2011 年 6 月 28 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一 予備試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**. 問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 7 月 5 日の授業の際に返却いたします. それ以降は**数学事務室 (本館 3 階 332B)** に預けますのでそちらで受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 7 月 5 日の授業終了後に申し出て頂くか, 7 月 11 日までに山田まで電子メイルでお申し出下さい. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の下線 $\mathbf{a} \sim \mathbf{i}$ を記した部分について後の問いに答えなさい. [50 点]

実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ が, 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ の $_{\mathbf{a}}\underline{\text{冪集合 } \mathfrak{P}(\boldsymbol{N})}$ と対等である, すなわち濃度が等しいということを示したい.

二つの集合 X, Y が対等である ($|X| = |Y|$ と書く), とは全単射 $f\colon X \to Y$ が存在することである. この定義から直接 $_{\mathbf{b}}\underline{\boldsymbol{N} \text{ と } 3\boldsymbol{N} = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \text{ は 3 の倍数}\} \text{ は対等}}$ であることがわかる.

さらに $\boldsymbol{N}$ と $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ は対等である. これを示すために, まず自然数に対して σ_k で 1 から k までの自然数の和を表す. すなわち $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 6, \ldots$ である. さらに $\sigma_0 = 0$ と定め,

$$V_k = \{x \in \boldsymbol{N} \mid \sigma_{k-1} < x \leqq \sigma_k\} \qquad (k = 1, 2, \ldots,) \qquad \text{とすると}$$
$$\boldsymbol{N} = V_1 \cup V_2 \cup \cdots = \bigcup_{k \in \boldsymbol{N}} V_k \qquad \text{かつ} \qquad k \neq j \quad \text{なら} \quad V_k \cap V_j = \emptyset$$

が成り立つ. これを用いて

$$f_1(x) = \bigl(x - \sigma_{k-1}, (k+1) - (x - \sigma_{k-1})\bigr) \qquad (x \in V_k \text{ のとき})$$

により $_{\mathbf{c}}\underline{f_1\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \text{ を定める}}$ と f_1 は全単射となる.

さらに $\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合として, $f_2\colon \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ を

$$f_2(x, y) = \begin{cases} (x, 2y) & (y \geqq 0) \\ (x, -2y-1) & (y < 0) \end{cases}$$

と定めると f_2 は全単射なので

$$f_3 = f_2 \circ f_1\colon \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}$$

は全単射. とくに $|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}|$.

裏面に続く

集合 X, Y の間に単射 $f\colon X \to Y$ が存在するとき $|X| \leqq |Y|$ と書く．$|X| \leqq |Y|$ かつ $|X| = |Y|$ でないとき $|X| < |Y|$ と書くことにする．一般に $|X| < |\mathfrak{P}(X)|$ である．実際 $_{\mathbf{d}}$ $\underline{\text{単射 } f\colon X \to \mathfrak{P}(X) \text{ が存在する}}$ ことはすぐにわかる．したがって $|X| \leqq |\mathfrak{P}(X)|$．全単射 $g\colon X \to \mathfrak{P}(X)$ が存在したとする．このとき $V = \{x \in X \,|\, x \notin g(x)\}$ とすると $_{\mathbf{e}}$ $\underline{g(v) = V \text{ となる } v \in X \text{ が存在し矛盾が生じる}}$．したがって $|X| \neq |\mathfrak{P}(X)|$.

二つの集合の間の全単射を構成することは難しいことが多いが，次は濃度の比較をするのに有用である．

定理 A: 集合 X, Y が $|X| \leqq |Y|$ かつ $|Y| \leqq |X|$ を満たすならば $|X| = |Y|$ である．

これを用いて $\boldsymbol{N}$ と有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ が対等であることを示す．$_{\mathbf{f}}$ $\underline{|\boldsymbol{N}| \leqq |\boldsymbol{Q}| \text{ はすぐにわかる}}$ から，$\boldsymbol{Q}$ から $\boldsymbol{N}$ への単射を構成したい．ひとつの有理数を既約分数 n/m $(n \in \boldsymbol{Z}, m \in \boldsymbol{N})$ の形にしかたは一意的だから，単射

$$f_4\colon \boldsymbol{Q} \ni x \longmapsto (m, n) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z} \qquad \left(\text{ただし } x = \frac{n}{m} \text{ は既約分数}\right)$$

が定義される．したがって $f_3^{-1} \circ f_4\colon \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{N}$ は単射なので $|\boldsymbol{Q}| \leqq |\boldsymbol{N}|$.

以上の準備の下，$|\boldsymbol{R}| = |\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})|$ を示そう．

- $|\boldsymbol{R}| \leqq |\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})|$ であること：$\boldsymbol{N}$ と $\boldsymbol{Q}$ は対等だから $|\boldsymbol{R}| \leqq |\mathfrak{P}(\boldsymbol{Q})|$ を示せばよい．$f_5\colon \boldsymbol{R} \to \mathfrak{P}(\boldsymbol{Q})$ を $f_5(r) = \{x \in \boldsymbol{Q} \,|\, r < x\}$ と定めると $_{\mathbf{g}}$ $\underline{f_5 \text{ は単射}}$.
- $|\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})| \leqq |\boldsymbol{R}|$ であること：$V \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ に対して

$$f_6(V) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_j}{10^j} \qquad v_j = \begin{cases} 1 & (j \in V) \\ 0 & (j \notin V) \end{cases}$$

とすると，$_{\mathbf{h}}$ $\underline{\text{写像 } f_6\colon \mathfrak{P}(\boldsymbol{N}) \to \boldsymbol{R} \text{ が定義できる}}$．さらにこれは単射である．

以上に定理 A を適用して $|\boldsymbol{R}| = |\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})|$ が得られた．

定理 A を用いれば，単射を構成することにより対等であることを示すことができる．さらに，次によれば，全射を構成することに単射が構成できたことになる：

定理 B： 全射 $f\colon X \to Y$ が存在するならば，単射 $g\colon Y \to X$ が存在する．

$_{\mathbf{i}}$ $\underline{\text{このことを示そう}}$．各 $y \in Y$ に対して $U_y = f^{-1}(\{y\})$ とおき，$g \in \prod_{y \in Y} U_y$ とすると $g\colon Y \to X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ (id_Y は Y の恒等写像) となるので g は単射である．

問題 a 集合 X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ の定義を述べなさい．

問題 b 対等の定義から $|\boldsymbol{N}| = |3\boldsymbol{N}|$ であることを直接示しなさい．

問題 c 10 以下の各自然数 x について $f_1(x)$ を求めなさい．

問題 d 単射 $f\colon X \to \mathfrak{P}(X)$ を具体的に一つ与えなさい．

問題 e 下線 **e** をつけた部分 (証明の概略) を完全にしなさい．

問題 f $|\boldsymbol{N}| \leqq |\boldsymbol{Q}|$ であることを示しなさい．

問題 g f_5 が単射であることを示しなさい．

問題 h f_6 が $\boldsymbol{R}$ への写像を与えていることを示しなさい．

問題 i 下線 **i** をつけた部分以下の証明を完全にしなさい．

2011 年 6 月 28 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一 予備試験 〔問題 2〕

問題 B 次の文中の下線 $\mathbf{a} \sim \mathbf{j}$ を記した部分について後の問いに答えなさい． [50 点]

とくに断りのない限り $\boldsymbol{R}^n$ にはユークリッド距離 d_{E} が与えられているとしておく．

記号 $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ で実数を成分とする 2 次正方行列全体を表す．行列 $A, B \in \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ に対して

$$d(A,B) = \sqrt{\mathrm{tr}\left({}^t(B-A)(B-A)\right)}$$

と $_{\mathbf{a}}\underline{\text{定める}}$ と，d は $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の距離を与える．実際，$_{\mathbf{b}}\underline{\text{全単射 } h\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^4}$ で

$$(*) \qquad d(A,B) = d_{\mathrm{E}}\big(h(A), h(B)\big)$$

を満たすものが存在する．

写像 $\varphi\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を

$$\varphi\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \ni A = (a_{ij}) \longmapsto a_{11} \in \boldsymbol{R}$$

で定めると φ は連続写像である．$_{\mathbf{c}}\underline{\text{実際}}$，$\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の点列 $\{P_m\}$ が $P = (p_{ij})$ に収束するならば $\varphi(P_m)$ は $\varphi(P) = p_{11}$ に収束する．さらに $\boldsymbol{R}$ への連続写像の和，差や積も連続写像だから，行列の成分の多項式で表される写像は $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ 上の連続写像である．

部分集合

$$\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R}) = \{A \in \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \,|\, A \text{ は正則 }\} \subset \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$$

は $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の (距離 d に関する) $_{\mathbf{d,e}}\underline{\text{開集合}}$ であり，また $_{\mathbf{f}}\underline{\text{連結で〇〇}}$．

さらに

$$\mathrm{O}(2) = \{A \in \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \,|\, {}^tAA = E\} \qquad (E \text{ は 2 次の単位行列})$$

と定めると $\mathrm{O}(2)$ は $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の $_{\mathbf{g}}\underline{\text{有界な閉集合}}$ で，

$$\mathrm{O}_+ = \mathrm{O}(2) \cap \{A \in \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \,|\, \det A > 0\}, \qquad \mathrm{O}_- = \mathrm{O}(2) \cap \{A \in \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \,|\, \det A < 0\}$$

とすると

$$(**) \qquad \mathrm{O}_+ \cap \mathrm{O}_- = \emptyset, \qquad \mathrm{O}_+ \cup \mathrm{O}_- = \mathrm{O}(2), \qquad {}_{\mathbf{h}}\underline{\mathrm{O}_+,\ \mathrm{O}_- \text{ は } \mathrm{O}(2) \text{ の開集合}}$$

となる．さらに次がわかる：

- $_{\mathbf{i}}\underline{\mathrm{O}_+ \text{ は連結}}$ である．
- $S^1 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ に $\boldsymbol{R}^2$ のユークリッド距離から誘導される距離を与えるとき，同相写像 $_{\mathbf{j}}\underline{f\colon S^1 \to \mathrm{O}_+ \text{ が存在する}}$．

裏面に続く

問題 a 成分を用いて $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ と表すとき，$d(A,B)$ を a_{ij}, b_{ij} $(1 \leqq i,j \leqq 2)$ を用いて表しなさい．

問題 b 条件 $(*)$ を満たす全単射 $h\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^4$ を具体的に与え，それが $(*)$ を満たすことを示しなさい．

問題 c “実際” 以下の部分を完全な証明にしなさい．

問題 d 距離空間 (X,d) の部分集合 $U \subset X$ が開集合であることの定義を述べなさい．

問題 e $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$ が $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の開集合であることを示しなさい．

問題 f 下線 **f** の〇〇に “ある” か “ない” を入れ，その事実を示しなさい．

問題 g 下線 **g** の事実を示しなさい．

問題 h 下線 **h** の事実を示しなさい．

問題 i 下線 **i** の事実を示しなさい．

問題 j 同相写像 $f\colon S^1 \to \mathrm{O}_+$ を具体的に与えなさい．

問題 C この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません． [0 点]

おつかれさまでした ♡

集合と位相第一 予備試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：a~h: 5 点；i:10 点

問題 a

$\mathfrak{P}(X) = \{U \mid U \subset X\}$. 言葉で書くなら X の部分集合 全体; “空集合を含む” は不要

問題 b

写像 $f\colon \boldsymbol{N} \to 3\boldsymbol{N}$ を $f(x) = 3x$ $(x \in \boldsymbol{N})$ で定める．
この写像は
(1) 全射である．実際 $y \in 3\boldsymbol{N}$ ならば $y = 3x = f(x)$ となる $x \in \boldsymbol{N}$ が存在する．
(2) 単射である．実際 $f(x) = f(y)$ ならば $3x = 3y$ だから $x = y$ である．
写像を具体的に与えていること，全射・単射であると主張していることが必須

問題 c

$f_1(1) = (1, 1)$　$f_1(2) = (1, 2)$　$f_1(3) = (2, 1)$　$f_1(4) = (1, 3)$　$f_1(5) = (2, 2)$

$f_1(6) = (3, 1)$　$f_1(7) = (1, 4)$　$f_1(8) = (2, 3)$　$f_1(9) = (3, 2)$　$f_1(10) = (4, 1)$

問題 d

$f(x) = \{x\}$
具体的といっても X を具体的にしてしまっては主旨からはずれる．$x \in \mathfrak{P}(X)$ とした答案がいくつか．誤りです

問題 e

$V \subset X$ だから $V \in \mathfrak{P}(X)$
$g\colon X \to \mathfrak{P}(X)$ は全射だから $g(v) \in V$ となる $v \in X$ が存在する．
$v \in X, V \subset X$ だから $v \in V$ か $v \notin V$ のいずれかが成り立つはずである．
$v \in V$ とすると $v \notin g(v) = V$ だから矛盾が生じる．
$v \notin V$ とすると $v \notin g(v) = V$ が成立しないので $v \in V$ となり矛盾．

問題 f

$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$ なので，包含写像 $i\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Q}$ が存在するが，これは単射である．
これを “恒等写像 id” とした方が多かったのですが，“包含写像” といいます．

問題 g

実数 $r, s \in \boldsymbol{R}$ が $r \neq s$ を満たしているとする．とくに $r < s$ として一般性を失わない
すると，有理数の稠密性 より $r < u < s$ をみたす $u \in \boldsymbol{Q}$ が存在する．
$r < u$ だから $u \in f_5(r)$ であるが $u < s$ なので $u \notin f_5(s)$．したがって $f_5(r) \neq f_5(s)$．
$(r + s)/2$ を使った方，これは一般に有理数とは限りません．説明なしに $f_5(r) \not\subset f_5(r)$ とした方，理由の説明には，
ここにあげた “$\boldsymbol{Q}$ の $\boldsymbol{R}$ での稠密性” が必要．

学籍番号	氏　名

集合と位相第一 予備試験 〔解答用紙 2〕

問題 A の解答欄 (つづき)

問題 h

自然数 N に対して

$$a_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{v_j}{10^j}$$

とおくと，数列 $\{a_N\}$ は
(1) 単調非減少である．実際 $a_{N+1} - a_N = v_{N+1}/10^{N+1} \geqq 0$ である．
(2) 上に有界である．実際,

$$a_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{v_j}{10^j} \leqq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{10^j} = \frac{1}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^N}}{1 - \frac{1}{10^N}} \leqq \frac{1}{9}.$$

したがって，実数の連続性 から $\{a_N\}$ はある実数に収束する．

f_6 が $\boldsymbol{R}$ への写像を与えている，すなわち定義式の右辺が実数になっていることを示すことを求めている．それを示すまえに $f_6(V) \leqq \frac{1}{9}$ などとするのは，論理的におかしい (値があるかどうかわからないものを比較していることになる)．

ちなみに，これは “2 進小数展開” ではなく “10 進小数展開” で，全射にはならない．

問題 i

f が全射 であるから，各 $y \in Y$ に対して $U_y = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.
したがって 選択公理 より直積 $\prod_{y \in Y} U_y \neq \emptyset$.
そこで，その直積集合の要素 g をとると，集合族 $\{U_y\}$ の添字集合は Y であるから，直積集合の定義より $g\colon Y \to \cup_{y\in Y} U_y$ とみなせる．
さらに,

$$\bigcup_{y\in Y} U_y = \bigcup_{y\in Y} f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}\left(\bigcup_{y\in Y}\{y\}\right) = f^{-1}(Y) = X.$$

なので $g\colon Y \to X$ とみなすことができる．
さらに $y \in Y$ に対して $g(y) \in U_y = f^{-1}(\{y\})$ だから $f \circ g(y) = f\bigl(g(y)\bigr) = y$. すなわち $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. ここで id_Y は単射だから g は単射.
問題文の修正：(誤) $g = \prod_{y\in Y} U_y$ (正) $g \in \prod_{y\in Y} U_y$
“全射だから $U_y \neq \emptyset$”, “選択公理から $\prod_{y\in Y} U_y \neq \emptyset$” の 2 点が明記されていることが正解の必要条件.

学籍番号	氏　名

集合と位相第一 予備試験 〔解答用紙 3〕

問題 B の解答欄 配点：各 5 点

問題 a

$$\sqrt{\sum_{i,j=1,2}(b_{ij}-a_{ij})^2}$$

問題 b

$A=(a_{ij})_{i,j=1,2}$ に対して $h(A)=(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})\in \boldsymbol{R}^4$ と定めると，$h\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}^4$ は全単射．さらに $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ に対して

$$\begin{aligned} d_E\bigl(h(A),h(B)\bigr) &= d_E\bigl((a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}),(b_{11},b_{12},b_{21},b_{22})\bigr)\\ &=\sqrt{\sum_{i,j=1,2}(b_{ij}-a_{ij})^2}=d(A,B). \end{aligned}$$

問題 c

$P_m=(p_{ij}^m)$ と成分を用いて表しておくと，P_m が $P=(p_{ij})$ に収束することから

$$0\leqq|\varphi(P_m)-\varphi(P)|=\underline{|p_{11}^m-p_{11}|\leqq\sqrt{\sum_{i,j=1,2}(p_{ij}^m-p_{ij}^2)}}=d(P_m,P)\to 0\quad(m\to\infty).$$

したがって $\lim_{m\to\infty}\varphi(P_m)=\varphi(P)$.

下線部分必須.

問題 d 点 $p\in X$ と正の実数 ε に対して $B_p(\varepsilon)=\{y\in X\,|\,d(p,y)<\varepsilon\}$ と定める．
このとき $U\subset X$ が開集合である，とは任意の $p\in U$ に対してある正の実数 ε で $B_p(\varepsilon)\subset U$ となるものが存在することである．

ε-近傍の記号として，講義で扱った物とことなるものを使う場合は，記号の説明を入れるべきです．
“ある ε が存在する” と明記していない人は不正解．(すべての ε とした方がいらっしゃいました．)

問題 e

写像 $\delta\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$ を $\delta(A)=\det A$ で定めると，これは A の成分の多項式で与えられるので，連続である．すると

$$\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})=\{A\in\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})\,|\,\det A\neq 0\}=\delta^{-1}(\boldsymbol{R}\setminus\{0\})$$

であるが $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ は開集合なので，その連続写像 δ による逆像は開集合である．

定義にしたがって示そうとした方は，“ε” のとり方をきちんと与えないとなりません．すべての ε にたいして条件をみたすことはないので.

学籍番号	氏　名

集合と位相第一 予備試験 〔解答用紙 4〕

問題 B の解答欄 (つづき)

問題 f

連結でない

問題 e と同じ δ をとると $\delta(\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R}))=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ である．実際 $\delta(\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R}))\subset\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ であるが，任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$\delta\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=t$$

なので $\delta|_{\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})}$ は $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ への全射である．連続写像 δ による像が連結でないので $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$ は連結でない．

問題 g

$A\in\mathrm{O}(2)$ に対して $d(O,A)=\sqrt{{}^tAA}=\sqrt{2}$ なので $\mathrm{O}(2)\subset B_O(2)$ が成り立つ．ただし O は 2 次の零行列である．

さらに ${}^tAA$ の各成分 $\psi_{ij}(A)$ は A の成分の多項式だから，それぞれが連続写像．したがって

$$\mathrm{O}(2)=\psi_{11}^{-1}(\{1\})\cap\psi_{12}^{-1}(\{0\})\cap\psi_{21}^{-1}(\{0\})\cap\psi_{22}^{-1}(\{1\})$$

は閉集合．$\mathrm{O}_+=\delta^{-1}(\{1\})$ ではありません

問題 h

$U_+=\{A\in\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})\ \det A>0\}=\delta^{-1}((0,\infty))$ は開集合なので，$\mathrm{O}_+=\mathrm{O}(2)\cap U_+$ は $\mathrm{O}(2)$ の開集合．O_- も同様.

問題 i

$\mathrm{O}_+=\left\{E(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\middle|\,\theta\in\boldsymbol{R}\right\}$ と表される．$A=E(\theta)$, $B=E(\varphi)$ とすると，$X(t)=E((1-t)\theta+t\varphi)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ は A, B を O_+ の中で結ぶ連続な道なので，O_+ は弧状連結，したがって連結

問題 j

$F\colon\boldsymbol{R}^2\to\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ を $F(x,y)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x\end{pmatrix}$ と定めると F の S^1 への制限は S^1 から O_+ への同相写像である．

学籍番号	氏　名

2011 年 6 月 28 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一 予備試験 〔解答用紙 5〕

この用紙には，問題 C への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 C [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

回答欄

答案で "題意が満たされた" と書かれたものがありました．
実は山田は勉強不足で "題意" の正確な意味を知りません．知っている用例は (1) 題意が満たされた (2) 題意より, の 2 つです．(1) は結論 (2) は仮定を表していて，全く別のものです．結論，仮定といえばよいと思います．意味が不確定な語はなるべく使わないようにしましょう．
もし「題意」という語の意味をご存知の方がいらっしゃいましたら，一次情報とともに教えていただけないでしょうか．ちなみに広辞苑では "題の意味するところ" のようです．この場合の "題" はなにを指しているのでしょうね．

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2010 年度入学の学部生の方は，学籍番号のうち "10_" を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（計算用紙およびこの紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 5 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名