2012 年 4 月 12 日 (2012 年 4 月 19 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 1

お知らせ

- 最初の時間ですので，別紙の講義概要を読んでおいてください.
- 名簿整理の都合上，今回は提出物を**必ず**出してください.

1 複素数と平面

■複素数 高等学校で学んだ複素数 (complex numbers) について，いくつかの記号と用語を追加しておく．

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数; real numbers) に対して

$$\bar{z} = x - iy, \qquad \operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad \operatorname{Im} z = y = \frac{-i}{2}(z - \bar{z})$$

をそれぞれ z の**共役** (conjugate)*1, **実部** (real part), **虚部** (imaginary part) とよぶ．とくに $\operatorname{Im} z = 0$ のとき z は実数である．また $\operatorname{Re} z = 0$ となる複素数を**純虚数** (pure imaginary) ということがある．

さらに $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geqq 0$ である*2ことに注意して，

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で定まる負でない実数 $|z|$ を複素数 z の**絶対値** (absolute value) という．

■複素平面 実数は数直線上の点とみなすことができる．同様に，座標平面上の点 (x, y) に対して複素数 $x + iy$ を対応させることにより，座標平面を複素数全体の集合とみなすことができる．このようにみなした座標平面のことを**複素平面** (complex plane) といい*3，複素平面の横軸を**実軸** (real axis)，縦軸を**虚軸** (imaginary axis) という．複素数 z を複素平面上の点とみなすとき，0（座標原点; origin）と z を結ぶ線分 $0z$ の長さは $|z|$ である．さらに，$z \neq 0$ のとき，線分 $0z$ が実軸上の正の部分となす角 θ のことを z の**偏角** (argument) といい，$\arg z$ で表す（図 1）．複素数 z ($\neq 0$) の偏角は 2π の整数倍の任意性を持っている．たとえば，正の実数の偏角は 0 といえるが 2π，-4π などともいえる．一般に 0 でない複素数 z を，絶対値と偏角を用いて

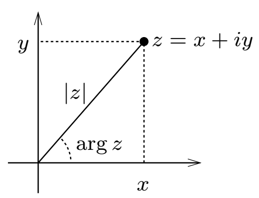

図 1 複素平面

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r = |z|, \theta = \arg z)$$

と表すことができる．とくに

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.1}$$

とおくと，これは絶対値 1 の複素数である．*4 逆に絶対値 1 の複素数は $e^{i\theta}$ の形で表される．この記号を用いると，任意の複素数 z は

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r \geqq 0,\ \theta \text{ は実数})$$

の形に表すことができる．とくに $z \neq 0$ ならば，θ は 2π の整数倍だけの差を除いて一通りに定まる．

このような複素数の表し方を**極表示** (polar form) という．

2012 年 4 月 12 日 (2012 年 4 月 19 日訂正)

*1 「きょうやく」と読む．本当は「共軛」が正しいので「きょうえき」とは読まない．

*2 この不等式は，“実数であって，かつ 0 以上である” という意味を表している．

*3 ガウス平面 (the Gauss plane)，ガウス-アルガン平面 (the Gauss-Argand plane) ともいう．ある時期の高等学校の教科書では，“複素数平面” という用語が使われていたが，あまり一般的ではないように思う．

*4 式 (1.1) は「e の $i\theta$ 乗はこのようになる」という意味ではなく，今日から「$e^{i\theta}$ という記号の意味をこのように定める」という意味である．

■複素数の積の極表示と平面の回転　正弦・余弦の加法定理から

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

が成り立つ．したがって，極表示された複素数 $z = re^{i\alpha}$, $w = se^{i\beta}$ の積は

$$zw = (rs)e^{i(\alpha+\beta)}$$

となる．すなわち，

(1.2)　　二つの複素数の積の絶対値は絶対値の積，積の偏角は偏角の和となる．

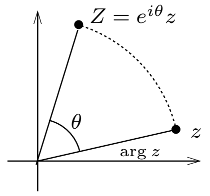

図 2　複素平面上の回転

とくに $|zw| = |z|\,|w|$ である．したがって，

(1.3)　　複素数 z に対して， $e^{i\theta}z$ は，複素平面上の点 z を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点を表す．

とくに点 (x, y) を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点を (X, Y) とすると

$$X + iY = e^{i\theta}(x + iy) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$$

であるから，右辺を計算して実部・虚部をとれば，次のことがわかる（図 2）.

事実 1.1. 座標平面上の点 (x, y) を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点 (X, Y) は

$$(X, Y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \qquad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であたえられる．

■平面ベクトルの内積・外積　複素数 $z = x + iy$ を平面ベクトル (x, y) とみなすとき，二つの複素数 $z = x + iy$, $w = u + iv$ (x, y, u, v は実数) に対して

$$\operatorname{Re}\bar{z}w = xu + yv = z \cdot w = (z \text{ と } w \text{ の内積 (inner product)})$$

を与えている．いま

(1.4)
$$z \times w := \operatorname{Im}(\bar{z}w) = xv - uy$$

とおこう．これを (z, w をベクトルとみなしたときの) 平面ベクトルの**外積** (outer product; exterior product) という．

■代数学の基本定理

定理 1.2 (代数学の基本定理)**.** 複素数を係数とする z の $m(\geqq 1)$ 次多項式 (polynomial)

(1.5)
$$f(z) = a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad (a_j\ (j = 0, \ldots, m) \text{ は複素数で } a_m \neq 0)$$

は複素数の根 (root) を持つ．すなわち $f(z_0) = 0$ となる複素数 z_0 が存在する．

この定理の証明は講義の範囲を超えるが，事実として（主に後期に）用いる．とくに，定理 1.2 の根 z_0 をひとつとると，因数定理により $f(z)$ は $(z - z_0)$ で割り切れ，商は $m - 1$ 次の多項式になる．この商に代数学の基本定理を再び適用すると，これはまた z の 1 次式で割り切れる．これを繰り返すことにより，m 次多項式 (1.5) は

$$f(z) = a_m(z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_{m-1}) \qquad (z_0,\ \ldots,\ z_{m-1} \text{ は複素数})$$

と複素数の範囲で因数分解されることがわかる．

問題

1-1 複素数 z が実数 (純虚数) であるための必要十分条件は $z = \bar{z}$ ($z = -\bar{z}$) が成り立つことであることを確かめなさい．

1-2 複素数 z, w に対して次が成り立つことを確かめなさい：

$$\overline{(z \pm w)} = \bar{z} \pm \bar{w} \quad (\text{複号同順}), \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

ただし最後の等式では $w \neq 0$ とする．

1-3 整数 m と実数 θ に対して

$$\cos m\theta + i \sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m \qquad (\text{de Moivre の公式})$$

を確かめなさい．これを用いて，余弦 (cosine), 正弦 (sine) の 5 倍角の公式を作りなさい．

1-4 複素数 z, w を平面ベクトルとみなし，それらが平行でないとするとき，その外積は $z \times w = \varepsilon S$ となることを確かめなさい．ただし S はベクトル z と w を 2 辺とする平行四辺形の面積,

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & (w \text{ が } z \text{ に対して左側にある}) \\ -1 & (w \text{ が } z \text{ に対して右側にある}). \end{cases}$$

1-5 複素平面上の 4 点を複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 で表すとき，これらの 4 点が一直線上，または同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}$$

が実数となることである．このことを確かめなさい (ヒント：円周角の性質を用いる)．この値を 4 つの複素数の**非調和比**，**複比** (cross ratio) ということがある．

1-6 虚数単位 i の平方根 (2 乗して i になる複素数；square root), 3 乗根 (3 乗して i になる複素数；cubic root) を全て求めなさい．

1-7 式 (1.5) の多項式 $f(z)$ の係数 $a_0, \ldots, a_m$ がすべて実数であるとする．このとき，ζ が $f(z)$ の根であれば，その共役複素数 $\bar{\zeta}$ も根であることを示しなさい．さらに，これを用いて，実数を係数とする多項式はいくつかの 1 次式と 2 次式の積の形に因数分解されることを示しなさい．

1-8 式の変形

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^2(z-1)\left\{\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1\right\}$$

を用いて $2\pi/5$ の余弦，正弦の値を求めなさい．

1-9 複素数 $z = x + iy$ に対して実数を成分とする 2 次正方行列 $\varphi(z)$ を

$$\varphi(z) := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

を対応させる対応の規則 φ を考えると，任意の複素数 z, w に対して

$$\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w), \qquad \varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w), \qquad \varphi\left(\frac{z}{w}\right) = \varphi(z)\varphi(w)^{-1}$$

が成り立つことを確かめなさい．ただし，最後の等式では $w \neq 0$ とする．また，右辺の演算は，行列としての演算である．