2012 年 4 月 19 日 (2012 年 4 月 26 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 2

お知らせ

- 次回は「行列の演算」を扱います．記号の定義や行列の演算の定義は授業でやっても退屈なので，**テキスト 1.1 節から 1.4 節までを予習**しておいてください．目を通してあることを前提に授業を進めます．
- 前回の提出物を出していない方々から「履修できないか」という問い合わせがありました．**未提出を理由で履修拒否をすることはありません**．受講者リストを作る際にこちらの手間が少し増えるだけです．

前回の補足

- 頂いたご質問への回答は講義資料に付けます．質問用紙にもコメントをつけますが，100 枚程あり字が汚くなります．資料で確認して下さい．他人の質問と回答も読むことで，勉強にもなります．
- 「...がよくわかりません」という質問には「そうですか」としか答えようがありません．「ここまでわかって，このように考えて，ここがわからない/これで正しいか」という問いには答えられます．
- 「メリットは何ですか」という問いもしばしば出されますが，人によって「メリット」と思われる性質が違うと思いますので，あなたの全人格と生活歴をお教えいただかないと答えようがないと思います．
- 受付開始時刻についての質問がありましたので: 質問用紙の提出は授業終了後から受け付けます．

前回までの訂正

- 講義 web ページの「おしらせ」の項の日付が「2011 年 4 月 12 日」になっていました．
- 講義資料 1, 4 ページ，問題 1-6: 3 乗根 (2 乗して...) ⇒ (3 乗して...)

授業に関する御意見

- 脱線したと思ったら急にもとに戻ってしかもペースがとてつもなく早くなるのはやめてほしい． **山田のコメント：** そんなに早いですか?
- 難しかった．(2 件) **山田のコメント：** よかった．大学にまで来てやさしいことばかりじゃつまらないものね．
- 以外と難しかった/思っていた以上に難かしかった． **山田のコメント：** 何を期待していた?
- この授業は高校までとは違って，高いレベルで話が進み，初めて「授業についてくのが大変」という感覚を味わえました． **山田のコメント：** その感覚を楽しんでいただければ幸いです．
- 内容は難しかったけど，解説が分かりやすいので理解することができました． **山田のコメント：** それはよかった．でも山田はわかりにくい講義を目指していますので．
- この先難しくなる予感がするけど，とても楽しい授業でした． **山田のコメント：** 続けられるといいけど．
- もっと字を大きく書いていただきたいです． **山田のコメント：** 了解．見難いときは言ってください．ただし，後ろの席の方は，前に移ってからね．
- もう少し字のバランスを考えて黒板に字を書いてほしいです．最初の方は字が大きいのですが，最後の方は小さいです． **山田のコメント：** 疲れると小さくなりますね．気をつけます．
- 声が少し聞きにくかったです．
- 授業内容は非常に分かりやすかったのですが，声をもう少し大きくしていただけると有難いです．
- もう少しマイクの音量を上げてほしいです．
  山田のコメント： 了解．なんとかしましょう．聞こえないときは，できればその場で指摘してください．
- もう少しプリントの内容に触れてほしい． **山田のコメント：** 結構ふれたと思うけれど...
- 僕の笑いのツボと先生の笑いのツボは違うようです． **山田のコメント：** それは残念です．
- もっとユーモアのあるジョークを求む． **山田のコメント：** むり
- おもしろいです/面白かったです/話し方面白かったです/面白くていいと思います． **山田のコメント：** どうも
- 笑顔がまぶしい． **山田のコメント：** ごめんなさい．黒板が見づらくなってませんか?
- 先生の笑顔が眩ゆい! 後方でも聞き取りやすいです． **山田のコメント：** 聞こえにくい人もいるようですね．スピーカの位置の問題でしょうか．
- 授業としては珍しく先生が笑ってた．だんだん字が雑になって見づらくなる... **山田のコメント：** ごめんなさい．
- 面白くて良いと思う．ただまだ良く分からない． **山田のコメント：** そうかもね．
- 軽快とても楽しく受けられました．これからもよろしくお願い致します． **山田のコメント：** こちらこそ
- 適度な笑いがある授業はいい授業であると確信しています． **山田のコメント：** その確信をくずしてあげましょう．
- 他の授業と違って笑いのある授業で面白かったです．初回での感じを続けてください． **山田のコメント：** 結構疲れるんですけど．
- ジョークの頻度が良かったです． **山田のコメント：** そう?
- 余談が面白いです/雑談の所がおもしろいです． **山田のコメント：** それは余談・雑談じゃないかもしれませんよ．
- これからも楽しみです． **山田のコメント：** よろしく
- 復習をがんばろうと思います． **山田のコメント：** そうしてください．
- 数学は受験時から苦手でしたが，頑張ってついていきますのでよろしくお願い致します． **山田のコメント：** こちらこそ
- 高校では複素数はあまりやっていなかったので，気をひきしめて授業をうけていこうと思ってます． **山田のコメント：** 力を入れすぎないのがいいです．

- テストだけ受けるのは恐いので，毎回授業に出たいと思います． **山田のコメント：** どうぞ．お待ちしてます．
- まだ，慣れていません． **山田のコメント：** me, too.
- オイラーの公式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ の意味が少し見えてきた． **山田のコメント：** これだけやけに取りざたされてますよね．
- $e^{i\theta}: = \cos\theta + i\sin\theta$ の理由付けを Taylor でやって欲しい． **山田のコメント：** ってことは知っているのでは？ 理由付けはたくさんあるのに，ひとつを特定する理由はなに？
- 数学単語の横に英語表記があるのがいいと思います． **山田のコメント：** 数学の用語は英語のほうがやさしかったりしますね．
- Mac じゃなくて Windows が良い．謎の板はタイトルを貼るんじゃないんですか？
  山田のコメント： 並列が変です．“Mac OS じゃなくて Windows が良い” では？ ちなみに Mac OS は使っていません．タイトルって何の？ 届かないので貼れませんね．
- $1 = -1$ の証明は説得力がありダマされて閉まったが， 証明の過程の成り立ちそうで成り立たない等号がなぜ成り立たないのかを理解できて楽しかった． **山田のコメント：** よかった
- プリントの見やすさがすばらしい． **山田のコメント：** Thanks
- 毎回の授業でこのような制度を取ってくれるのはありがたいです． **山田のコメント：** 活用してください．
- この紙は成績にどのように関係しますか？ **山田のコメント：** 講義概要をみよ
- まだ意見が見つからなくて困っています．3 点もらえるには何を書けば良いですか？ **山田のコメント：** 試行錯誤．
- どうしてサスペンダーなんですか？ **山田のコメント：** ズボンが落ちないようにする為です．
- いまのところ，特に内容に不満はありませんが，複素数というもの自体がどういったものなのか，というこがあまり良く把握できていません. . .
  山田のコメント： 使っているうちに慣れてくるんだよね．この授業ではそれほど使わないかもしれませんが．
- 大丈夫だ，問題ない．って書こうと思ってたら，先にネタをつかわれて困りました． **山田のコメント：** 大丈夫です．問題ありません（何が?）
- $\therefore$, $\because$ やギリシャ文字の読み方等，細かい所まで授業で扱ってくれる所がとても助かります． **山田のコメント：** 知っているのが当たり前のものなんですけどね．
- 特にありません． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： $x^2 = i$ の階は $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\frac{-1}{\sqrt{2}}(1+i)$, になるけれども $\sqrt{i}$ の値はどちらをとればよいかは定まらないということですが，$\sqrt{i}$ の値は存在し，どちらかになるのですか?

お答え： 何かの約束をすればどちらかに決めることができます．例えば，正の実数でない複素数 z の平方根のうち，虚部が正のものを $\sqrt{z}$ と書く，としてもよいでしょう．しかし，こう定めると $z = e^{i\theta}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ に対して

$$\sqrt{z} = \sqrt{e^{i\theta}} = \begin{cases} e^{i\theta/2} & (0 < \theta < \pi) \\ -e^{i\theta/2} & (-\pi < \theta < 0) \end{cases}$$

となるので $\theta = 0$ のあたりで連続性が崩れます．実はどのように $\sqrt{z}$ を決めてもこのような現象が起きてしまうので，複素数 z の平方根のうちどちらか一つを特別に $\sqrt{z}$ と書くという約束をしないことが多いのです．

質問： $x^2 = i, x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\frac{-1}{\sqrt{2}}(1+i)$ どちらを $\sqrt{i}$ と書くべきか定まらないということでしたが. . . $\sqrt{i}$ って数学的に書いていいのでしょうか．ルート内は絶対値だけと存じてましたが虚数 (単位) も成立するのでしょうか．派生して $|i|$ は i としていいのか，も気になります．

お答え： 前半：前の質問と解答参照．後半：複素数の絶対値は講義資料の最初の方で定義している．それにしたがえば $|i| = 1$．句読点と語句の使い方が変です．「ルート内は絶対値」というのは変．「ルートの中は正の実数」でしょう．「絶対値」という語はそれだけでは意味を持たず．「x の絶対値」というような言い方をするのでは? たとえば「2 は絶対値ですか」という問いは意味を持ちません．「-2 の絶対値は 2 ですか」なら意味がありますね．「虚数も成立する」という文もおかしいです．「成立する」という動詞の目的語はなんですか?

質問： $\sqrt{i}$ に関する $\pm$ の話がわかりません．結果的には $\sqrt{i}$ はどちらなのですか?

お答え： どちらにも決めないのが普通．2 つ上の質問と解答参照．

質問： $x^2 = i$ の解き方がよく分かりませんでした． **お答え：**そうですか．

質問： $x^2 = i$ と黒板にあったのですが，よく分からないのですが，結局 x の解は何ですか?

お答え： 「x の解」という言い方はしません．「方程式 $x^2 = i$ の解」です．

質問： 授業中にあった $\sqrt{-1}$ について，「$\sqrt{-1}$ は -1 の平方根のうち正のものを表すので，$\sqrt{-1} > 0$ となってしまうから虚数単位を $\sqrt{-1}$ と表現するのはあまり適切でない」という説明ではダメでしょうか．

お答え： 「平方根のうち正のもの」がないんですね．この場合は．なので「一つ選ぶ基準がつくりにくい」という意味ですからだいたいおっしゃる通りですが，「平方根のうち正のものを表すので」というのは正の実数の平方根の場合の規約なので，「ので」は違和感があります．

質問： 0 に実数をかければもちろん答えは 0 になりますが，0 に虚数単位 i をかけて 0 になるのでしょうか．i がそもそも数直線上で定義された数ではないので疑問に思いました．

お答え： 高等学校では複素数の積をどのように習いましたか?

質問： 虚数単位は i と書くもので i (山田注：少し書体が違う) と書いたら間違いですか? **お答え：**大丈夫と思います．

質問： 複素平面のグラフに於いて原点の扱いはどのようになるのか．(講義資料では実部と虚部の交点が省略されていたのか?)

お答え： 「実軸と虚軸の交点」のことですね．これが原点．座標が $(0,0)$ なので複素数 $0 + 0i = 0$ に対応します．因みに「複素平面のグラフ」でなく「複素平面」だと思います．この文脈では「グラフ」という語の意味がないのでは?

質問： 複素数において微小な区間を考えることができるのでしょうか? また，複素数には大小関係が存在しませんが，実部，虚部において極限をとるのは可能なのでしょうか?

お答え： 用語「区間」が何を指しているかによります．ここでは「区間」は数直線上のひと続きの部分，という意味でしか使いません．一方，極限は意味があります．平面上の点の列がある点に「近づく」ということは考えられますね．

質問： 長さは距離ですが，斜線部の面積（山田注：図省略，複素平面上の第１象限の点 $z = x + iy$ から実軸に向かって垂線がおりていて，垂線の足，原点，z を頂点とする三角形に斜線が入っている）はなにかありますか？

お答え： なにかある，とはどういうことを期待しているのでしょうか．$\frac{1}{2}xy$ ですね．実は三角形の面積の公式は講義資料のなかに隠れています．（ヒント：平行四辺形の面積の半分）

質問： $\bar{z}$ についてもう一度教えてください． **お答え：** $z = x + iy$ (x, y は実数) のとき $\bar{z} = x - iy$.

質問： 複素素の平面ベクトル（山田注：原文ママ，複素平面?）の外積が良く分からないので詳しくお願いします.

お答え： あなたが「どこまでわかっていてどこからわからなくて，何がわかること期待しているか」がわかりません.

質問： 内積・外積についての説明がよく分かりません． **お答え：** そうですか.

質問： 複素平面を考えるメリットは何ですか.

質問： 複素平面を使うとどんなことができるのか?

お答え： たくさんありすぎてこの紙面がたりない．メリットがあるような使い方をしている人は，使っているうちにわかるはず．すくなくとも，第１回演習問題は見てみるべきでしょうね.

質問： $1 + i$ と $2 + i$ を比べると $(2 + i) - (1 + i) = 1 > 0$ と，$2 + i$ の方が大きいと言えると思うのですが，複素数の範囲では，このような大小関係も考えてはいけないのでしょうか.

お答え： 必要なら考えてもよいと思いますが,「複素数には大小関係がない」というのは,「どんな複素数 z, w をもってきてもそれらの大小が比較できる」ということが成り立たない，ということです.」

質問： 授業では，純虚数に大小関係がないことを証明したが，それが直ちに複素数に大小関係がないことの証明になるわけではないのでは? (複素数の拡張はどうやって?)

お答え： 一つ上の質問と解答参照.「大小関係が定義される」とすると「どんな２つの複素数でも大小が比較できる」ということですので,「$0 < i$ または $0 > i$ のいずれかがなりたたなければならない」が，これは矛盾．したがって「大小関係が定義されない」.

質問： 複素平面で座標として表わせるのに，大小がやはりわからないのはなぜですか?

お答え： 文がおかしいです.「座標として表わせる」の主語がありません．それから「のに」の意味がわかりません.「座標として表せる」ならば「大小があるのは自然」なのに「大小がないのはなぜか」ということでしょうか? たとえば座標平面や座標空間の２点の大小は比較できますか?

質問： 複素数が $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表すことがなぜできるのかがよくわかりません.

お答え： 講義資料 1 の 2 ページ，図 1 で $|z| = r$, $\arg z = \theta$ とすればよい.

質問： $z = re^{i\theta}$ のとき，$\bar{z}$ はどう表されるのですか? **お答え：** $\bar{z} = re^{-i\theta}$．理由を考えよ.

質問： $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$ は合成が出来ないのですが，三角関数と i は相性がわるいのでしょうか?

お答え： そういうわけではないのですが，この場合は合成できませんね．$2\cos\theta + i\sin\theta$ ならどうでしょうね．高等学校で学んだ関数を複素変数にまで拡張してやると，いろいろ面白いこともあるのですが，ここでは等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を,「右辺の短縮形が左辺（熟語みたいなものね)」と思っていただければ十分です.

質問： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とした背景が知りたい.

質問： どうやって $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 見つけたんですか?

お答え： 指数法則の拡張（と授業では言いました．言っただけですが)．実は，実数全体で定義された関数 $f(x) = e^x$ を複素数の範囲まで（良い性質を持って—解析的；この授業では扱わない）拡張する仕方はただひと通りで,

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (z = x + iy) \tag{2.1}$$

しかないことが証明できます（複素関数論の「一致の定理」)．とくに z が純虚数の場合がご質問の式です.
他にもさまざまな説明のしかたがあります.

質問： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ この e は私達が今まで使っていた自然対数の e と同じものなんですか．それとも全く関係ない別の e なんですか.

お答え： 上の回答参照．実数に対する指数関数の拡張という意味で同じ e です．むしろ冪乗の意味が拡張されています.

質問： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の説明が少し強引だった気がします．どのようにして導かれたのですか?

お答え： とりあえず，このように「定義した」と思ってください．(俗語ですが「天下り式定義」といいます.）気持ちに

ついては 2 つ上の質問の解答参照.

質問： オイラーの公式が成り立つことは自明として，今後問題を解いていいのですか?

お答え： ここでは「オイラーの公式」は定義ですので，成り立つというよりはそう定めたのです.

質問： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に何か「〜の式」などの名前はありますか. **お答え：**Euler の式.

質問： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の求め方を教えてください. **お答え：**求めるのではありません．このように定めたのです.

質問： $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ の意味がわからなかった. **お答え：**右辺は和でなくて積です.

質問： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ （山田注：以下 $((\heartsuit))$ で引用する）について，大学に入学する以前に調べたことがあり，その中で得た上方に，「定数関数 $f(x) = e^{ix}(\cos x - i\sin x)$ を使って，等式の変形によって証明できる (出典：Wikipedia)」というものがあったのですが，これは誤りなのでしょうか.

お答え： $(\heartsuit)$ を「証明する」ためには，左辺，右辺の意味がともに明確になっている (定義されている) 必要があります．この講義では，$(\heartsuit)$ を用いて $e^{i\theta}$ の定義しましたので，これは「定義式」であって証明の対象にはなりません．Wikipedia の記述はたぶん e^{ix} を「何か別の方法で定義して」，$(\heartsuit)$ の左辺，右辺の意味が独立に明確になった上で，等式を証明する，という立場と思います．このように，数学では（でも）文脈により用語や記号の定義のしかたが異なる場合がたくさんあります．文脈を読み誤ると大きな間違いをすることがあります．すなわち「空気嫁」

質問： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と定めたことによる利点がまだよく分かりません. **お答え：**左辺の方が短い.

質問： $zw = rse^{i(\theta+\varphi)}$ を導き出したが，これは何を説明したいのかあまり分からなかった.

お答え： 複素数の積の絶対値は絶対値の積，積の偏角は偏角の和.

質問： 講義資料 1, p2 の下から 5 行目のところに $e^{i\theta}$ は「絶対値 1 の複素数である」とあるが，$(e^{i\theta})^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta \neq 1$ となってしまうのがよく分かりません．複素平面上での $e^{i\theta}$ の大きさが 1 という意味で理解すればいいのですか.

お答え： 複素数の「絶対値」の定義をよく見てください．講義資料 1, 2 ページです.

質問： 代数学の基本定理の簡単な証明はどれですか？

お答え： いろいろありますが，複素関数論の Liouville の定理を使うやつが簡単だと思います.

質問：「複素数を係数とする m 次方程式は複素数の根をもつ」とのことですが，m 次方程式以外のもので，複素数の根をもたないような方程式が存在するのでしょうか.

お答え： 式 (2.1) によって複素変数の指数関数を定義すると，$e^z = 0$ は根をもたない.

質問： 代数学の基本定理で複素数の根をもつとはどういうことですか. **お答え：**言葉通りの意味ですが.

質問： 代数学の基本定理が証明出来ない... **お答え：**「この講義の範囲を超える」と明言していますが...

質問： 1 の 5 乗根が 1, $e^{\frac{2}{5}\pi i}$, $e^{\frac{4}{5}\pi i}$, $e^{\frac{6}{5}\pi i}$, $e^{\frac{8}{5}\pi i}$ であることの導出過程は以下でよろしいでしょうか：「複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し $z^5 = 1 \Leftrightarrow (x+iy)^5 = 1$．極座標表示にすると $r^5(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = 1 \Leftrightarrow r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 1$．$r^5 = 1$ より $r = 1$, さらに $\sin 5\theta = 0$, $\cos 5\theta = 1$ より $5\theta = 2n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ $\therefore z = \cos\frac{2n}{5}\pi + i\sin\frac{2n}{5}\pi = e^{\frac{2}{5}n\pi}$．以上より上記の相ことなる５つの解となる.」

お答え： $r = 1$ がでるのはどうしてでしょう.（両辺の（複素数としての）絶対値をとればよいのです.）それから，最初の $(x+iy)^5\dots$ の部分は不要ですね.

質問： 1 の 5 乗根が 1, $e^{\frac{2}{5}\pi i}$, $e^{\frac{4}{5}\pi i}$, $e^{\frac{6}{5}\pi i}$, $e^{\frac{8}{5}\pi i}$ ということの求め方がよく分からなかったです. **お答え：**そうですか.

質問： $z^5 - 1$ の解の残りのものの求め方がよくわかりません. **お答え：**何の残りでしょうか.

質問： $x^5 - 1 = 0$ の書いた 1 の他に $e^{\frac{2}{5}\pi i}$, $e^{\frac{4}{5}\pi i}$, $e^{\frac{6}{5}\pi i}$, $e^{\frac{8}{5}\pi i}$ となるのかよくわかりませんでした．詳しい導出過程を教えてください.

お答え： 講義で説明したものは次のとおり：$x^5 - 1 = 0$ を満たす複素数 x は多くとも 5 つある．実際，$x^5 - 1 = 0$ は 5 つの 1 次式に因数分解されるから，それぞれの根のうち重複しないものを数えると 5 つ以下となる．さて，$x_0 = 1$ とすると ${x_0}^5 = 1$ だから，$x = x_0 = 1$ は根である．また $x_1 = e^{\frac{2}{5}\pi i}$ とすると，指数法則を用いて ${x_1}^5 = (e^{\frac{2}{5}\pi i})^5 = e^{\frac{2}{5}\pi i \cdot 5} = e^{2\pi i} = 1$．したがって $x = x_1 = e^{\frac{2}{5}\pi i}$ も根．同様に $x_k = e^{\frac{2k}{5}\pi i}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ はすべて根である．根は多くとも 5 つであるから，これらが互いに異なれば，この 5 つが根であることがわかる．相異なる 2 つの番号 $k, l = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して

$$x_k - x_l = e^{\frac{2k}{5}\pi i} - e^{\frac{2l}{5}\pi i} = e^{\frac{2k}{5}\pi i}(1 - e^{\frac{2(l-k)}{5}\pi i}).$$

ここで $|e^{\frac{2k}{5}\pi i}| = 1$ だから $e^{\frac{2k}{5}\pi i} \neq 0$．また, $0 < |l - k| \leqq 4$ だから $\mathrm{Im}(1 - e^{\frac{2(l-k)}{5}\pi i}) = -\sin\frac{2(l-k)}{5} \neq 0$ なので $1 - e^{\frac{2(l-k)}{5}\pi i} \neq 0$．したがって，$x_k \neq x_l$.

質問： $z^5 - 1 = 0$ の解 $e^{\frac{2}{5}n\pi}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ の求め方は単純に 5 乗すると $\cos 2n\pi$ になるからですか．それともちゃんと求められますか．

お答え： 解であることは，単純に 5 乗して 1 となることですぐに分かります．これらと 1 ですべての根を表していることは，上のような議論で ok．もし，答えを知らずに，この値を求めるなら次のようにすれば良い：$z^5 = 1$ ならば，両辺の絶対値をとって複素数の絶対値の性質を用いれば $|z|^5 = 1$． ここで $|z| \geqq 0$ だから，$|z| = 1$．したがって $z = e^{i\theta}$ と表すことができる．このとき $z^5 = e^{5i\theta} = 1$ なので，5θ は 2π の整数倍でなければならない．

質問： $x^5 = 1$ の解は $x = e^{\frac{2}{5}mi}$ $(m \in Z)$ としてはいけないのですか．

お答え： Z は整数全体の集合ですね．よいです．ただしたとえば $m = 0$ の場合と $m = 5$ の場合と $m = 10$ の場合は同じものを表していますので，解を一つづつ書いている，ということにはなりませんね．

質問： $z^5 - 1 = 0$ の解として $e^{\frac{12}{5}\pi i}$, $e^{\frac{14}{5}\pi i}$, $e^{\frac{16}{5}\pi i}$, $e^{\frac{18}{5}\pi i}$, 1 と表記するのは解答として OK ですか?

お答え： OK です．あまり普通ではないですが．

質問： 1 の 5 乗根の答えでいきなり 5 コ書き出していたけれど求め方がよくわからなかった． **お答え：**そうですか．

質問： $z^5 - 1 = \ldots$ (略．講義資料 1, 問題 1-8 の変形) ここからどのように $e^{\frac{2}{5}\pi i}$, $e^{\frac{4}{5}\pi i}$, $e^{\frac{6}{5}\pi i}$, $e^{\frac{8}{5}\pi i}$ がでてくるのかいまいちピンとこないので，計算や発想がどのようなものか示していただきたいです．

お答え： 「いまいちピンとこない」ということは「ある程度はわかる」ということなのでしょうか．でしたら，どのへんまでわかっておられるか説明していただけると回答もしやすいです．さて，この変形から $e^{\frac{2}{5}\pi i}\ldots$ を出す，ということは想定していません．これらの根は，いくつか上の質問と回答にみられるように比較的簡単に求まります．ここでは，$z^5 - 1 = 0$ を別の解き方で解いて，そのことを用いて（すでに知っている解 $e^{\frac{2}{5}\pi i}$ と比較して）$\cos\frac{2}{5}\pi$ の具体的な値を求めよう，というものです．

質問： 1 の 5 乗根を求めることにより $\cos\frac{2}{5}\pi$ の値を表すことができるとのことですが，$e^{\frac{2}{5}\pi i} = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi = a + bi$ と表せたとして，実部の比較により $\cos\frac{2}{5}\pi = a$ となるという解釈で合っているでしょうか．

お答え： 合っています．

質問： 1 の 5 乗根が何故あのタイミングで紹介されたのかがよくわからない．“$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ をうまく使うとこんなこともわかる” ということの紹介だと思っていいのだろうか?

お答え： いいのです．

質問： 問題 1-5 が難しくて分からないです．

質問： 問題 1-5 がわからないので解き方の方針を教えてください．

お答え： 複素平面上の相異なる 3 点 P, Q, R を複素数 z_P, z_Q, z_R で表す．線分 PQ と実軸の正の向きの成す角は，複素数の偏角を用いて $\arg(z_Q - z_P)$ と表される．すると，複素数の積と偏角の関係（積の偏角は偏角の和）に注意すると，

$$\angle QPR = \arg(z_Q - z_P) - \arg(z_R - z_P) = \arg\frac{z_Q - z_P}{z_R - z_P}.$$

この関係と，円周角定理の逆，すなわち「同一直線上にない 4 点 P, Q, R, S が $\angle QPR = \angle QSR$ を満たすことである」を用いればよい．

質問： 演習 1-8 がどうとけばよいか分かりません．

質問： 授業の最後におっしゃっていた演習 1-8 の (中略) の解き方が分かりませんでした．k (山田注：$z + \frac{1}{z}$ のこと) を三角関数に置き換えることができるのでしょうか．

お答え： 純粋に “2 次方程式の根の公式” だけです．問題に与えられた式変形から $z^5 - 1$ の 1 でない根は

$$(*) \qquad \left(z + \tfrac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \tfrac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

を満たしている．ここで $w = z + \frac{1}{z}$ とおくと $(*)$ は $w^2 + w - 1 = 0$ と書き換えられる．根の公式を用いれば

$$w = z + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \qquad \text{または} \qquad \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}).$$

したがって，$z^5 - 1 = 0$, $z \neq 1$ を満たす z は，2 つの 2 次方程式

$$z^2 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0, \qquad z^2 - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$$

の根なので，再び根の公式を用いてとけば z が求まる．そのうちどれか一つが $e^{\frac{2}{5}\pi i}$ になるから，それを見極めて，実部を取れば，これが $\cos\frac{2}{5}\pi$ の値にほかならない．

質問： 複素数の複は complex, 数は number からきてるのだと思いますが，素はいったいどこからでてきたのかわかりません．

お答え： "1" と "i" の 2 つからできている数，という意味だと思います．英語の complex number よりも意味が深いような気がしますね．英語になると一文字落ちるのが習慣? 紫禁城 = the forbidden city, 北京*鴨 = Peking duck (* は火へんに考).

質問： 先生の授業における w (ローマ字のダブリュー) と ω (ギリシャ文字のオメガ) の表記の違いを教えてください．

お答え： 黒板を見ていてください．使うときに説明します．

質問： 根と解は等しいのか．

お答え：「等しい」という言葉に違和感を覚えます．「根と解は同じ意味か」ということでしょうか．山田は「x^2+1 の根」「$x^2+1=0$ の解」というふうに使っています．

質問： 複素平面と極座標は同じ考え方ですか．

お答え： 複素平面も極座標も，確固とした数学的対象であって「考え方」という曖昧なものではありません．したがって，質問の意味がよくわかりません．

質問：「線形代数」とはどういう意味ですか? **お答え：**今回か次回に話します．

質問： 授業で説明していないこと（平面ベクトルの内積や外積とか）もテスト範囲ですか?

お答え： はい．分数の足し算も，負の数の掛け算もテスト範囲です．

質問： 資料末の問題のようなものが中間か期末試験で出るのですか?

質問： 演習問題の内容は定期試験に関係ありますか?

お答え： 未定．授業を進めた感触 (この用紙による反応は重要) を見ながら試験問題を考えるので．

質問： 講義資料の内，授業で扱わなかった部分は自習ということですか? **お答え：**はい．

質問： 予習は推奨でしょうか/予習必須ですか? **お答え：**ケースによる．次回は必須．

質問： 数学質問が火曜日に設けられていますが，4 コマ目が物理実験のために利用できない場合があるのですが?

お答え： 数学相談室ですね．他の曜日でご利用ください．

質問： この用紙の評価（3 点満点の基準をおしえてください)．あと私の評価は何点になりますか．できれば 3 点がいいです．

お答え： 前半：自分の頭で考え，手を動かした，という形跡が見え，かつ質問の文章から内容が読みとれるもの．後半：講義内容と関連がないので 0 点です．

質問： 単位を貰う為にどのような質問をすれば良いですか? **お答え：**質問だけでは単位は取れません．講義概要参照．

質問： 何を聞けば 3 点もらえますか? **お答え：**すくなくともこの質問ではもらえない．

質問： web で出せるようにしてほしい． **お答え：**何を?

質問： 今授業した内容は，東工大生の 5 類なら殆どの人が理解できるような易しさなんですか? 正直難しかったので．

お答え： 少し難しいかも，と思います．せっかく大学生になったのだから難しいことをやりましょう．ちなみに，手と頭と時間を使えば東工大生なら殆どの人が理解できるはず．

質問： $\frac{z}{0}$ が許されない話については，授業中時間があればもう少し聞きたいです． **お答え：**はい．

質問： $z+\frac{1}{z}=w$ とおいてその後どのような計算をするのかがよくわかりませんでした．

お答え： この話がでてきた文脈を簡潔に説明しないと質問になりません．

質問： いつもあのような調子で話がそれやすいんですか? **お答え：**そうです．

質問： 授業中に眠くなってしまうのですが，1. 睡眠時間は 1 日何 h 必要だと思いますか? 2. 前日にどうしても寝れなかったら，どうしたらいいですか? 3. その他のコツ．

お答え： いっそのこと授業に出ないというのも手です．

質問： すいません．用紙を持ってくるのを忘れてしまったので，とりあえず A5 の用紙で代わりに用意しました．原則毎回質問・意見を書いて出したほうがよいのでしょうか．

お答え： この紙は A5 ではありません．「すいません」は「すみません」だと思います．この用紙に対しては，質問の内容順に並べ替え，回答をタイプし，また，学籍番号順に並べ替え，得点を記録したあとスキャナにくべて一枚ごとの pdf ファイルを作り，得点の記録と比べて，ファイルに学籍番号からくるファイル名をつける（というシェルスクリプトを走らせる)，という作業をやっています．サイズが違うと，この各々の工程でその紙だけを別扱いしなければなりません．すなわち，気楽な気分で提出された紙は山田の時間を食いつぶしていくわけです．もちろん心証は大変によろしくありません．

2 空間の平面と直線

■座標空間　この講義では，**実数全体の集合** (the set of real numbers) を太字の R を用いて $\mathbb{R}$ と表す[*1]．同様に，複素数全体の集合を (the set of complex numbers) を $\mathbb{C}$ と表す．

対象 x が集合 A の**要素** (element, menber) である，ということを $x \in A$ と書く．また，集合 B のすべての要素が集合 A の要素となっているとき，B は A の**部分集合** (subset) であるといって，$B \subset A$ と書く[*2]．

座標平面は，2つの実数の組全体の集合とみなすことができる．また，**座標空間**は3つの実数の組全体の集合である．これらをそれぞれ $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ と書く[*3]：

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,|\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^3$ の要素を**ベクトル** (vector) とみなすとき，それを太字の小文字で表すことが多い：

$$\boldsymbol{a} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{0} = (0, 0, 0).$$

また，$\mathbb{R}^3$ の要素を**点** (point) とみなすときは，英文字の大文字を使う[*4]：

$$P = (1, 0, 0), \qquad O = (0, 0, 0).$$

■内積　$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の大きさを

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

で表す．零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす**角** (angle) を θ とするとき

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\cos\theta \tag{2.1}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積** (inner product) という．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の少なくとも一方が零ベクトルであるときは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ とする[*5]．とくに $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{2.2}$$

が成り立つ．

2つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ を満たすとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は**直交する** (orthogonal) という[*6]．

2012 年 4 月 19 日 (2012 年 4 月 26 日訂正)

[*1] 本によっては $\boldsymbol{R}$ や $\mathbf{R}$ を用いることもある．

[*2] 高等学校の教科書などでは，このことを $B \subseteq A$ と書くことが多いようだが，このように $B \subset A$ と書く方が多数派のように見える．この記号に従えば $A \subset A$ である．

[*3] 「あーるに」「あーるさん」と読むのが普通.「あーるのにじょう」「あーるのさんじょう」などとは読まない．テキストでは $\mathbb{R}^2$ の要素を，数を縦に並べて角カッコ [ ] で囲んで表している．縦に並べるのが標準的と思われるが，今回は高等学校の教科書の続きで横に並べてみた．行列やベクトルを表すカッコは ( ) (丸カッコ, parentheses) を使う人も [ ] (角カッコ, brackets) を使う人もいる．

[*4] 高等学校の教科書では，大文字立体 (ローマン体) を用いて $\mathrm{P}(1, 0, 0)$ などと書いたかもしれない．

[*5] 高等学校の多くの教科書では，ベクトルの内積をこのように定めているが，この授業の後半（後期の線形代数学第二）では，内積の定義のしかたをより抽象的な形に変更する．テキスト 5 章を参照せよ．また，テキストでは内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ のようにカッコを用いて表している．

[*6] したがって，零ベクトルはすべてのベクトルと直交する．高等学校の教科書の “垂直である” という概念とすこしだけ異なる．

■座標平面や座標空間の図形 次の文の意味を考えよう：

(2.3) 方程式 $x-2y+2=0$ は，座標平面上の，点 $(-2,0)$ を通り，ベクトル $(2,1)$ に平行な直線を表す．

これは，座標平面上の点の集合

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-2y+2=0\}\subset\mathbb{R}^2 \tag{2.4}$$

が，$(-2,0)$ を通り $(2,1)$ に平行な直線となる，ということを意味している．

一般に，x, y の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して「方程式 $f(x,y)=0$ が表す座標平面上の図形」とは，集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=0\}$ のことである．

同様に 3 変数関数 $g(x,y,z)$ に対して，方程式 $g(x,y,z)$ は，座標空間上の図形

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}$$

を表す．

■空間の平面 零ベクトルでない空間のベクトル $\boldsymbol{v}=(a,b,c)\neq\mathbf{0}$ と点 $P=(p,q,r)$ をひとつ固定すると，

(2.5) ベクトル $\boldsymbol{v}$ に垂直で，点 P を通る平面

がただ一つ存在する．この平面を Π と書くと[*7]，点 $X=(x,y,z)$ が平面 Π 上にあるための必要十分条件は

$$PX\perp\boldsymbol{v}\qquad \text{すなわち}\qquad \overrightarrow{PX}\cdot\boldsymbol{v}=0$$

となることである．この第二式を成分を用いて書きなおせば

$$a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0,\qquad \text{すなわち}\qquad ax+by+cz+d=0\qquad (d=-(ap+bq+cr))$$

となる．すなわち

$$\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0\}\qquad (d=-ap-bq-cr)$$

となる．

一般に (x,y,z) の 1 次式 $ax+by+cz+d$ $((a,b,c)\neq(0,0,0))$ に対して

$$\Pi=\{(x,y,z) \mid f(x,y,z)=ax+by+cz+d=0\} \tag{2.6}$$

は $\mathbb{R}^3$ の平面を表す．

実際，$a\neq 0$ とするならば，

$$ax+by+cz+d=a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0$$

と書き換えられる．したがって $ax+by+cz+d=0$ は点 $(-d/a,0,0)$ を通りベクトル (a,b,c) に垂直な平面を表している．仮定から $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ なので，$a=0$ の場合は $b\neq0$, $c\neq0$ のいずれかが成り立つから，同様に議論で $ax+by+cz+d=0$ は平面を表すことがわかる．

平面に垂直な，零ベクトルでないベクトルを平面の**法ベクトル** (normal vector) という．式 (2.6) で表される平面 Π に対して $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$ はその法ベクトルである．さらに，任意の Π の法ベクトルは $\boldsymbol{v}$ の 0 でない実数倍である．

2 つの平面の**なす角**とは，その法ベクトルがなす角のことである，と定める．とくに 2 平面の法ベクトルが平行 (parallel) であるときそれらは平行であるという．

[*7] ギリシア文字の大文字 “pi”．ローマ文字の p に相当するので，ここでは平面 plane の意味で用いた．

■平面のパラメータ表示　例として，方程式 $2x-3y+z=1$ が表す平面 Π を考える：

$$\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x-3y+z=1\} \tag{2.7}$$

点 $(1,1,2)$ がこの平面上にある，すなわち $(1,1,2)\in\Pi$ であることはすぐに確かめられる．それでは，この平面上の点を 10 個あげてみよう．闇雲にやっても良いが，たとえば，新しい変数 (u,v) を導入して

$$x=u,\qquad y=v,\qquad z=-2u+3v+1,\qquad \text{すなわち}\qquad (x,y,z)=(u,v,-2u+3v+1) \tag{2.8}$$

とおくと，この (x,y,z) は自動的に Π 上の点になっている．したがって (u,v) に適当に 10 個の値の組を入れてやれば，平面上の点 10 個が得られたことになる．一方，Π 上の点は (2.8) のように表すことができる．すなわち，集合の等式

$$\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x-3y+z=1\}=\{(u,v,-2u+3v+1)\,|\,u,v\in\mathbb{R}\}$$

が成り立つ．このように，補助的な変数 (u,v) を用いて平面（一般に図形）を表す方法を**助変数表示**, **パラメータ表示**とよび (u,v) を**助変数**，**径数**，**パラメータ** (parameter) という．一般に，ベクトル $\boldsymbol{a}=(p_a,q_a,r_a)$, $\boldsymbol{b}=(p_b,q_b,r_b)$ が互いに平行でないならば[*8],

$$\{u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\,|\,u,v\in\mathbb{R}\}\qquad(\boldsymbol{c}\text{ は定ベクトル})$$

は平面を表す．とくに，この平面は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に平行で $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{c}$ となるような点を通る．

■直線の方程式　空間の平行でない 2 平面の共通部分 (intersection) は直線 (line) である．したがって，例えば[*9]

$$\Lambda=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\begin{cases}2x-3y+z=1\\x-2y+3z=-2\end{cases}\right\}=\Pi_1\cap\Pi_2\qquad\begin{pmatrix}\Pi_1=\{(x,y,z)\,|\,2x-3y+z=1\}\\\Pi_2=\{(x,y,z)\,|\,x-2y+3z=-2\}\end{pmatrix}$$

は 2 つの平面 Π_1, Π_2 の共通部分の直線を表す．

$$\begin{cases}2x-3y+z=1\\x-2y+3z=-2\end{cases} \tag{2.9}$$

は直線の方程式を与えている．この直線 Λ 上の点をたくさん見つけるために (2.9) を変形しよう[*10]：

$$\begin{cases}2x-3y+z=1\\x-2y+3z=-2\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}x-7z=8\\y-5z=5\end{cases}$$

に気がつけば，あたらしい助変数 t を導入して

$$\Lambda=\{(7t+8,5t+5,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

と書きなおすことができる．このような表示を直線の**パラメータ表示**という．平面の場合はパラメータとして 2 つの変数が必要だが，直線は 1 つのパラメータで表示されることに注意しよう．

一般に零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$\{\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{v}\,|\,t\in\mathbb{R}\}\qquad(\boldsymbol{c}\text{ は定ベクトル})$$

は $\boldsymbol{v}$ に平行で $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{c}$ となる点 P を通る直線を表す．

[*8] しばらく後では**一次独立**という言葉を用いる．

[*9] Λ はギリシア文字 λ (ラムダ；lambda) の大文字．直線 (line) の頭文字として用いた．

[*10] "$\Leftrightarrow$" はこの矢印の両側が同値，すなわち右側が成り立つことが左側が成り立つための**必要十分条件**であることを表している．

問題

2-1 内積の定義 (2.1) から成分表示の式 (2.2) を導きなさい（ヒント：余弦定理を用いる).

2-2 $(a,b,c)=(0,0,0)$ のとき $ax+by+cz+d=0$ はどんな図形を表すか.

2-3 2 つの平面 $x+2y-3z=1$，$2x+4y+az=b$ (a,b は実数の定数) の共通部分が直線になるのはどんなときか．そのとき，共通部分の直線をパラメータ表示しなさい．また，直線にならないとき，2 平面の共通部分はどんな図形か.

2-4 3 つの平面 $x+2y-3z=1$, $2x+y+z=0$, $x+y+az=b$ (a, b は実数の定数) の共通部分はどんな図形か.

2-5 2 直線

$$\Lambda_1:\begin{cases}x+2y-3z=1\\2x+y+z=0\end{cases}\qquad \Lambda_2:\begin{cases}7x+5y=a\\bx+z=c\end{cases}\qquad (a,\ b,\ c\ \text{は実数の定数})$$

が 1 点で交わるのはどんなときか．そのときの交点の座標を求めなさい．それ以外の場合は 2 直線はどのような位置関係にあるか.

2-6 座標空間の座標を (x,y,z) と書く．座標空間の点 $O=(0,0,0)$, $A=(1,0,0)$, xy 平面上の第一象限の点 B，z 座標が正であるような点 C を $OABC$ が正四面体になるようにとる.

(1) B, C の座標を求めなさい.

(2) 3 点 O, A, C を含む平面の方程式を求めなさい.

(3) 正四面体 $OABC$ の 2 つの面がなす角を求めなさい.

(4) 正四面体 $OABC$ の 2 つの辺がなす角を求めなさい.

2-7 地球の中心を原点とし，赤道が xy 平面，経度 0 の子午線が xz 平面上の $x \geqq 0$ の半平面に含まれるような座標系 (x,y,z) を取る．地球の半径を R とすると，東経 θ, 北緯 φ の地点の座標は

$$\bigl(R\cos\varphi\cos\theta, R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\bigr)\qquad\Bigl(-\pi<\theta<\pi, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\Bigr)$$

で表される．このことを確かめなさい.

球面 (sphere) 上の 2 点 P, Q を結ぶ球面上の曲線のうち，長さが最短であるようなものは，2 点を通る大円 (great circle; P, Q および中心を通る平面と球面の共通部分) の弧のうち短い方であることが知られている.

いま，点 P を大岡山 (the Great Okayama; 東経 139.7 度，北緯 35.6 度)，点 Q を花の都パリのエッフェル塔 (la tour Eiffel; 東経 2.3 度，北緯 48.8 度) とするとき，P, Q を地球上で結ぶ最短線の長さを求めなさい．ただし，地球の半径は 6,400Km とする．（ヒント：地球の中心を O とするとき，角 POQ を求めればよい．具体的な値を求めるには電卓などを用いる．逆三角関数を用いるときは角度の単位に注意.）

■注：逆三角関数　上の問題の一部では，微分積分で学んだ逆三角関数のうち逆余弦関数を用いるかもしれない：

$$y=\cos^{-1}x \qquad\Longleftrightarrow\qquad x=\cos y,\quad 0\leqq y\leqq\pi.$$

“$\cos^{-1}$” は “arccos” と書くこともある.