2011 年 6 月 21 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一講義資料 12

お知らせ

- 次週 6 月 28 日 (火) に試験を行います．予告の用紙をご覧になっていない方は，web ページまたは OCW からダウンロードして確認しておいてください．

前回の補足

- 距離空間が弧状連結ならば連結，逆は成り立たないわけですが，実は次がなりたちます：

  ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の空でない開集合は連結なら弧状連結である．

  証明： 連結開集合 U の 1 点 p を固定する．$V := \{q \in U\,;\, p$ と q は U の連続な道で結べる $\}$ とおくと (0) $V \neq \emptyset$．実際 $B_p(\varepsilon) \subset U$ なる $\varepsilon > 0$ をとれば $B_p(\varepsilon)$ の点は p と連続な道 (線分) で結べる．(1) $V \subset U$ は開集合．実際 $q \in V$ に対して，$B_q(\varepsilon) \subset U$ となる $\varepsilon > 0$ をとる．すると $B_q(\varepsilon) \ni r$ と q は線分で結べるので，p と r は連続な道で結ぶことができる．すなわち $B_q(\varepsilon) \subset V$．(2) $V \subset U$ は閉集合．実際 $r \in U \setminus V$ とすると，p と r は U の連続する道で結べない．もし $B_r(\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ なら p と $B_r(\varepsilon) \cap V$ の点は U の連続な道で結べるので p と r も連続な道で結べ，矛盾が生じる．したがって $B_r(\varepsilon) \cap V^c \subset V^c$．したがって V^c は開集合なので V は閉．以上から V は U の空でない開かつ閉部分集合なので，U の連結性から $V = U$ したがって U 上の任意の点は p と連続な道で結ぶことができる．さらに U 上の 2 点 q, r は (p を経由して) 連続な道で結ぶことができる．

前回までの訂正

- 講義資料 6，6 ページ，下から 6 行目：(誤) $x + y \in \boldsymbol{Z}$ (正) $[x + y] \in \boldsymbol{Z}_n$
- 講義資料 6，6 ページ，下から 4 行目：(誤) $xy \in \boldsymbol{Z}$ (正) $[xy] \in \boldsymbol{Z}_n$
- 講義資料 8, 定義 8.1, 1 行目：(誤) $d\colon X \times X \to X$ (正) $d\colon X \times X \to \boldsymbol{R}$
- 講義資料 10, 命題 10.8, 2 行目：
  (誤) $U^\circ \subset V \subset U$ となる開集合 V は $V = U^\circ$ のみである．(正) $V \subset U$ が開集合ならば，$V \subset U^\circ$．
- 講義資料 11, 5 ページ下から 4 行目：(誤) $B'_y(\varepsilon_y) \subset Y$ (正) $B'_y(\varepsilon_y) \subset U$
- 講義資料 11, 6 ページ，“$\boldsymbol{R}$ の区間” の一行目：
  (誤) $(a < b)$ (正) $(a \leqq b)$; (誤) $a < x < b$ (正) $a \leqq x \leqq b$

授業に関する御意見

- 冷房をつけても，温度に制限があると逆に暑くなるのでまだ窓をあけるほうがいいと思う．とこの場をおかりして言わせていただきます．
  山田のコメント： そうですね．いまのところはエアコン不要ですが，これからどうなるか. . .
- この大学でカンニングすると，あの大学のように刑事起訴されますか？
  山田のコメント： 入学試験はともかく，期末試験くらいだとどうでしょうね．
- いよいよラストの講義ですね．難しいですが面白かったです．
- とても面白かったです．
  山田のコメント： Thanks.
- 特にない　**山田のコメント：** me, too
- “$Y = [-1, 1]$ としたとき，$(0, 1]$ が Y の開集合になる” というのは定義では納得せざると得ませんが，どこかだまされている気がしてしまいます．　**山田のコメント：** とくに騙してはいません．
- 今までなかなか参加できませんでしたが，OCW に資料をあげてくださるので勉強できました．ありがたいです．
  山田のコメント： 便利でしょ？
- 集合をやりました．解散しましょう．　**山田のコメント：** 離散は？
- 試験の難易度はどんな感じでしょうか．プリントに載っている位 (or もう少し簡単) でしょうか．　**山田のコメント：** まだ考えていません．
- はやぶさがかえってきてもう 1 年．はやいですね．　**山田のコメント：** はやいですね．すぐに年をとります．
- お水おいしー？　**山田のコメント：** おいしー

質問と回答

質問： 板書に書いた内容ですが，$X = \boldsymbol{R}$, $Y = [-1, 1]$, $x, y \in Y$ のとき $d_Y(x, y) = d(x, y) = |y - x|$，$(0, 1]$ は Y の開集合，$\underline{X \text{ の開集合ではない}}$．下線部はなぜですか．

お答え： $(0, 1] \subset X = \boldsymbol{R}$ の点 1 と任意の正の数 ε に対して $B_1(\varepsilon) = \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, |x - 1| < \varepsilon\} \cap \boldsymbol{R} \setminus (0, 1] \neq \emptyset$ だからです．

質問： 集合 X に対して，異なる距離 d_1, d_2 を入れると，(X, d_1) と (X, d_2) は全く違うものになるのですか．

お答え： 一般に違うものになります．“全く” がどういう意味かわかりませんが．

質問： 定義 11.7 について，距離空間 (X, d) が連結である定義は，X の部分集合の組 (A, B) が，定義 11.7 にかかれている 4 つの条件をみたさないことと書いてありますが，この 4 つの条件のうち，1 つでも組 (A, B) が条件をみたしていたら (X, d) は連結でないということですか？

お答え： いいえ．4 つの条件を満たす組 (A, B) が存在することと非連結であることが同値です．

質問： 連結の定義が不安です．（定義 11.7 の 4 つの条件）をすべて満たす (A, B) が存在するとき X は連結でないと言えますが，たとえば (1) だけを満たす A, B がひとつも存在しないとき，X は連結であるといえますか．

お答え： 言えません．“4 つを満たす A, B が存在しない” のが連結の定義です．実際 (1) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ となる A, $B \subset X$ がひとつも存在しないのは $X = \emptyset$ のときだけですから，もしご質問の通りだとすると，全ての空でない距離空間が連結となってしまって，連結性の定義がナンセンスになります．

質問： (X_1, d_1), (X_2, d_2) が同相だとしても，d_1 と d_2 が同値であるとは限りませんが，$X_1 = X_2$ という条件を加えた場合はどうなのでしょうか．

お答え： $X = \boldsymbol{R}$, $d_1(x, y) = |y - x|$, $d_2(x, y) = \tan^{-1} |y - x|$ とする．このとき，恒等写像 $\mathrm{id}\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は $(\boldsymbol{R}, d_1)$ から $(\boldsymbol{R}, d_2)$ への同相写像ですが d_1, d_2 は同値ではありません．

質問： 二つの距離空間の間に同相写像が存在しないことを示したい場合．同相写像の条件が多いことから，背理法を用いて示す以外に方法はあるのでしょうか．

お答え： 条件が多いことと背理法をつかうことはどう関連するのでしょう．たとえば (X, d) が連結，(Y, d') が非連結なら X と Y は同相ではありません．このように，“同相なら保たれる性質や量” が異なることを示す，という方法はよく使われます．

質問： 連結の概念はなぜ重要なのですか？

お答え： さまざまな場面で用いられるからです．たとえば中間値の定理．

質問： 連結でありながら弧状連結性を満たさないものって何ですか？個人的には $\emptyset$ は大丈夫そうな気がするのですが...

質問： 連結かつ孤状連結 (原文ママ：弧状のことか) でない集合はありますか？

お答え： 非自明な例を後期にやるはず．

質問：「$\boldsymbol{R}$ の区間であるなら連結部分集合である」の証明の手のつけ方がわかりません． ヒントをください

お答え： $\boldsymbol{R}$ の区間 I が非連結であったとして，矛盾を導く．I の空でない開集合 A, B で $A \cup B = I$, $A \cap B = \emptyset$ となるものが存在したとする．いま $a \in A$, $b \in B$ をとると $a \neq b$ なので，$a < b$ が成り立っているとする．I は区間なので $(a, b) \subset I$ に注意して

$$A' := \{x \in (a, b) \,|\, (a, x) \subset A\} \subset I$$

とおく．A が開集合であることから，ある $\varepsilon > 0$ で $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap I \subset A$ とできるので，$A' \neq \emptyset$．とくに A' は上に有界だから $\xi := \sup A'$ が存在する．$\xi = b$ とすると $b \in B$ であることと B が開であることに矛盾．したがって $\xi \in (a, b)$ であるが，$\xi \in A$ としても $\xi \in B$ としても A, B が開集合であることに矛盾する．

質問： ある距離空間が連結だからといっても弧状連結とは限らないのなら，$\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ の開部分集合が連結でないことを言うのに，弧状連結でないことを示すだけでは不十分ですか．($\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ にはユークリッド距離が与えられている．) 解析学概論では $\boldsymbol{R}^2$ の開部分集合が領域でないことを示すために，弧状連結でないことを示していました．

お答え： 特殊事情がありまして，ユークリッド空間の開集合については弧状連結であることと連結であることは同値になります．

質問： 孤状連結 (原文ママ：弧状のことか) が「孤状」と名がついている理由は何故なのでしょうか？名前から想像していくと，道が孤だからだと思うのですが，孤でない道による連結なら—連結と名がつくのでしょうか？ (そもそも孤でない道が存在するのかすら知りませんが)

お答え： “孤” と “弧” を間違えないようにしましょう．ところで，弧である，とかないとかおっしゃっていますが，あなたの考える “弧” はなんですか?

質問： 講義で「連結であっても弧状連結とは限らない」ということを扱いましたが，命題 11.8 のように，距離空間 (X,d) が連結かつ弧状連結であるための必要十分条件はありますか.

お答え： 連結かつ弧状連結であるための必要十分条件は弧状連結であることだと思いますが.

質問： $\boldsymbol{R}$ の連結部分集合が区間でしたが，$\boldsymbol{C}$ の連結部分集合は何になるのでしょうか.

お答え： いろいろなものがあります．$\boldsymbol{C}$ 全体も，単位円板の内部も，円板から，その円板に含まれるいくつかの円板を覗いたものも，実軸も，実軸上の区間も...

質問： $I \subset \boldsymbol{R}$ が区間 $\iff$ $a,b \in I, a \leqq b$ に対して $a \leqq x \leqq b$ なら $x \in I$ なのにこの否定が $\exists a,b \in I (a<b), \exists x$ s.t. $a<x<b, x \notin I$ と等号がなぜぬけているのかよくわからない.

お答え： 形式的に否定すると “$\leqq$” かもしれませんが，$x=a$, b なら $x \notin I$ にならないので，これでも ok，ということです.

質問： 講義資料 11, p6, (11.1) に $\boldsymbol{R}$ の区間がかいてありますがこれ以外には区間はないのですか？

お答え： ないのです．$I \neq \emptyset$ を区間としよう．I が上に有界かつ下に有界なとき，$a=\inf I$, $b=\sup I$ としよう．このとき，$x \in (a,b)$ に対して $a' \leqq x \leqq b'$ となる a', $b' \in I$ が存在する (上限・下限の性質)．したがって区間の定義から $x \in I$．すなわち $(a,b) \subset I$ である．一方，任意の $y \in \boldsymbol{R} \setminus [a,b]$ に対して $y \notin I$．実際，$y>b$ のとき，$y \in I$ ならば $y' = \frac{b+y}{2}$ は $a<y<y'$ を満たすので $y' \in I$．$b<y'$ なので $b=\sup I$ に矛盾する．したがって $y \notin I$．同様に $y<a$ としても $y \notin I$．以上から $\boldsymbol{R} \setminus [a,b] \subset \boldsymbol{R} \setminus I$，すなわち $I \subset [a,b]$ である.
以上より $(a,b) \subset I \subset [a,b]$ だから $I=(a,b)$, $I=[a,b]$, $I=(a,b]$, $I=[a,b)$ のいずれかである.
I が上に有界で下に有界でない，下に有界で上に有界でない，上下に有界でない場合は演習問題.

質問： “写像 f が同相写像である” ことの定義は「f が全単射」「f が連続」「f^{-1} が連続」の 3 つでしたが，一般に “「f が全単射」かつ「f が連続」$\Rightarrow$「f^{-1} が連続」” は言えないのでしょうか？

お答え： 例 11.6

質問： 距離空間 (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) と連続写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対して合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は連続ですが，逆に $g \circ f$ が連続ならば，f, g はともに連続である，と言えるのでしょうか.

お答え： 言えません．$f: X \to Y$ を全単射かつ連続でない写像としましょう．たとえば $f: [0,1) \to [0,1)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & (0 \leqq x < \frac{1}{2}) \\ x-\frac{1}{2} & (\frac{1}{2} \leqq x < 1). \end{cases}$$

このとき f の逆写像 $g := f^{-1} : Y \to X$ が存在する (連続ではない)．このとき $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ (恒等写像) だからこれらは連続.

質問： 開集合 (閉集合) を使って連続性を定義するところで逆像が使われていますが，像を使って定義することはできないのですか.

お答え： 像をつかって，という意味は? 連続写像による開集合の像は一般に開集合とは限りません.

質問： 定理 11.8 がよく分からない．なぜ $\emptyset$ と X のみになるのですか.

お答え： $X = A \cup B$, $X = A \cap B = \emptyset$ なら $B = A^c$．したがって A, B が開集合ならそれらは閉集合でもある．このことから定義 1.17 の 4 つの条件をみたす A, B が存在するための必要十分条件は, 空集合でも X でもない開かつ閉集合 A が存在すること，とわかる.

質問： 定理 11.13 の逆は成り立つか.

お答え： 講義中に口頭で例をあげたはず．距離空間 (X,d) から (Y,d') への定値写像を考えれば (X,d) が連結である，なしにかかわらずその像 (1 点) は連結.

質問： 前回 (原文ママ:前々回のことか) の問 10-10 について, 連続関数が有限個でないとき U は開集合でない場合がありますか．関数族 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $f_\lambda : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ に対して $U := \{x \in \boldsymbol{R}^m \mid f_\lambda(x) > 0, \lambda \in \Lambda\}$ は $U = \cap_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^{-1}((0,\infty))$ だから.

お答え： 正の整数 n に対して $f_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を定めると

$$f_n(x) := \begin{cases} 1+nx & (-\frac{1}{n} \leqq x \leqq 0) \\ 1-nx & (0 < x \leqq \frac{1}{n}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

f_n は連続で $\{x \in \boldsymbol{R} \mid f_j(x) > 0, j = 1, 2, \dots\} = \{0\}$.

質問： 今，ちょうど濃度の復習をしているところなのですが，“全単射” というワードを見ると，“濃度が等しい” と思うようになりました．今回の授業でもそうでしたが “全単射” というワードはちょくちょくでてきますが，濃度について触れることはあまりありません．濃度について考えることで新しい発見があったりはしないのでしょうか．それとも，濃度の考え方は全射，単射の分野に閉じているのでしょうか．

質問： 全単射があれば，当然濃度は一致します．そのうえで，距離空間はただの “集合” よりも詳しい構造をもっているので，その構造をたもつ全単射が重要な役割を果たすわけです．集合にどのような構造を考えるか，によってもものの見方が変わってくるのですね．

質問： GL は何の略ですか？

お答え： 講義資料 10, 1 ページの一番下．

質問： 今やっていることは何か暗中模索というか，いまいち何をやっているのかつかみどころがないのですが，例えば多様体における同相関係の話などに触れるともう少し見晴らしよくなるのでしょうか．

お答え： 今後，活用する場がいろいろなところにみられるはず．使っているうちに目が慣れてきます．

質問： X が連結になる条件の，存在しない部分集合の組 (A, B) について「A, B はいずれも連結である」というのは条件に含まれるのでしょうか．

お答え： いいえ．もし含むとすると，“連結” という言葉の定義をその前にしなければならなくなって...

質問： (1) $A \neq \emptyset$ かつ $B \neq \emptyset$ かつ $C \neq \emptyset$ (2) A, B, C は X の開集合 (3) $A \cup B \cup C = X$ (4) $A \cap B \cap C = \emptyset$ となる X の部分集合の組 (A, B, C) が存在するとき X は連結にはならないのでしょうか．

お答え： $X = \boldsymbol{R}$, $A = (-\infty, 1)$, $B = (0, +\infty)$, $C = (1, 2)$ とすると条件をみたします．

質問： $\{0 \leqq x, y \leqq 1 \mid x, y$ は有理数 $\}$ は領域ではないですか?

お答え： $\boldsymbol{R}^2$ の領域ではありません．

質問： いまさらですが講義資料で $+\infty$ と $-\infty$ の定義をはっきりやっていない気がします．いま $+\infty$ を任意の実数よりも大きい数と定義すると $+\infty$ はたしかに実数ではないのですが，このとき $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ への “$<$” の定義が $+\infty$ と循環しそうで怖いです．あと “$<$” を定義する際，$+\infty < +\infty$ を真としてよいのかもよくわからないです．

お答え： 今回の講義の立場では $+\infty$, $-\infty$ というのはひとつの数，またはある集合の元，というようには思っていません．たとえば “$\sup A = +\infty$” というのは “$\sup A$” というものが存在して，それとは別に “$+\infty$” というものが存在して，それらが等しい，ということではなく “集合 A が上に有界でない” という熟語 (略記) と思ってください．したがって，$\sup A = +\infty$ のとき A の上限は存在しません．もうひとつ，$(0, +\infty)$ という区間は $0 < x < +\infty$ をみたす実数の集まりではなく，$0 < x$ をみたす実数の集まり，という意味です．講義資料の (11.1) に区間の場合分けをたくさん書いたのはこの意味です．

質問： $f \colon (X, d) \to (Y, d_{\mathrm{disc}})$ で連続なものは定値関数のみでしょうか．演習で「距離空間 (X, d) が連結でないための十分条件は次の (i), (ii) をみたす X 上の連続写像 $f \colon X \to \boldsymbol{R}$ が存在することをであることを示せ．(i) f は 1 か -1 の値しかとらない．(ii) $\exists p_0, p_1 \colon f(p_0) = 1, f(p_1) = -1$. というもんだいがでたのですが (i) の条件のもとでは，その距離は 0 かその他のひとつの値しかとらないのでりさん距離になってしまします．f が連続であるというところがよくわかりませんでした．

お答え： 連結距離空間から離散距離空間への連続写像は定値写像に限ります．定義域が連結でなければ，各連結成分上で定値写像，すなわち値はたかだか連結成分の個数だけとります．この問題の場合，$f(X) = \{-1, 1\}$ ですが，それが連結でない (これを示さなければならない?) ので X が連結でないことになります (定理 11.13 参照).

質問： 今日 (6 月 14 日) のノートを聖書しているうちに，同相と連続がわからなくなったので質問させてください．ノートには $(0, 1)$ と $\boldsymbol{R}$ は同相とあります．一方 $(0, 1)$ と $\boldsymbol{R}$ に対してその距離は同値ではない (つまり問題 11-2 の逆は成り立たない) とあります．それでは $(0, 1)$ と $\boldsymbol{R}$ にはどのような距離をいれているのでしょうか．(以下略) 質問をまとめると「11-2 の逆が成り立たない例を教えてください」という事です．

お答え： 講義資料 11, 5 ページ冒頭で宣言したように $\boldsymbol{R}$ にはユークリッド距離 (すなわち x, $y \in \boldsymbol{R}$ に対して $d(x, y) = |y - x|$) を与えておきます．また $(0, 1) \subset \boldsymbol{R}$ には講義資料 11，5 ページのように $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間としての距離を与えます．11-2 の逆が成立しない例：$(\boldsymbol{R}, d)$ を $\boldsymbol{R}$ にユークリッド距離を入れたもの．$(\boldsymbol{R}, d_1)$ を

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

で定まる距離空間とすると，恒等写像 $\mathrm{id} \colon (\boldsymbol{R}, d) \to (\boldsymbol{R}, d_1)$ は同相写像を与える．しかし d と d_1 は同値でない．

12 コンパクト性と完備性

とくに断りのない限り $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}^n$) には標準的な距離 (ユークリッド距離) が与えられているものとする.

■コンパクト距離空間 距離空間 (X,d) の開集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が X ($Y \subset X$) の**開被覆**であるとは, $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$ ($\supset Y$) を満たすことである.

定義 12.1. 距離空間 (X,d) が**コンパクト**であるとは, X の任意の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して, 添字の有限集合 $\{\lambda_1,\dots,\lambda_N\} \subset \Lambda$ が存在して $\{U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_N}\}$ が X の開被覆となることである.

定義の条件を, "X の任意の開被覆は有限部分被覆をもつ" ということがある.

注意 12.2. 距離空間 (X,d) の部分集合 Y が X のコンパクト部分集合である, とは, X の部分距離空間としてコンパクトとなることである. これは Y の任意の開被覆が有限部分被覆をもつことと同値である.

例 12.3. $\boldsymbol{R}$ はコンパクトではない. 実際, 正の整数 n に対して $U_n = (-n, n)$ とおくと $\{U_n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ は $\boldsymbol{R}$ の開被覆であるが, 有限個で $\boldsymbol{R}$ を覆うことはできない.

■点列コンパクト性 距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n \mid n = 1,2,\dots\}$ の **部分列**とは, ある自然数の無限列 $n_1 < n_2 < \dots$ に対して $\{x_{n_1}, x_{n_2},\dots,\} = \{x_{n_k} \mid k \in \boldsymbol{N}\}$ で与えられる点列のことである.

定理 12.4. コンパクト距離空間 (X,d) の任意の点列は, X 内で収束する部分列をもつ.

証明: コンパクト距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}$ を考える. もし, ある $\xi \in X$ に対して $x_n = \xi$ となる番号 n が無限個存在するなら, それらを並べれば ξ に収束する $\{x_n\}$ の部分列が得られる.
さらに $x_n = \xi$ となる n が 2 つ以上あるならば, それらは重複を取り除くことにより $\boldsymbol{N} \ni n \mapsto x_n \in X$ は単射であるとしてよい. この写像の像を $Y = \{x_1, x_2, \dots\}$ としておこう.
集合 Y が集積点を持たないと仮定しよう. このとき, $\mathcal{A} := \{U \subset X \mid U$ は開集合で $\#U \cap Y \leqq 1\}$ とすると, Y が集積点をもたないことから $\mathcal{A}$ は X の開被覆. したがって有限部分被覆 $\{U_1,\dots,U_N\}$ をもつ. $U_1,\dots,U_N$ は Y とたかだか 1 点しか共有しないので, Y は有限集合となり, Y が無限集合となることに矛盾する.
そこで Y の集積点 ξ をとると, 任意の番号 n に対して $B_\xi(1/n) \ni x_{m_n}$ なる $x_{m_n} \in Y$ が存在する. このようにして得られた $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{m_n}\}$ は ξ に収束する.

系 12.5. 距離空間 (X,d) の部分集合 Y がコンパクトなら, ば Y は X の閉集合である.

証明: X の点に収束する Y の点列をとると, 定理 12.4 よりその極限は Y の点である. したがって Y は閉集合.

■完備性 距離空間 (X,d) の点列 $\{x_n\}$ が**コーシー列**であるとは, 任意の正の数 ε に対してある番号 N が存在して $m,n \geqq N \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon$ とできることである.

定義 12.6. 距離空間 (X,d) が**完備** complete であるとは, 任意のコーシー列が収束することである.

例 12.7.
- $\boldsymbol{R}$ は完備である. 完備性は実数の連続性と同値であった.
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ は完備である.
- $\boldsymbol{R}^n \setminus \{1 点\}$ は完備でない.

2011 年 6 月 21 日

- $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間 $(0,1)$ は完備でない．実際 $\{\frac{1}{n+1}\}$ は $(0,1)$ のコーシー列だが $(0,1)$ の中では収束しない．
- $\boldsymbol{R}$ の部分距離空間 $[0,1]$ は完備である．実際 $[0,1]$ のコーシー列は $\boldsymbol{R}$ のコーシー列でもあるから $\boldsymbol{R}$ のある点に収束する．$[0,1]$ は $\boldsymbol{R}$ の閉部分集合であるから極限は $[0,1]$ の点である．

■完備性とコンパクト性

命題 12.8. コンパクト距離空間は完備である．

証明： コンパクト距離空間 (X,d) のコーシー列 $\{x_n\}$ をとると，定理 12.4 から $\xi\in X$ に収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する．とくに，任意の正の数 ε に対してある番号 N で "$k\geqq N$ ならば $d(x_{n_k},\xi)<\varepsilon/2$" を満たすものが存在する．一方，$\{x_n\}$ はコーシー列であるから，同じ ε に対して番号 M で "$l,j\geqq M$ ならば $d(x_l,x_j)<\varepsilon/2$" を満たす M が存在する．そこで，$k\geqq N$ かつ $n_k\geqq M$ となるように k をとれば

$$j\geqq M \qquad\Rightarrow\qquad d(x_j,\xi)\leqq d(x_j,x_{n_k})+d(x_{n_k},\xi)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

となる．これは $\{x_n\}$ が $\xi\in X$ に収束することを表している．

次の命題は，(たぶん) 後期に紹介されるはずである．

命題 12.9. 完備距離空間の有界閉集合はコンパクトである．

例 12.10. $\boldsymbol{R}$ の閉区間はコンパクトである．

系 12.11. $\boldsymbol{R}$ のコンパクト部分集合は最大元および最小元をもつ．

■コンパクト性と連続写像

定理 12.12. コンパクト距離空間 (X,d) から距離空間 (Y,d') への連続写像 $f\colon X\to Y$ の像 $f(X)$ は Y のコンパクト部分集合である．

証明： 像 $f(Y)$ の開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとる．各開集合 $U_\lambda\subset f(Y)$ に対して，Y の開集合 $\tilde U_\lambda$ で $U_\lambda=f(Y)\cap\tilde U_\lambda$ となるものが存在する．そこで $V_\lambda:=f^{-1}(U_\lambda)$ とすると $\{V_\lambda\}$ は X の開被覆になる．この有限部分被覆 $\{V_{\lambda_1},\dots,V_{\lambda_N}\}$ に対して $\{U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_N}\}$ をとるとこれは $\{U_\lambda\}$ の有限部分被覆である．

系 12.13. 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f\colon[a,b]\to\boldsymbol{R}$ は，区間 $[a,b]$ 内で最大値，最小値をとる．

例 12.14. $S^n=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n+1}\,|\,|\boldsymbol{x}|=1\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ と同相ではない．

問題

12-1 例 12.10.
12-2 系 12.11.
12-3 系 12.13.
12-4 例 12.14.