2011 年 7 月 12 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．**持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**．問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 7 月 20 日 (月曜日) 以降**数学事務室 (本館 3 階 332B)** にて返却いたします．そちらで受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は，7 月 26 日までに山田まで電子メイルでお申し出下さい．なお，管理の都合上，上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の下線 **a** ∼ **h** を記した部分について後の問いに答えなさい． [40 点]

実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ が，自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ の$_{\mathbf{a}}$<u>幂集合 $\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$</u> と$_{\mathbf{b}}$<u>対等である</u>，すなわち濃度が等しいということを示したい．この定義から直接$_{\mathbf{c}}$<u>$\boldsymbol{N}$ と整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ は対等</u>であることがわかる．さらに $\boldsymbol{N}$ と $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{Z}$ は対等であることは容易に示すことができる．

集合 X, Y の間に単射 $f\colon X\to Y$ が存在するとき $|X|\leqq|Y|$ と書く．$|X|\leqq|Y|$ かつ $|X|=|Y|$ でないとき $|X|<|Y|$ と書くことにする．一般に $|X|<|\mathfrak{P}(X)|$ である．実際$_{\mathbf{d}}$<u>単射 $f\colon X\to\mathfrak{P}(X)$ が存在する</u>ことはすぐにわかる．したがって $|X|\leqq|\mathfrak{P}(X)|$．全単射 $g\colon X\to\mathfrak{P}(X)$ が存在したとする．このとき $V=\{x\in X\,|\,x\notin g(x)\}$ とすると $g(v)=V$ となる $v\in X$ が存在し矛盾が生じる．

二つの集合の間の全単射を構成することは難しいことが多いが，次は濃度の比較をするのに有用である．

定理 A: 集合 X, Y が $|X|\leqq|Y|$ かつ $|Y|\leqq|X|$ を満たすならば $|X|=|Y|$ である．

これを用いて$_{\mathbf{e}}$<u>$\boldsymbol{N}$ と有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ が対等である</u>ことを示すことができる．

さて，次の事実に定理 A を適用すれば $|\boldsymbol{R}|=|\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})|$ が得られる．

- $|\boldsymbol{R}|\leqq|\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})|$ であること：$\boldsymbol{N}$ と $\boldsymbol{Q}$ は対等だから $|\boldsymbol{R}|\leqq|\mathfrak{P}(\boldsymbol{Q})|$ を示せばよい．$f_1\colon\boldsymbol{R}\to\mathfrak{P}(\boldsymbol{Q})$ を $f_1(r)=\{x\in\boldsymbol{Q}\,|\,r>x\}$ と定めると$_{\mathbf{f}}$<u>f_1 は単射</u>.
- $|\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})|\leqq|\boldsymbol{R}|$ であること：$V\in\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})$ に対して

$$f_2(V)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{v_j}{3^j}\qquad v_j=\begin{cases}1 & (j\in V)\\ 0 & (j\notin V)\end{cases}$$

  とする．定義式の右辺は実数の連続性 (有界な単調非減少数列の収束) により極限が存在するので $f_2\colon\mathfrak{P}(\boldsymbol{N})\to\boldsymbol{R}$ は well-defined である．さらに$_{\mathbf{g}}$<u>f_2 は単射</u>である．

定理 A を用いれば，単射を構成することにより対等であることを示すことができる．さらに，次によれば，全射を構成することに単射が構成できたことになる：

定理 B： 全射 $f\colon X\to Y$ が存在するならば，単射 $g\colon Y\to X$ が存在する．

$_{\mathbf{h}}$<u>このことを示そう</u>．各 $y\in Y$ に対して $U_y=f^{-1}(\{y\})$ とおき，$g\in\displaystyle\prod_{y\in Y}U_y$ とすると $g\colon Y\to X$ かつ $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ (id_Y は Y の恒等写像) となるので g は単射である．

裏面に続く

問題 a 集合 X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ の定義を述べなさい．

問題 b 集合 X と集合 Y が対等である，ということの定義を述べなさい．

問題 c 問題 b の定義から $|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{Z}|$ であることを直接示しなさい．

問題 d 単射 $f\colon X \to \mathfrak{P}(X)$ を具体的に一つ与えなさい．

問題 e 下線 e 以前の問題文に書かれたことは既知として，$\boldsymbol{N}$ と $\boldsymbol{Q}$ が対等であることを示しなさい．

問題 f f_1 が単射であることを示しなさい．

問題 g f_2 が単射であることを示しなさい．

問題 h 下線 **h** をつけた部分以下の証明を完全にしなさい．

集合と位相第一 定期試験 〔問題 2〕

問題 B 次の文中の下線 **a** ∼ **i** を記した部分について後の問いに答えなさい． [40 点]

とくに断りのない限り $\boldsymbol{R}^n$ にはユークリッド距離 d_{E} が与えられているとしておく．

記号 $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ で実数を成分とする 2 次正方行列全体からなる線形空間を表す．$A \in \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ に対して

$$||A|| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^t\!AA)}$$

と定める．ただし ${}^t\!A$ は A の転置行列，$\mathrm{tr}\, X$ は行列 X のトレース (主対角成分の和) を表す．すると $||\cdot||$ は $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の $_{\mathbf{a}}$<u>ノルムを定める</u> から，

$$d(A,B) = ||B - A||$$

と定めると，d は $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の $_{\mathbf{b}}$<u>距離を与える</u>．

写像 $\varphi\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を

$$\varphi\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \ni A = (a_{ij}) \longmapsto a_{11} \in \boldsymbol{R}$$

で定めると φ は連続写像である．$_{\mathbf{c}}$<u>実際</u>，$\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の点列 $\{P_m\}$ が $P = (p_{ij})$ に収束するならば $\varphi(P_m)$ は $\varphi(P) = p_{11}$ に収束する．さらに $\boldsymbol{R}$ への連続写像の和，差や積も連続写像だから，行列の成分の多項式で表される写像は $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ 上の連続写像である．

部分集合

$$\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R}) = \{A \in \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \mid A \text{ は正則 } \} \subset \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$$

は $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の (距離 d に関する) $_{\mathbf{d}}$<u>開集合</u> であり，また $_{\mathbf{e}}$<u>連結で〇〇</u>．

さらに

$$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R}) = \{A \in \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \mid \det A = 1\}$$

と定めると $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ は $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の $_{\mathbf{f}}$<u>閉集合</u> で $_{\mathbf{g}}$<u>コンパクトで〇〇</u>．さらに $_{\mathbf{h}}$<u>$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ は連結で〇〇.</u>

裏面に続く

問題 a $||\cdot||$ が $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ のノルムを与えていることを示しなさい.

問題 b 成分を用いて $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ と表すとき, $d(A,B)$ を a_{ij}, b_{ij} $(1 \leqq i,j \leqq 2)$ を用いて表しなさい.

問題 c “実際” 以下の部分を完全な証明にしなさい.

問題 d $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$ が $\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})$ の開集合であることを示しなさい.

問題 e 下線 **e** の〇〇に “ある” か “ない” を入れ, その事実を示しなさい.

問題 f 下線 **f** の事実を示しなさい.

問題 g 下線 **g** の〇〇に “ある” か “ない” を入れ, その事実を示しなさい.

問題 h 下線 **h** 〇〇にあてはまるのは “ある” か “ない” か. 答えのみを記しなさい.

問題 C 何か言い残すことがありましたらお書きください. [0 点]

おつかれさまでした ♡

集合と位相第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：各 5 点

問題 a

$\mathfrak{P}(X) = \{U \mid U \subset X\}$.

問題 b

全単射 $f\colon X \to Y$ が存在すること．「両方の方向に単射が存在」は対等の定義とはしない

問題 c

写像 $f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N}$ と $g\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x>0) \\ -2x+1 & (x \leqq 0) \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & (x \text{ は偶数}) \\ \frac{-(x-1)}{2} & (x \text{ は奇数}) \end{cases}$$

とする．すると，
(1) $g \circ f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ は恒等写像である．実際，$x>0$ のとき，$2x$ は偶数だから $g \circ f(x) = g(2x) = x$. また $x \leqq 0$ のとき $-2x+1$ は奇数だから $g \circ f(x) = g(-2x+1) = x$. したがって $g \circ f = \mathrm{id}_{\boldsymbol{Z}}$.
(2) $f \circ g\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ は恒等写像である．実際，x が偶数のとき $x = 2y$ (y は正の整数) と書けるから，$f \circ g(x) = f(g(2y)) = f(y) = 2y = x$. 一方 x が奇数のとき $x = 2y-1$ (y は正の整数) と書けるから，$f \circ g(x) = f(g(2y+1)) = f(-y) = 2y+1 = x$. したがって $f \circ g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{N}}$.
以上より $g = f^{-1}$ となるので，f は全単射である．

問題 d

$f(x) = \{x\}$

問題 e

$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$ だから包含写像 $i\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Q}$ (単射) が存在するので $|\boldsymbol{N}| \leqq |\boldsymbol{Q}|$.
一方，

$$f\colon \boldsymbol{Q} \ni x \longmapsto (m,n) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z} \qquad \left(\text{ただし } x = \frac{n}{m} \text{ は既約分数}\right)$$

とすると f は単射である．したがって $|\boldsymbol{Q}| \leqq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}| = |\boldsymbol{N}|$.
以上と定理 A より $|\boldsymbol{Q}| = |\boldsymbol{N}|$.

問題 f

実数 $r, s \in \boldsymbol{R}$ が $r \neq s$ を満たしているとする．とくに $r < s$ として一般性を失わない
すると，<u>有理数の稠密性</u> より $r < u < s$ をみたす $u \in \boldsymbol{Q}$ が存在する．
$s > u$ だから $u \in f_1(r)$ であるが $r > u$ なので $u \notin f_1(r)$. したがって $f_1(r) \neq f_1(s)$.

学籍番号	氏　名

集合と位相第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 A の解答欄 (つづき)

問題 g

$V, W \subset \boldsymbol{N}$ に対して

$$v_j = \begin{cases} 1 & (j \in V) \\ 0 & (j \notin V) \end{cases} \qquad w_j = \begin{cases} 1 & (j \in W) \\ 0 & (j \notin W) \end{cases}$$

とする．いま $f_2(V) = f_2(W)$ とすると，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j}{3^j} = 0 \qquad (s_j = v_j - w_j \in \{-1, 0, 1\}, j = 1, 2, \dots)$$

である．このとき $s_1 = s_2 = s_3 = \dots 0$ であることを示せば数列 $\{v_j\}$ と $\{w_j\}$ が一致し，定義から $V = W$ であることがわかる．
いま，

$$v_1 - w_1 = s_1 = -3 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{s_j}{3^j} = -\sum_{j=1}^{\infty} s_{j+1} 3^j$$

であるが，$|s_j| \leqq 1$ だから

$$|v_1 - w_1| = |s_1| \leqq \frac{1}{2}$$

なので $s_1 = 0$ がわかる．以下，帰納的に $s_j = 0$ $(j = 1, 2, \dots)$ である．

問題 h

f が全射 であるから，各 $y \in Y$ に対して $U_y = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.
したがって 選択公理 より直積 $\prod_{y \in Y} U_y \neq \emptyset$.
そこで，その直積集合の要素 g をとると，集合族 $\{U_y\}$ の添字集合は Y であるから，直積集合の定義より $g\colon Y \to \cup_{y\in Y} U_y$ とみなせる．
さらに，

$$\bigcup_{y \in Y} U_y = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}\left(\bigcup_{y \in Y} \{y\}\right) = f^{-1}(Y) = X.$$

なので $g\colon Y \to X$ とみなすことができる．
さらに $y \in Y$ に対して $g(y) \in U_y = f^{-1}(\{y\})$ だから $f \circ g(y) = f\bigl(g(y)\bigr) = y$. すなわち $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. ここで id_Y は単射だから g は単射.

学籍番号	氏　名

集合と位相第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 B の解答欄 配点：各 5 点

問題 a

$A=(a_{ij})$ とすると $\|A\|=\sqrt{\sum_{i,j=1,2}a_{ij}^2}=\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2+a_{21}^2+a_{22}^2}$. これから (1) $\|A\|\geqq 0$ かつ等号は $A=O$ に限ることが従う.

(2) $A=(a_{ij})$ と $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$\|\lambda A\|=\sqrt{\sum_{i,j=1,2}(\lambda^2a_{ij}^2)}=\sqrt{\lambda^2\sum_{i,j=1,2}a_{ij}^2}=|\lambda|\,\|A\|.$$

(3) $A=(a_{ij})$ と $B=(b_{ij})$ に対して

$$(\|A\|+\|B\|)^2-\|A+B\|^2=2\left(\sqrt{\sum_{i,j=1,2}a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i,j=1,2}b_{ij}^2}-\sum_{i,j=1,2}a_{ij}b_{ij}\right)\geqq 0.$$

ただし，最後の不等号は Schwartz の不等式を用いた.

問題 b

$d(A,B)=\sqrt{\sum_{i,j=1,2}(b_{ij}-a_{ij})^2}$.

問題 c

$P_m=(p^m_{ij})$ と成分を用いて表しておくと，P_m が $P=(p_{ij})$ に収束することから

$$0\leqq|\varphi(P_m)-\varphi(P)|=|p^m_{11}-p_{11}|\leqq\sqrt{\sum_{i,j=1,2}(p^m_{ij}-p^2_{ij})}=d(P_m,P)\to 0\quad(m\to\infty).$$

したがって $\lim_{m\to\infty}\varphi(P_m)=\varphi(P)$.

問題 d

写像 $\delta\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$ を $\delta(A)=\det A$ で定めると，これは A の成分の多項式で与えられるので，連続である．すると

$$\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})=\{A\in\mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R})\mid\det A\neq 0\}=\delta^{-1}(\boldsymbol{R}\setminus\{0\})$$

であるが $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ は開集合なので，その連続写像 δ による逆像は開集合である.

学籍番号	氏　名

集合と位相第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 B の解答欄 (つづき)

問題 e

連結でない

問題 e と同じ δ をとると $\delta(\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})) = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ である．実際 $\delta(\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})) \subset \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ であるが，任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$\delta\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = t$$

なので $\delta|_{\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})}$ は $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ への全射である．連続写像 δ による像が連結でないので $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$ は連結でない．

問題 f

$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R}) = \delta^{-1}(\{1\})$ である．ただし δ は問題 d で用いた行列値をとる関数である．$\delta\colon \mathrm{M}_{2,2}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ は連続で，$\{1\}\subset\boldsymbol{R}$ は閉集合なので，$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ は閉集合である．

問題 g

コンパクトでない

実際，任意の 0 でない実数 t に対して $A_t := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ とすると，

$$d(O, A_t) = ||A_t|| = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} \geqq |t|.$$

t は任意だから $\{A_t \,|\, t\in\boldsymbol{R}\} \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ は有界でない．したがって $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ は有界でないのでコンパクトではない．

問題 h

連結である

学籍番号	氏　名

2011 年 7 月 12 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

集合と位相第一 定期試験 〔解答用紙 5〕

この用紙には，問題 C への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 C [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2010 年度入学の学部生の方は，学籍番号のうち "10_" を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 5 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の**一番後ろ**から前，**最前列**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号	氏　名