2011 年 6 月 7 日 (2011 年 6 月 21 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一講義資料 10

お知らせ

- 前回は質問用紙受付を中止し，ご迷惑おかけいたしました．今回は受付をいたします．
- 次回，6 月 14 日に試験の予告をいたします．皆様お誘い合わせの上おいでください．

10 開集合・閉集合

以下，とくに断らない限り，$\boldsymbol{R}^n$ にはユークリッド距離が与えられているものとする．特に $\boldsymbol{R}$ には $d(x,y)=|y-x|$ により距離 (標準的な距離) が定義されているものとしておく．

■開集合 距離空間 (X,d) 上の点 $p\in X$ と正の実数 r に対して $B_p(r)=\{x\in X\,|\,d(p,x)<r\}$ を点 p の (距離 d に関する) r-近傍という．

定義 10.1. 距離空間 (X,d) の部分集合 $U\subset X$ が**開集合** open set である，とは，各 $x\in U$ に対して正の実数 ε で $B_x(\varepsilon)\subset U$ となるものが存在することである．

例 10.2. 距離空間 (X,d) の点 $p\in X$ の r-近傍 $B_p(r)$ は開集合である．このことを示そう．点 $x\in B_p(r)$ とすると，$\delta:=d(p,x)<r$ である．そこで $\varepsilon=r-\delta$ とすると ε は正の数で，$B_x(\varepsilon)\subset B_p(r)$ である．実際，$y\in B_x(\varepsilon)$ をとると $d(x,y)<\varepsilon$ なので，三角不等式から

$$d(p,y)\leqq d(p,x)+d(x,y)=\delta+d(x,y)<\delta+\varepsilon=\delta+r-\delta=r.$$

したがって $y\in B_p(r)$.

例 10.3. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の 1 点からなる集合 $\{p\}$ は開集合でない．これを示すには，任意の正の数 ε に対して $B_p(\varepsilon)$ が $\{p\}$ の部分集合でないことを示せば良い．実際，$p=(p_1,\dots,p_n)$ とするとき，与えられた正の数 ε に対して $q=(p_1+\frac{\varepsilon}{2},p_2,\dots,p_n)$ とすると $d(p,q)=\frac{\varepsilon}{2}$ なので $q\in B_p(\varepsilon)$ であるが，$p\neq q$ なので $q\notin\{p\}$.

注意 10.4. 例 10.3 は，任意の距離空間 (X,d) の一点集合が開集合でない，ということを言っているわけではない．演習問題 10-3 参照．

命題 10.5 (開集合の性質)**.** 距離空間 (X,d) に対して

(1) $\emptyset$, X は開集合である．
(2) 任意の X の開集合族 $\{U_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ に対して $\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ は開集合である．
(3) 開集合 U_1, U_2 に対して $U_1\cap U_2$ は開集合である．

2011 年 6 月 7 日 (2011 年 6 月 21 日訂正)

命題 10.5 の (3) から有限個の開集合の共通部分は開集合であることがわかる．

例 10.6. 自然数 n に対して $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ (開区間) とおくと，U_n は $\boldsymbol{R}$ の開集合 (演習問題 10-1)．集合族 $\{U_n \,|\, n \in \boldsymbol{N}\}$ を考えると

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = (-1, 1), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$$

となり，この集合族の共通部分は開集合ではない（例 10.3)．すなわち，**無限個の開集合の共通部分は開集合とは限らない**．

定義 10.7. 距離空間 (X, d) の部分集合 $U \subset X$ に対して，$p \in X$ が U の**内点**であるとは，ある正の数 ε で $B_p(\varepsilon) \subset U$ となるものが存在することである．

集合 $U \subset X$ に対して，U の内点全体の集合を U の**内部** とよび，U° と書く．

命題 10.8. 距離空間 (X, d) に対して

- $U \subset X$ に対して U° は U に含まれる最大の開集合である．すなわち，$U^\circ \subset U$ は開集合であり，かつ $V \subset U$ が開集合ならば，$V \subset U^\circ$.
- $U \subset X$ が開集合であるための必要十分条件は U のすべての点が U の内点となること，すなわち $U = U^\circ$ が成り立つことである．

■閉集合

定義 10.9. 距離空間 (X, d) の部分集合 $V \subset X$ が**閉集合**であるとは $V^c = X \setminus V$ が開集合となることである．

命題 10.10. 距離空間 (X, d) の 1 点 $p \in X$ からなる集合 $\{p\}$ は閉集合である．

証明： $U = X \setminus \{p\}$ とおき，$q \in U$ をとり $\varepsilon = d(p, q)$ とおく．$q \neq p$ だから $\varepsilon > 0$ であって，$p \notin B_q(\varepsilon)$．したがって $B_q(\varepsilon) \subset U$ だから U は開集合.

注意 10.11. 例 10.3 と違い，命題 10.10 は任意の距離空間に対して成立する．距離空間を一般化した "位相空間" の中には，1 点集合が閉集合でないものもある．

命題 10.12. 距離空間 (X, d) に対して

(1) $\emptyset$, X は閉集合である．
(2) 任意の X の閉集合族 $\{U_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ に対して $\cap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は閉集合である．
(3) 閉集合 U_1, U_2 に対して $U_1 \cup U_2$ は閉集合である．

定義 10.13. 距離空間 (X, d) の部分集合 $V \subset X$ に対して，$p \in X$ が V の**触点**であるとは，任意の正の数 ε に対して $B_p(\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ となることである．

集合 $V \subset X$ に対して V の触点全体の集合を V の**閉包** といって $\overline{V}$ と書く．

命題 10.14. 距離空間 (X, d) に対して

- $V \subset X$ に対して $\overline{V}$ は V を含む最小の閉集合である．すなわち $\overline{V} \supset V$ は閉集合であり，かつ

$V \subset W \subset \overline{V}$ となる閉集合 W は $W = \overline{V}$ のみである．
- $V \subset X$ が閉集合であるための必要十分条件は $V = \overline{V}$ が成り立つことである．

定義 10.15. 集合 $U \subset X$ に対して，$p \in X$ が U の**境界点**であるとは，U の触点でありかつ $U^c = X \setminus U$ の触点でもあることである．U の境界点全体の集合を ∂U と書き，U の**境界**という．

命題 10.16. 距離空間 (X, d) の部分集合 U に対して

$$U^\circ = U \setminus \partial U, \qquad \overline{U} = U \cup \partial U.$$

■連続写像

定理 10.17. 距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 $f\colon X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は，任意の Y の開集合 U に対して $f^{-1}(U)$ が X の開集合となることである．

証明： 写像 f が連続であるとする．開集合 $U \subset Y$ に対して $p \in f^{-1}(U)$ とすると $f(p) \in U$ であるから，U が開集合であることより，ある正の数 ε が存在して $\widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon) \subset U$ が成り立つ．ただし $\widetilde{B}_q(\varepsilon)$ は (Y, d_Y) における q の ε-近傍である．この ε に対して，f の連続性から，ある正の数 δ が存在して $f\bigl(B_p(\delta)\bigr) \subset \widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon) \subset U$ が成り立つ．すなわち

$$B_p(\delta) \subset f^{-1}\left(f\bigl(B_p(\delta)\bigr)\right) \subset f^{-1}(U)$$

となる．p は $f^{-1}(U)$ から任意にとってきたのだから $f^{-1}(U)$ は開集合である．
逆に，任意の開集合 $U \subset Y$ に対して $f^{-1}(U)$ が開集合であったとする．点 $p \in X$ を一つ固定し，正の数 ε を任意にとると，$\widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon)$ は Y の開集合であるから $V := f^{-1}\bigl(\widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon)\bigr)$ は X の開集合．とくに $p \in V$ なので，ある正の数 δ が存在して $B_p(\delta) \subset V$．このとき

$$f\bigl(B_p(\delta)\bigr) \subset f(V) = f\left(f^{-1}\bigl(\widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon)\bigr)\right) \subset \widetilde{B}_{f(p)}(\varepsilon).$$

したがって f は p で連続．$p \in X$ は任意だったから f は連続写像である．

系 10.18. 距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 $f\colon X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は，任意の Y の閉集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の閉集合となることである．

問題

10-1 $\boldsymbol{R}$ の開区間は開集合，閉区間は閉集合である．また，区間 $(a, b]$ は開集合でも閉集合でもない．

10-2 集合 X 上の距離 d_1 と d_2 が同値ならば，d_1 に関する開集合は d_2 に関する開集合であり，d_2 に関する開集合は d_1 に関する開集合である．

10-3 集合 X の任意の部分集合は離散距離 d_{disc} に関する開集合であり，かつ閉集合でもある．

10-4 命題 10.5，10.12.

10-5 命題 10.8, 10.14, 10.16.

10-6 距離空間 (X, d) 上の点 p と正の数 ε に対して $U = B_p(\varepsilon)$ とするとき，

$$U^\circ = U = \{x \in X \mid d(p, x) < \varepsilon\}, \qquad \overline{U} = \{x \in X \mid d(p, x) \leqq \varepsilon\}, \qquad \partial U = \{x \in X \mid d(p, x) = \varepsilon\}.$$

10-7 距離空間 (X_1, d_1), (X_2, d_2) の直積 $X_1 \times X_2$ に対して

$$d\bigl((x_1, x_2), (y_1, y_2)\bigr) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \qquad \bigl((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2\bigr)$$

と定める.

- d は $X_1 \times X_2$ の距離を定める．これを d_1 と d_2 の**直積距離**といい，$d = d_1 \times d_2$ と書く.
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{R}^n$ の直積距離は $\boldsymbol{R}^{m+n}$ のユークリッド距離と同値である.
- (X_1, d_1) の開集合 U_1 と (X_2, d_2) の開集合 U_2 に対して $U_1 \times U_2$ は $X_1 \times X_2$ の距離 $d_1 \times d_2$ に関する開集合である.
- $j = 1, 2$ に対して，射影

$$\pi_j \colon X_1 \times X_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \pi_j(x_1, x_2) = x_j \in X_j$$

  は $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$ から (X_j, d_j) への連続写像である.
- 距離空間 (Y, d) から $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$ への写像 $f \colon Y \to X_1 \times X_2$ が連続であるための必要十分条件は，射影との合成 $f_1 = \pi_1 \circ f$, $f_2 = \pi_2 \circ f$ がともに連続となることである.

10-8 $\boldsymbol{R}^m$ にはユークリッド距離が与えられているとする.

- $\boldsymbol{R}$ の区間 I から $\boldsymbol{R}$ への写像 (すなわち関数) が微分可能ならば連続である.
- $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U から $\boldsymbol{R}$ への写像 (すなわち m 変数関数) が微分可能ならば連続である.
- $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U から $\boldsymbol{R}^n$ への写像

$$f \colon \boldsymbol{R}^m \supset U \ni (x_1, \dots, x_m) \longmapsto f(x_1, \dots, x_m) = \bigl(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots f_n(x_1, \dots, x_m)\bigr) \in \boldsymbol{R}^n$$

  が連続であるための必要十分条件は関数 $f_j \colon U \to \boldsymbol{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ が連続となることである.

10-9 離散距離空間 (X, d_{disc}) から距離空間 (Y, d) への任意の写像は連続である.

10-10 $\boldsymbol{R}^m$ 上で定義された連続関数 f_1, f_2,... f_n に対して

$$U := \{(x_1, \dots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid f_j(x_1, \dots, x_m) > 0, j = 1, \dots, n\},$$
$$V := \{(x_1, \dots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m \mid f_j(x_1, \dots, x_m) \geqq 0, j = 1, \dots, n\}$$

とおくと U, V はそれぞれ $\boldsymbol{R}^m$ の開集合，閉集合となる.

10-11 次の例を挙げなさい：距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) に対して，連続写像 $f \colon X \to Y$ で

- X のある開集合 U の像が開集合でないもの.
- X のある閉集合 V の像が閉集合でないもの.

10-12 $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を，実数を成分とする $m \times n$ 行列全体の集合とする．これは集合としては $\boldsymbol{R}^{mn}$ とみなすことができるのでユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$，ユークリッド距離 d を与えることができる．このように内積，距離を与えたとき，

- $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ に対して $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\, {}^t\! AB = \mathrm{tr}\, A^t B$ である.
- 次の集合は $M_{m,m}(\boldsymbol{R})$ の開集合か，閉集合か.

$$\mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R}) = \{A \in M_{m,m}(\boldsymbol{R}) \mid A \text{ は正則 }\}.$$
$$\mathrm{SL}(m, \boldsymbol{R}) = \{A \in M_{m,m}(\boldsymbol{R}) \mid \det A = 1\}.$$
$$\mathrm{O}(m, \boldsymbol{R}) = \{A \in M_{m,m}(\boldsymbol{R}) \mid A \text{ は直交行列 }\}.$$

- $\bigl(M_{m,m}(\boldsymbol{R}) \setminus \mathrm{GL}(m, \boldsymbol{R})\bigr)^{\circ}$ を求めなさい.