2011 年 6 月 14 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一講義資料 11

お知らせ

- 本日「試験予告」として配布した用紙のとおり，6 月 28 日 (火曜日) に行う試験の予告を行います．しかるべき理由でこの試験を受験できない方は**事前に**山田までご連絡ください．なお，連絡なく試験に欠席された方は**単位を得る権利を失います**．

前回までの訂正

- 距離空間 (X,d) の一点集合 $\{p\}$ が閉集合であることを示す際に，$X\setminus\{p\}\ni x$ に対して $\varepsilon=d(x,p)/2$ とすると $B_x(\frac{\varepsilon}{2})\subset X\setminus\{p\}$ としたようですが，$B_x(\varepsilon)\subset X\setminus\{p\}$ で十分です．(もちろん $\varepsilon/2$ でも間違ってはいませんが.)
- この講義では閉集合を開集合の補集合として定義しましたが，他の授業では別のしかたで定義したようです．これらの定義は同値です．すなわち：距離空間 (X,d) の部分集合 $V\subset X$ が閉集合であるための必要十分条件は V の点列 $\{p_n\}$ が X 内で q に収束するならば $q\in V$．
- 講義資料 3，9 ページ 1 行目：(誤) $f(x)=(x,0)$ (正) $f(x)=(x,\frac{1}{2})$

授業に関する御意見

- 60 分くらいやったら，5 分くらい休けい入れて下さい．集中力が続きません． **山田のコメント：** 若いのに...
- 開集合の概念から連続性の定義ができるのはすごいですね． **山田のコメント：** 抽象化してこのような概念を取り出す，というのは面白いと思います．
- 面白かったです． **山田のコメント：** そう?
- たまにでる線型代数の話を忘れてることがあるので復習します． **山田のコメント：** そうしてください．
- 学ぶことが多いですね． **山田のコメント：** そりゃそうだ．
- サスペンダーにあってました．ぼくも欲しいです． **山田のコメント：** あげません．
- 気付いたらもうすぐテストですね. . . 早いです． **山田のコメント：** 全くです．
- 難しくなってきたと感じます>< **山田のコメント：** まだまだ
- サスペンダー カワ (・∀・) イイ!! **山田のコメント：** どーも
- 教室が前ほどの人口密度がないのでテストが 1 つの部屋でできそうな気がします． **山田のコメント：** そんな気もしますが名簿に名前があるからには場所を提供する必要があるので．
- 問題が多くなってきた．きつい **山田のコメント：** まぁ，そう言わないで．
- 最初の頃に比べてかなり出席者数が減っていますが，どれくらい減っているのでしょうか？ **山田のコメント：** たくさん
- 友人：「因数分解 (数学) なんて，社会に出たら何の役にも立たないじゃないか！」$\longrightarrow$ ウマイ返し方を教えて下さい．(汗) **山田のコメント：** 君が役にたてられないだけでは?
- 日本ってすごいですね．韓国では韓国語で書かれている大学の教科書なんて見たことがないですよ．本当にうらやましいです．(大学 1 年生の微積の教科書も Stewart の Calculus を使っていました) **山田のコメント：** そうらしいですね．数学用語の翻訳と標準化も必要，ときいています．かなり先にいくまで英語の必要性を感じない，という問題もありますが．

質問と回答

質問： 授業で $||A||^2=\operatorname{tr}({}^tAA)=\sum_{i,j=1}^m(a_{ij})^2$ でしたが，$\operatorname{tr}({}^tAA)=\sum_{i=1}^m(a_{ii})^2$ ではないですか？

お答え： いいえ．$A=(a_{ij})$，${}^tA=(\tilde a_{ij})$ とすると $\tilde a_{ij}=a_{ji}$ (転置の定義) だから ${}^tAA$ の (i,j) 成分は $\sum_m \tilde a_{im}a_{mj}=\sum_m a_{mi}a_{mj}$．したがって ${}^tAA$ の (i,i) 成分は $\sum_m \tilde a_{im}a_{mi}=\sum_m a_{mi}a_{mi}$．これを i について和をとれば結論の式がでます．

質問： $\varphi:\mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R})\ni A\mapsto {}^tAA\in\mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R})$ が連続は自明ですか？ (講議 (原文ママ：講義のことか) の最後の方で，φ が連続，$\{E\}$ が閉集合であることから，$\varphi^{-1}(\{E\})$ も閉集合であり，直交行列全体 $\mathrm{O}(m,\boldsymbol{R})$ が閉集合だという流れなのでしょうか？)

お答え： 括弧内：そうです．連続性は “多項式の連続性” から得られます．

質問： $\mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R})=\{A$: 実 $m\times m$ 行列 $\}$ で，Euclid 距離を入れることができるというのがいまいち良く分かりません．

お答え： いまいち，というのはどのくらいわかるのでしょう．

質問： GL, SL とは何の略ですか？

お答え： General linear, special linear.

質問： 「正則行列全体の集合は開集合」ですが，イメージがわきません．幾何学的に何が意味があるのですか．

お答え： 正則行列をちょっと変化させても正則行列．

質問： 集合 $\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{Z}$ などは開集合ですか？

お答え： どのような距離に関して?

質問： ユークリッド距離や，d, d_∞ 以外でよく使われる $\boldsymbol{R}^n$ 上の距離にはどのようなものがありますか？

お答え： d はなんでしょう?

質問： ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ では閉集合かつ開集合なのは $\boldsymbol{R}^n$ と $\emptyset$ 以外にありますか？

お答え： ありません．それが連結性です．次回やるかもしれません．

質問： 距離空間 (X,d) において X, $\emptyset$ 以外に開集合かつ閉集合という集合はありえるか？

お答え： 離散距離を与えた距離空間 (X, d_{disc}) では X の全ての部分集合が開集合．したがって X の全ての部分集合が閉集合．

質問： (X,d) を距離空間とします．d が discrete でないとき，X の部分集合で開かつ閉となるものが X と $\emptyset$ 以外に存在することはありますか．

お答え： そういうものが存在しないとき，X は連結である，といいます．次回やるかもしれません．

質問： 集合 A の全ての要素に対して $(\forall p \in A)$ $B_p(\varepsilon) = \{x \in A \mid d(x,p) \leqq \varepsilon\} \subset A$ がとれれば，閉集合ですか？

お答え： この集合は閉集合ですが，それを $B_p(\varepsilon)$ と書くのはまずいのでは?

質問： 定理 10.17 において，「任意の Y の開集合 U に対して $f^{-1}(U)$ が X の開集合」とありますが，$f^{-1}(U)$ は一意的に定まるのでしょうか．(つまり，像が U となる写像 f はつねに単射なのでしょうか)

お答え： 逆写像と混同していませんか? 4 月 19 日の講義で扱った “逆像” です．講義資料 2, 6 ページ．

質問： 開集合 U_n に対して $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$ で開集合となりませんが，「閉集合 V_n に対して，$\cup_{n=1}^{\infty} V_n$ は閉集合とは限らない」ということになりますか？

質問： $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合 V_n の集合族 $\{V_n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ に対して，$\cup_{n=1}^{\infty} V_n$ は閉集合とは限らないですか．

お答え： 例 10.6 の補集合をとればわかる．

質問： 距離を定義するのには何かの基準とかがありますか？勝手に定義してもいいですか？

お答え： 解きたい問題にあわせて定義します．実際に使う場面 (解析学とか幾何学とか) で例をたくさん見ます．

質問： 写像の連続の定義について，(1) 近傍による定義 (2) 開集合による定義 (3) 点列の収束を用いた定義を知っていますが，考える空間によっては他の定義の仕方があるのでしょうか．

お答え： だいたいこんなものだと思いますが，状況により “連続であるための必要十分条件” があればそれも定義にできますね．

質問： $B_p(r)$: Openset $(r>0)$ r-近傍がとれれば，位相 $\mathcal{O} = B_p(r)$ がとれたと言えますか？

お答え： “$\mathcal{O} = B_p(r)$” の等号がおかしいと思いますが，“基 (基本近傍系) による位相の定義” になります．

質問： 距離空間 (X,d) の 1 点 $p \in X$ からなる集合 $\{p\}$ は閉集合であるということが一般の位相空間では成り立たないとありましたが，それはなぜですか？

お答え： そういう例があるからです．後期に扱うはずです．

質問： 10.5(3) の U_1，U_2 : 開 $\Rightarrow U_1 \cap U_2$: 開より無限個では無理でも有限個の開集合 $U_1, U_2 \dots, U_N$ に対しては $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_N$ も開集合といえますよね．

質問： 講義資料 10, 2 ページ 1 行目．

質問： $\cup U_\lambda$ と書くと，これは，集合族 $\{U_\lambda\}$ の有限個，無限個の和集合どちらも表すのですか．

お答え： λ が動く範囲によります．

質問： “$B_p(\varepsilon)$” は，書くときに毎回「(ただし $B_p(\varepsilon)$ は…ε-近傍)」と書かなければいけないのですか？

お答え： あまり標準化されていないと思うので，なるべく書いた方がいいと思います．

質問： $[a,b)$ のような集合は半開半閉と言えますか？言えるなら，半開半閉空間はどう定義すべきですか？

お答え： そういう定義は普通しません．

質問： (X,d) を距離空間とし，$A \subset X$ とすると A の点列が収束すれば極限点は一意的ですか．簡単に説明してください．

お答え： 補題 10.8 ですね．$\{x_n\}$ が ξ と η に収束するならば $d(x_n,\xi)$ も $d(x_n,\eta)$ も 0 に収束する．三角不等式から $0 \leqq d(\xi,\eta) \leqq d(x_n,\xi) + d(x_n,\eta)$ が成り立つので $n \to \infty$ とすると $d(\xi,\eta) = 0$．したがって $\xi = \eta$．

質問： 連続性を考える際に「開集合という概念があれば距離という概念がなくても連続を定義できる」とおっしゃっていましたが，そもそも開集合の定義に距離の概念を使っている気がします．発言自体はどのようなニュアンスだっ

たのでしょうか？私の聞き間違いだったら申し訳ありません．

お答え： ですから，距離から定まる開集合の性質を取り出して，それを用いて “開集合の概念” を再定義するわけです．$\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{R}^n$ の距離から “距離の概念” を抽出したのと同じです．

質問： ある集合 X とそのべき集合の部分集合 $\mathcal{O}$ について，$\mathcal{O}$ がある条件をみたすとき集合の組 $(X, \mathcal{O})$ が位相空間ということ，$\mathcal{O}$ の要素を開集合であることとすると位相空間になるということを聞きました．これは，開集合という概念があると連続性が定義できるということなど，開集合が連続性に貢献しているから開集合と位相空間に大きな関係があるのでしょうか．

お答え： “開集合系” を与えることが “位相” を定義すること．後期にやります．

質問： 志賀先生の授業で閉集合とは $X \subset \boldsymbol{R}^n$ としたとき任意の点列 $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$，$P_k \in X$ を考えたとき $P_k \to P$ $(k \to \infty)$ のとき $P \in X$ が成り立つとき X は閉集合と習いましたが，これは定義の違いですか？それとも同値なんですか？

質問： 1 点集合が閉集合ならハウスドルフか．

お答え： そうとは限りません．T_1 です．

質問： X を集合, d_1 と d_2 を X の距離とすると，問題 10-2 で，「d_1 と d_2 が同値 $\Rightarrow$ d_1 に関する開集合全体と，d_2 に関する開集合全体が一致する」とありますが，これの逆は成り立たないのでしょうか．

お答え： 成り立ちません．$\boldsymbol{R}$ の標準的な距離 d に対して $d' = d/(1+d)$ とすると，d と d' は同値ではありませんが，開集合は一致します．

質問： 「開でも閉でもない」全ての V に対して V^c も「開でも閉でもない」と言えますか？ (閉でないのはわかるのですが，開でないのを上手く証明できません. . .)

お答え： $V = (V^c)^c$ が閉でないのだから V^c は開でない．

質問： (X, d) の任意の部分集合 $U \subset X$ は，(i) 開かつ閉でない (ii) 開でないかつ閉 (iii) 開かつ閉 (iv) 開でないかつ閉でない の 4 つのうちどれか 1 つだけがあてはまる，と思っていいんですか？

お答え： そりゃそうでしょ．2 つの条件の組み合わせは 4 とおり．

質問： 全くもってあやふやな質問なのですが，内積空間 → ノルム空間 → 距離空間 → 位相空間の順に，「ゆるい」空間になっているというとらえ方で良いのでしょうか？また、これらより「ゆるい」条件,「きつい」条件で，有名なものはあるのでしょうか．

お答え： “ゆるい”, “きつい” という感覚はこれでよいと思います．“有名な” とは?

質問： 開集合の定義から閉集合を定義していますが，閉集合の定義から開集合を定義したりできるのでしょうか？ (2〜3 冊集合と位相についての本を見ましたがどれもこの授業と同様に開集合の定義からでした．)

お答え： 開集合から定義することが多いですが，閉集合を用いても同値な定義ができます．

質問： 講義資料 6 についてですが，問題 6-3 では α と $[\alpha]$ は写像のとんだ先がちがうので誘導する写像は考えられないのでは？

お答え： そうですね．今回ちょっと時間がないので次回の資料にて補足します．

質問： 開集合の和集合は，集合が無限個の場合にも開集合になるが，無限個の開集合の共通部分は開集合になるとはかぎらない．とのことですが，閉集合の和集合，共通部分はどうなるのでしょうか．ド・モルガンの法則を使えば，$X \setminus \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \cap_{\lambda\in\Lambda}(X \setminus U_\lambda)$, $X \setminus \cap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \cup_{\lambda\in\Lambda}(X \setminus U_\lambda)$ であり，閉集合の定義から，$X \setminus U_\lambda$ は開集合なので，有限個の閉集合を考えたときは，和集合，共通部分共に閉集合であるが，無限個の閉集合を考えたときは，上記の結果から共通部分は閉集合になるが，和集合は閉集合になるとは限らない． これで正しいですか．

お答え： ただしいです．

質問： 『「$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して，U_λ は開集合」$\Rightarrow$ 「$\cap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は開集合」』. . . (i) が成り立たないと資料にありますが,『「$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して，V_λ は閉集合」$\Rightarrow$ 「$\cup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ は閉集合」』. . . (ii) も成り立ちませんね．(反例：$\forall n \in \boldsymbol{N}$, $[\frac{1}{n}, 1]$: 閉集合, $\cup_{n\in\boldsymbol{N}}[\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$)．(i), (ii) を，成り立たない具体例を用いずに証明したいのですが，どのようにすればよいか教えて頂けますか？ ($(\cap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)^c = \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^c$, $(\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)^c = \cap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^c$ が言えそうなので，一方だけでも構いません．)

お答え： “必ずしも成立しない” を示すのに反例を挙げない，ということ?

質問： “(X, d) に対して，X が開かつ閉集合である” ところの X というのは，全体集合を意味するのでしょうか．

お答え： そうです．

質問： (X, d) での d を標準的な距離とするとき，開かつ閉集合である集合は X, $\emptyset$ 以外にも存在するのでしょうか？もし存在性 (もしくは存在しないこと) の証明はいままで学んだことで証明できますか？

お答え： 一般の集合 X の “標準的な距離” とはなんでしょう．

質問： 授業では開集合のことを “点線で囲んでるもの” と表現していたと思いますが，実際に境界に 1 つでも点が属していたらその集合は開集合ではありませんね?

お答え： 開集合ではありません．

質問： 講義資料 9 の 5 ページに ” 空集合の上限はなんですか? $-\infty$ ですか” という質問がありましたので，考えてみました．まず，$a = \sup\emptyset$ であるとは次の 2 条件が成り立つことです．(i) $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \leqq a)$ (a は上界である) (ii) $\forall b[\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \leqq b) \Rightarrow a \leqq b]$ (a は最小である) すると ($-\infty \in \boldsymbol{R}$ ならば) $a = -\infty$ はこの条件をみたすので $\sup\emptyset = -\infty$ となるのではないでしょうか? また (i) より任意の $a \in \boldsymbol{R}$ が $\emptyset$ の上界となり (つまり $\emptyset$ の上界が存在して)，さらに $\forall X, Y \subseteq \boldsymbol{R}[X \subseteq Y \Rightarrow \sup X \leqq \sup Y]$ より $\forall x[\sup\emptyset \leqq \sup\{x\}]$ となることからも $\sup\emptyset = -\infty$ が示されると思います．同様にして $\inf\emptyset = +\infty$ となるので，空集合 $\emptyset$ については $\sup\emptyset < \inf\emptyset$ がなりたつと思います．

お答え： $\pm\infty$ は $\boldsymbol{R}$ の要素ではないのですが，$\boldsymbol{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ という集合に形式的に大小を与えればそうなるみたいですね．こういう事情から通常は $\emptyset$ の sup, inf はなるべく扱わないことにするのが安全です．とくに，実際に用いる場面では，対象となる集合が空でないことを確かめるのが普通です．この講義での上限，下限の定義は，上に (下に) 有界な集合に対して定まる実数として定義していますので，上限，下限が “存在しない” というべきかもしれません．

11 同相写像・連結性

今回も，とくに断りのない限り $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}^n$) には標準的な距離 (ユークリッド距離) が与えられているものとする．

■閉集合について (前回の補足) この講義では，距離空間 (X,d) の部分集合 $V \subset X$ が閉集合である，とは V^c が開集合である，と定義した (定義 10.9).

定理 11.1. 距離空間 (X,d) の部分集合 $V \subset X$ が閉集合であるための必要十分条件は，任意の V の点からなる収束する点列の極限が V の点となることである．

証明： 必要性：閉集合 V の点からなる点列 $\{x_n\}$ が $\xi \in V^c$ に収束するとする．すると，V^c は開集合であるから，ある正の数 ε が存在して $B_\xi(\varepsilon) \subset V^c$. ここで $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ であるから上でとった ε に対してある番号 N が存在して $n \geqq N$ ならば $d(x_n,\xi) < \varepsilon$. したがってこのような n に対して $x_n \in B_\xi(\varepsilon) \subset V^c$. これは $x_n \in V$ であることに矛盾する．したがって収束する V の点列の極限は V の点である．
十分性：対偶をしめす．V が閉集合でないと仮定して V の収束する点列 $\{x_n\}$ でその極限 ξ が V^c の点であるものを構成すればよい．仮定より．V^c は開集合でないから，ある $\xi \in V^c$ が存在し，任意の正の数 ε に対して $B_\xi(\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$. そこで，正の整数 n に対して $x_n \in B_\xi(\frac{1}{n}) \cap V$ となる x_n をひとつとる．すると $\{x_n\}$ は V の点列であって，$d(x_n,\xi) < \frac{1}{n}$ となるから $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\xi) = 0$. したがって V の点列 $\{x_n\}$ は $\xi \in V^c$ に収束する．

このことから，“任意の収束する V の点列の極限値が V の点である” ことを距離空間の閉集合の定義として採用してもよい．

■部分距離空間 距離空間 (X,d) の空でない部分集合 $Y \subset X$ に対して，距離 d を $Y \times Y$ に制限したものを d_Y と書けば d_Y は Y の距離を与える．このようにして得られた (Y,d_Y) を (X,d) の**部分距離空間**という．

例 11.2. 単位球面 $S^2 \subset \boldsymbol{R}^3$ に $d(x,y) = |y-x|$ $(x,y \in S^2)$ により距離を定義すると，(S^2,d) はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分距離空間である．(問題 8-10 の d_1 がここでいう d である).

補題 11.3. 距離空間 (X,d) の部分距離空間 (Y,d_Y) に対して，$U \subset Y$ が開集合 (閉集合) であるための必要十分条件は，X の開集合 (閉集合) $\hat{U} \subset X$ が存在して $U = \hat{U} \cap Y$ となることである．

証明： (X,d) の点 p の ε 近傍を $B_p(\varepsilon)$, (Y,d_Y) の点 q の ε 近傍を $B'_q(\varepsilon)$ と書くことにする．とくに $q \in Y$ ならば

$$B'_q(\varepsilon) = \{x \in Y \mid d_Y(q,x) < \varepsilon\} = \{x \in Y \mid d(q,x) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid d(q,x) < \varepsilon, x \in Y\} = B_q(\varepsilon) \cap Y$$

が成り立つ．
集合 $U \subset Y$ が (Y,d_Y) の開集合ならば，各点 $y \in U$ に対して，正の数 ε_y で $B'_y(\varepsilon_y) \subset Y$ となるものが存在する．そこで，この ε_y を用いて

$$\hat{U} := \bigcup_{y\in Y} B_y(\varepsilon_y)$$

とすると，これは X の開集合で $U = \hat{U} \cap Y$.

2011 年 6 月 14 日

一方，X の開集合 $\hat{U}$ に対して $U = \hat{U} \cap Y$ とする．すると，任意の $y \in U \subset \hat{U}$ に対して，$\hat{U}$ が開集合であることから，X における近傍 $B_y(\varepsilon)$ が $\hat{U}$ の部分集合になるような ε が存在する．このとき，

$$B'_y(\varepsilon) = B_y(\varepsilon) \cap Y \subset \hat{U} \cap Y = U$$

であるから U は開集合である．
閉集合の場合は，補集合をとれば開集合の場合に帰着される．

例 11.4. $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $Y = [0, 1]$ を部分距離空間とみなすとき，区間 $(\frac{1}{2}, 1]$ は Y の開集合である．

■同相写像

定義 11.5. 距離空間 (X_1, d_1), (X_2, d_2) に対して，写像 $f \colon X_1 \to X_2$ が全単射，かつ f も f^{-1} もともに連続であるとき f は**同相写像**であるといい，このような写像が存在するとき二つの距離空間 (X_1, d_1), (X_2, d_2) は**同相**であるという．

例 11.6. $\boldsymbol{R}$ に標準的な距離 d を与えた距離空間 $(\boldsymbol{R}, d)$ と離散距離を与えた距離空間 $(\boldsymbol{R}, d_{\mathrm{disc}})$ を考える．恒等写像 $\mathrm{id} \colon (\boldsymbol{R}, d_{\mathrm{disc}}) \to (\boldsymbol{R}, d)$ は全単射かつ連続であるが，その逆写像は連続でない．

■連結性

定義 11.7. 距離空間 (X, d) が**連結**である，とは，次をみたす X の部分集合の組 (A, B) が存在しないことである：

- $A \neq \emptyset$ かつ $B \neq \emptyset$.
- A, B は X の開集合.
- $A \cup B = X$,
- $A \cap B = \emptyset$.

定義 11.7 のような A, B が存在するならば $B = A^c$ だから A，B はともに開かつ閉でなければならない．

命題 11.8. 距離空間 (X, d) が連結であるための必要十分条件は，X の開かつ閉部分集合が $\emptyset$ と X のみとなることである．

■$\boldsymbol{R}$ の区間　実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 I が**区間**であるとは，$a, b \in I$ $(a < b)$ ならば $a < x < b$ をみたす任意の x は I の点となることである．実数 a, b $(a < b$ $)$ に対して次の集合は区間である：

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a < x < b\} & (a,b] &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a < x \leqq b\} \\
[a,b] &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a \leqq x \leqq b\} & [a,b) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a \leqq x < b\} \\
(a,\infty) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a < x\} & (-\infty,a) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, x < a\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, a \leqq x\} & (-\infty,a] &= \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, x \leqq a\} \\
(-\infty,\infty) &= \boldsymbol{R}.
\end{aligned} \tag{11.1}$$

なお $\pm\infty \notin \boldsymbol{R}$ なので $[-\infty, a]$ などは意味をもたない．

命題 11.9. $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $X \subset \boldsymbol{R}$ が (部分距離空間として) 連結であるための必要十分条件は X が区間となることである．

■弧状連結性　区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ から距離空間 (X, d) への連続写像

$$\gamma\colon I \ni t \longmapsto \gamma(t) \in X$$

を X の**道**という．とくに I が閉区間 $[a, b]$ であるとき，$\gamma(a)$, $\gamma(b)$ をそれぞれ γ の始点，終点とよぶ．

定義 11.10. 距離空間 (X, d) が**弧状連結** である，とは任意の $a, b \in X$ に対して，始点が a, 終点が b となる X の道が存在することである．

命題 11.11. 距離空間 (X, d) が弧状連結ならば連結である．

証明. 定義 11.7 のような二つの開集合 A, B が存在したとして，$p \in A$, $q \in B$ をとる．弧状連結性から，道 $\gamma\colon [0, 1] \to X$ で $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ となるものが存在する．いま，

$$I_A := \{t \in [0, 1] \,|\, \gamma(t) \in A\} = \gamma^{-1}(A), \qquad I_B := \{t \in [0, 1] \,|\, \gamma(t) \in B\} = \gamma^{-1}(B)$$

とすると, I_A, I_B は $\boldsymbol{R}$ の空でない部分集合で，$I_A \cup I_B = [0, 1]$, $I_A \cap I_B = \emptyset$ となる．さらに γ の連続性から I_A, I_B は $[0, 1]$ の開集合であるから, 区間の連結性に矛盾する．□

注意 11.12. $\boldsymbol{R}^n$ の開部分集合 X が連結ならば弧状連結である．しかし，一般には連結性から弧状連結性は導かれない (そのような例がある)．詳細は "集合と位相第二" で扱う (はず).

■連続写像と連結性

定理 11.13. 連結な距離空間 (X, d) から 距離空間 (Y, d') への連続写像 $f\colon X \to Y$ による X の像 $f(X) \subset Y$ は連結である．

> **証明：** 像 $f(X)$ の部分集合 A, B が定義 11.7 の性質を満たしているとする．このとき $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ は X の空でない開集合で，$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$ となり矛盾．

系 11.14 (中間値の定理)**.** 閉区間 $[a, b] \subset \boldsymbol{R}$ 上で定義された連続関数 $f\colon [a, b] \to \boldsymbol{R}$ が $f(a) < f(b)$ を満たしているとする．このとき $f(a) < c < f(b)$ を満たす任意の実数 c に対して $f(\xi) = c$ となる ξ $(a < \xi < b)$ が少なくともひとつ存在する．

> **証明：** 命題 11.9 から，区間 $[a, b]$ は連結だから $f([a, b])$ も連結．したがって $f([a, b])$ は $\boldsymbol{R}$ の区間である．したがって $f(a) < c < f(b)$ を満たす任意の c は $f([a, b])$ の要素である．

■領域 (用語)　距離空間 (たとえば $\boldsymbol{R}^n$) の**領域**とは連結な開集合のことである．

問題

11-1 補題 11.3 の閉集合の場合の証明を完全にしなさい．

11-2 集合 X 上の 2 つの距離 d_1, d_2 が同値であるとき，(X, d_1), (X, d_2) は同相である．さらに逆は成立するか．

11-3 開区間 $(0,1)$ と $\boldsymbol{R}$ は同相である．また，閉区間 $[0,1]$ と開区間 $(0,1)$ は同相でない．

11-4 命題 11.8.

11-5 命題 11.9.

11-6 命題 11.11.

11-7 定理 11.13.

11-8 2 以上の整数 m に対して，$\mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R})$ を実数を成分とする m 次正方行列全体の集合，

$$\mathrm{O}(m) := \{A \in \mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R}) \mid A \text{ は直交行列 } \}, \qquad \mathrm{SO}(m) := \{A \in \mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R}) \mid A \in \mathrm{O}(m), \det A = 1\}$$

とする．$M_{m,m}(\boldsymbol{R})$ にはユークリッド距離が与えられている (問題 10-12) とするとき

- $\mathrm{O}(m)$ は ($\mathrm{M}_{m,m}(\boldsymbol{R})$ の部分距離空間として) 連結でない．
- $\mathrm{SO}(m)$ は連結である．
- $\mathrm{SO}(2)$ は $S^1 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と同相である．