド距離) を入れた場合，定義 9.6 の連続性は定義 9.1 で与えた連続性と同じ概念であることを確かめなさい．

9-6 距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) と連続写像 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ に対して，合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ は連続写像であることを示しなさい．

9-7 例 9.7 を確かめなさい．さらにこれらのノルムから定まる $C^0(I)$ の距離は同値でないことを示しなさい．

9-8 $I = [-\pi, \pi]$ で定義された関数

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \qquad s_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx$$

とすると，$\{c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \dots\}$ は $C^0([-\pi,\pi])$ の L^2-内積に関する正規直交系をなす，すなわちそれぞれのノルムは 1 で，相異なる 2 つは内積が 0，すなわち直交することを確かめなさい．