2012 年 4 月 26 日 (2012 年 5 月 10 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 3

お知らせ

- 本日は都合により正午すこし前くらいに講義を終了します.
- たくさんの質問をありがとうございます．整理の都合上，質問は 1 回にひとつにしてください．複数の質問に対する評価は，各々の評価のうち最小値とします.

前回の補足

- 「講義」を「講議」と書いている方が複数見受けられました．前者が正しいのです．間違って覚えている方は，今日覚えてください．ちなみに「成續」は「成積」ではありません.
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x-2y+2=0\}\subset\mathbb{R}^2$ の最後の “$\subset\mathbb{R}^2$” は不要ではないか，というご質問を複数いただきました．“$\subset\mathbb{R}^2$” がなくても意味は同じです．ここでは，とくに $\mathbb{R}^2$ の部分集合であることを明示するためにわざと “冗長な式” を書きました.

前回までの訂正

- テキストのサイズを B5 といっていたそうです．A5 の誤りです.
- 講義で扱った 2 平面の交わりの例：

$$\begin{cases} x-2y+z &= 1\\ x+y-z &= 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x+\frac{1}{3}z &= \frac{1}{3}\\ y-\frac{1}{3}z &= -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{は} \quad \begin{cases} x-\frac{1}{3}z &= \frac{1}{3}\\ y-\frac{2}{3}z &= -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{が正しい}$$

ようです．したがって，この方程式が表す直線 Λ のパラメータ表示は次のようになります：

$$\Lambda=\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t,-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t,t\right)\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}.$$

- geȯgraphy のアクセントが違うというご指摘がありました．Thanks
- 講義資料 2，8 ページ 1 行目：次の分 $\Rightarrow$ 次の文

授業に関する御意見

- プリントの字，薄かったですね.
- 前回分の “授業に関する意見” の欄について，文字サイズはいいと思うが薄くて読みにくい.
  山田のコメント： ごめんなさい．トナーが足りなかったのでしょうか．OCW や web ページから pdf で見てください.
- ~~寝坊して講義に遅刻しちゃった!!でも大丈夫だよ★ウフフ♪~~
  講義室が少し寒いのでエアコンをつけてもらえませんか. **山田のコメント：** もう暖かくなってますね．きっと
- やはり後ろの方の席の人は聞こえにくいのではないかと思います．自分はいつも半分より前にいるつもりなので構わないのですが. . . **山田のコメント：** スピーカの位置にもよりそうですね.
- 今回は前回より聞きやすかったです．授業も今のところわかりやすいです. **山田のコメント：** よかった.
- 講義資料を授業前にアップしてもらえませんか？（前日とか. . . ）
- 授業のプリントを早めに OCW にあげてほしい.
  山田のコメント： いま，前日の夕方．ちょっと時間的に無理.
- やっぱり問題の解答を配りましょう.
  山田のコメント： 配らない理由は講義概要に書いてあります.「やっぱり」だけでは行動は変えられません．反論してください.
- 今後の授業で分かるようになるらしいものが多くでてきて分からない状態でモヤモヤしています. **山田のコメント：** そのモヤモヤを保存しておくことが大事です.
- 内積が分度器つきものさしという例えで内積の重要さがわかった. **山田のコメント：** でしょ.
- 授業でやられたと思いました.（チョークは無理数ではない等） **山田のコメント：** もっとやられてください.
- 余談が面白いです. **山田のコメント：** 余談でないかもしれません.
- 文字を大きくしていただいてありがとうございます. **山田のコメント：** どういたしまして．ただ，行列を扱うとどんどん小さくなりそうです.
- 黒板にページをつけてあるのが有難いです. **山田のコメント：** 以前の方のリクエストでした.

- 黒板右上の n 枚目の表記が，中央上段ではナゾの板でかくれてしまうので，右下に書くと常に見えると思います.（６枚中５枚見えているので推測はできますが） **山田のコメント：** ありがとう．やってみましょうか.
- 黒板に赤チョークで書くと見づらい人が居るのではないでしょうか. **山田のコメント：** 気をつけます.
- 受験期にあいまいな理解をしていたパラメータ表示の内容がはっきり理解できました.
- 高校の授業で触れた内容も，この講議（原文ママ：講義のことか？）を聞くとまた新しい見方や発見があっておもしろかった. **山田のコメント：** それはよかった.
- 講議（原文ママ：講義のことか？）（と演習問題）で逆三角関数が出てきたが，全く学んだことがなかったので，もう少し知りたかった.（微積の方で習うものであれば，ごめんなさい，忘れてください.）それ以外は概ね満足です. **山田のコメント：** ここで使うのは「定義」だけです．講義資料に書いてあることだけ知っていれば十分です.
- 先生の授業スタイルは好きです. **山田のコメント：** とくにスタイルがあるわけではありませんが.
- 授業がグダグダしないため飽きない. **山田のコメント：** 山田が飽きてしまいそうですから．グダグダすると.
- おもしろかったです．数学が好きになりました. **山田のコメント：** いままでは?
- 本日の授業はとてもわかりやすくおもしろかったです．来週も素敵な授業を楽しみにしています. **山田のコメント：** それはつらい. . .
- １回目の授業は進度も速く，難しいという印象を受けましたが，今回の授業は前よりも理解しやすかったです. **山田のコメント：** 次はどうでしょう？
- 内容は難しいですが，とてもおもしろい授業で楽しいです. **山田のコメント：** 難しいですか？
- 授業は（話がそれなければ）面白いし，分かりやすい．話も適度に笑いをとったり，皮肉まじったりで楽しいと思う．一方で，質問用紙は，先に「こういう聞く方はこうしか答えようがない」と教えて欲しかった.
  山田のコメント： そのことを体感するのが「演習」．あなたの書いた文を相手が読んでどのように解釈するか，と想像すればすぐにわかることですので，習慣付けてください．それが本当の「コミュ力」っていうやつです.
- 再履ですが，前回履修した時よりも興味深く学べた気がします（笑） **山田のコメント：** それはよかった（苦笑）
- 先生が学生側へ問いかけるときがありますが，それは挙手の要請なのでしょうか？ それとも任意のタイミングで叫んで答えても良いのでしょうか?
  山田のコメント： もちろん叫んでいただいて結構．山田がすぐ反応できるかどうかは（年齢的に）で疑問ですが.
- この紙についてですが，テストが 60 点未満のときだけに $+\alpha$ される，ということでいいのでしょうか．60 点以上のときは $+\alpha$ されないのでしょうか.
  山田のコメント： 試験の結果をみながら調整に使うので，なんとも言えません.
- 出席点というシステムがないのが素晴らしい．あれは無駄に人数を増やします. **山田のコメント：** ですよね．夏は暑くなる．冬はいいかな?
- ズボンのベルトは使わない主義なんですか? **山田のコメント：** べつに主義ではないです.
- サスペンダがずり落ちるのが気になる. **山田のコメント：** 気にしないでください.
- 教授の部屋にあるムンクの「叫び」的なものはなんですか.
  山田のコメント： ムンクの叫びです．Eduald Munch Museum の公認グッズですが Amazon で買えます.「フィヨルドの恋人ムンクさん」だそうです.
- 数学ってオープンソースのソフトウェアに似ている気がします．色んな人が考えたり，それぞれの分野で自由に使ったり.
  山田のコメント： われわれはそういう culture に住んでいるので「アルゴリズムに特許」なんていうのは違和感があるんです.
- 光太郎って名前はすごくいい名前だと思います. **山田のコメント：** you, too
- 特にないです. **山田のコメント：** me, too
- 次回も楽しみです. **山田のコメント：** 来週もみてね ♡

質問と回答

質問： $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$ の $\subset$ の部分を $\in$ にするのは誤りなんですか?

お答え： 誤りです．$a\in A$ は “a は集合 A の要素である a is an element of the set A” の意味で $B\subset A$ は “集合 B は集合 A の部分集合である, a set B is a subset of the set A” の意味です．前者では左辺は “一つの対象” (考えている文脈によって異なるが，この場合は “点”), 後者では左辺は “集合” です．たとえば $2\in\mathbb{R}$ ですが $2\subset\mathbb{R}$ ではありません．$\{2\}\subset\mathbb{R}$ です.

質問： 「$x, y\in\mathbb{R}$」と「$(x,y)\in\mathbb{R}^2$」というのはどういった意味合いの違いがあるのですか.

お答え： x と y を別々の対象と思うか，それらをひとつの組と思いたいか，というニュアンスの違いです.

質問： 空間における内積が 3 点の座標から角を割り出せる便利なものだとは知っていたのですが，どうしてこの形で定義されて「内積」と呼ばれるようになったのでしょうか?

質問： 内積はなぜ「内」という字を使うのですか?

お答え： 「内」は inner product の inner からくるのではありますが. . . . それほど時間をかけて調べてはいませんが inner product という言葉の語源はよくわからないようです．100 年以上は使われている言葉のようですね．手元の Merriam Webster には “First use: circa 1911” とあります.

質問： 零ベクトル $\boldsymbol{a}$ と，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{b}$ の成す角 θ は全ての実数ですか?

お答え： 零ベクトルとのなす角は定義しません.

質問： 内積が分度器付きものさしならば外積は何に例えられるのでしょうか.

お答え： 方位測定器付き面積計?

質問： 垂直と直交の明確な違いは何ですか.

質問： 零ベクトルはすべてのベクトルと直交するとありますが “垂直である” ときとはどのように異なっているのですか?

お答え： 2 つのベクトルの関係に限って述べます：高等学校の教科書では「零ベクトルでない 2 つのベクトルの内積が 0 になるときこれらのベクトルは互いに垂直になる」というように書かれていると思います．この講義では，「2 つのベクトルが直交する，とは内積が 0 になることと**定義する**」としています．高等学校の教科書流に言えば，“垂直” という概念は別に定義されていて（“なす角が直角” ということ), 内積と “垂直” の関係を述べているものです．一方，我々は「内積が 0 になる」ということで「直交する」という言葉を定義しています．たとえば「零ベクトルはすべてのベクトルに直交する」というのは正しいのですが，「零ベクトルはすべてのベクトルに垂直」はおかしいように思えますね.

質問： 零ベクトルとはどんなベクトルも垂直とみなしていいんですよね?

お答え： いいえ，どんなベクトルとも直交するんです.

質問： 空間上の 2 ちょくせんがねじれの位置にあって垂直の場合は「直交」と言うのですか.

お答え： 「垂直」が正しそうですね．方向ベクトル同士は直交する，といいます．

質問： $\mathbb{R}^2\ldots$座標平面，$\mathbb{R}^3\ldots$座標空間でしたが，$\mathbb{R}^4$ は何になるのですか?

質問： $\mathbb{R}$ が直線，$\mathbb{R}^2$ が 平面座標，$\mathbb{R}^3$ 空間座標（原文ママ：座標平面，座標空間のことか）でしたが，$\mathbb{R}^4$ は何になるのですか?

質問： $\mathbb{R}^2$ は座標平面，$\mathbb{R}^3$ は座標空間と思ってよいと授業中におっしゃっていましたが，座標で表せない $\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 4)$ の場合はどのような解釈ができるのですか?

お答え： 4 つの実数の組全体の集合．講義でのべた「次回から図形を忘れろといいます」というのは，このように思って，図形的なイメージに拘泥するな，ということです．

質問： 「今日は図形的に考えて次回以降はそれをやめろ」というのは $\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 4)$ のときの具体的な図形的イメージができないからでしょうか？ $\mathbb{R}$：直線，$\mathbb{R}^2$：平面，$\mathbb{R}^3$：空間，まではすんなりと納得できますが...

お答え： 「図形的イメージがないと理解できない」というわがままを言うんじゃない，ということです．イメージに拘泥して思考を狭めてしまってはいけません．

質問： これから先の授業で $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ だけでなく $\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 50)$ という集合も扱っていくとおっしゃっていましたが，50 個の実数の組み全体の集合を扱うのはどんなテーマのときですか? 想像もつかないです.

お答え： たとえば，線形計画法，たとえば有限要素法．50 次ではないかもしれませんが，いずれも高次元のベクトル空間を対象としています.

質問： 点や直線，平面は方程式で表せますが，直方体や三角錐は方程式ではどのように表記しますか? (有限な立体の表記方法が分かりません)

お答え： たとえば $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z=0, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ は xy 平面上の正方形を表します．このような平面たちの合併集合

$$
\begin{aligned}
&\{(x,y,z) \,|\, z=0, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\} \cup \{(x,y,z) \,|\, z=1, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\} \cup \\
&\{(x,y,z) \,|\, x=0, 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1\} \cup \{(x,y,z) \,|\, x=1, 0 \leqq y \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1\} \cup \\
&\{(x,y,z) \,|\, y=0, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1\} \cup \{(x,y,z) \,|\, y=1, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq z \leqq 1\}
\end{aligned}
$$

は立方体を表しています.

質問： 空間上の平面，平面上の直線が 1 次式で表されるということでしたが，4 変数を使えば立体も一次式で表せますか.

お答え： 「立体」という語で何を指しているかがわかりません．高校生が想像するような立体なら，上の例のように 3 変数でかけますが.

質問： $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x-1 \leqq y \leqq x+1\}$ という集合 (右上図—山田注：図省略) や $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x|+|y| \leqq 1\}$ という集合) (右下図—山田注：図省略) は平面といえるのでしょうか．どちらも直感的にはまっすぐな図形であり，1 次式で表せているといえなくもないと思うのですが.

お答え： 一次方程式の零点集合，とは思えないですね．ところで直線，とは何を指すでしょうか? 直線，半直線，線分の区別をする，という立場であれば，この場合の平面というのは $\mathbb{R}^2$ 全体と思わざるをえませんね.

質問： $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=1\}$ で表現される図形は円柱なのですか? この式では，中が空洞の図形にならないのでしょうか．それとも，中が空洞の図形自体を円柱というのでしょうか.

お答え： ここでは中が空洞なものを “円柱” とよんだつもりです．“circular cylinder” の訳語のつもり．中が詰まったものを “円柱” と呼びたいのであれば “円筒” といって区別すべきかもしれませんね.

質問： $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=1\}$ を座標空間上で考えたとき，z 方向には長さが無限大（有限でない）のにそれを円筒と呼べるのでしょうか? もし円筒でないとしたら何と呼ぶのが適切でしょうか.

お答え： 円柱，もしくは円筒と呼ぶのが普通のようです.

質問： $\Lambda =$(略) は「空間の直線」，$\Pi =$(略) は「空間の平面」と呼ぶとすれば，$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=1\}$ や $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leqq 1\}$ はなんと呼べばよいのか?

お答え： 円柱，中身のつまった円柱.

質問： $x^2+y^2=1$ について，x 軸と y 軸の「1」の長さのとり方が独立でよいとすれば，この方程式が「真円」を表すことは必ずしも自明でない?

お答え： そうですね．これは「平面の計量のとり方」あるいは「座標のとりかた」に関係します．後期に「内積空間」と関連してコメントします.

質問： 三次元直交座標を扱うとき，数学ではどうして右手系を使うのですか? まさか誰かの気まぐれで決まった訳ではないですよね.

お答え： なぜでしょうね. “右ねじの法則” とかだいたいのものは “右” を基本に決められていますいね.

質問： 座標空間において x 軸を親指，y 軸を人指し指，z 軸を中指に対応させて直交させるんでしたよね．講義でよく聞きとれませんでした.

お答え： 文が変ですが，そうです.

質問： 板書 $\boxed{5}$ で（図省略）を書いて，右手系をどう回しても図のようにならないと話していたと思うのですが，（略）というように右手を回せばできるのではないでしょうか.

お答え： 「右手系を」は「右手を」ですね．この図は右手系で，この「x と y を入れ替えたりすると」右手をどう回してもこれに重ならない．重要なところを聴き漏らしています.

質問： パラメータ表示について，このような表示にすることで式の意味としては何が変わるのですか.

お答え： 式の意味，という言葉で何を指しているのかわかりません．このような説明でよいでしょうか：ここではある集合を表示する方法を考えています．ちょっと話がそれますが，$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ という集合を考えましょう．このように集合を表すのに，要素を全部並べて表す方法があります．一方，$X = \{x \,|\, x$ は 6 以下の正の整数 $\}$ というように，要素 (ここでは x で代表させている) が満たす条件を述べる，という表示の仕方があります．無限集合の場合はすべて並べるのが難しいですが，正の偶数の集合を $Y = \{2, 4, 6, \dots\}$ と並べるのが要素を並べる表し方，$Y = \{x \,|\, x$ は正の偶数 $\}$ と表すのが条件による表し方です．前者は次のように表すと正確かもしれません：$Y = \{2t \,|\, t$ は正の整数 $\}$ この表し方は，条件により表示していると見ることもできますが，すべての要素を並べている（すべての要素をつくりだす手続きを与えている）というように取ることもできます．座標平面の直線を $\{(x, y) | x - 2y + 1 = 0\}$ と表すのは，座標平面上の点が満たすべき “条件” を与える表示のしかた，パラメータ表示とは，直線上の点をすべて並べる (直線上のすべて点をつくりだす手続きを与えている) ことによって直線を表示する表示のしかた，と思うことができます.

質問： パラメータ表示の利点が次元を下げるということですが，次元を下げることで何が利点となるのですか.

お答え： 「次元を下げることが利点」なんていいましたっけ.

質問： 直線，平面の定義はどれですか？平面の定義には直線を使い，直線の定義に平面を使うのはありですか？

お答え： ここでは定義していません．なしです.

質問： $ax + by + cz + d = 0$ の d って方線ベクトル（原文ママ：法線ベクトルのことか）と 1 点の内積ってことですか?

お答え： 法線ベクトル (a, b, c) と平面上の点の位置ベクトル (x, y, z) との内積（の符号を変えたもの）です．すなわち，零ベクトルでない定ベクトルとの内積が一定であるような空間の点の軌跡は平面になります.

質問： 平面の直線は x, y の 1 次方程式から具体的な図がイメージできるように，空間での平面も x, y, z の 1 次方程式から図をすぐにイメージできますか? またその方法は?

お答え： “図がイメージできる” とはどの程度のことが分かることを指しているのでしょうか．たとえば，座標平面上の，方程式 $2x - 3y = 1$ で与えられる直線は，“$(2, -3)$ に垂直で $(-1, 1)$ を通る直線” である，というようなことを指しているのでしょうか? そうでしたら，講義資料に平面に関することが書いてありますよね.

質問： $u(1, 0, -1) + v(0, 1, 2) + (0, 0, 1) = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + \boldsymbol{p}$ の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}$ がどこから出てきたのかがわからないので教えてください.

お答え： 出てきたも何も左辺の $(1, 0, -1)$ を $\boldsymbol{a}$ とおいた，. . . というだけ．どうして $(1, 0, -1)$ などがでてきたか，という質問でしょうか?

質問： 直線の方程式の

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ x + y - z &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + \frac{1}{3}z &= \frac{1}{3} \\ y - \frac{1}{3}z &= -\frac{1}{3} \end{cases}$$

の変形の仕方がわかりません.

お答え： 結論に誤りがありました.「前回までの訂正」の項参照．変形の方針は次のとおり：z を定数とみなして，x, y の連立 1 次方程式と思って（中学校で習ったように）解く.

質問： 平面が交わって出来る図形の内，直線以外の図形は点か 2 つの平面が重なるかのどりらかしかないのではないか.

お答え： 共通部分をもたない，っていうのもあります.

質問： 途中に書かれた “$3 - 1 = 2$ (次元)” とか “$3 - 2 = 1$ (次元)” というのは（中略）といったようにここでいう次元はパラメータ表示したときの変数の数ということなのだろうか.

お答え： とりあえずそうです．前期の最後あたりに「ベクトル空間の次元」という概念を定義します．それと関わっています．ここで与えた “引き算” の式は，“次元定理”，あるいは線形写像の “準同型定理” と呼ばれるものの特別な場合です．

質問： 空間内において 2 平面のなす図形（共有点の集合を指す用語がわかりませんでした）は基本的に直線で，特例的に平面や空集合になるとのことでしたが，特例で点にならないのは何故ですか?

お答え： 1 次方程式 2 本で 3 つの座標を指定することはできない，ということ．「連立一次方程式」の項でもう一度考察します．共有点の集合は「共通部分」といいます．

質問： $x^2 = i$ の解が $x = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ なのは分かるのですが，どのように導出したのか分かりません．とっぴょうしもなく感じます．

お答え： そうですか? ちょっと気の高校生なら $x = a + ib$ (a, b は実数) とおけば $x^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$ なので “$x^2 = i$ であるための必要十分条件は $a^2 = b^2$ かつ $ab = \frac{1}{2}$ であること” くらいは導けそうですが.

質問： $\log_e e^{i\theta} = i\theta$ でよいのですか．$\log_e i + \log_e i = \log_e(-1)$? となりますが，$\log_e i$ は定義できますか?

お答え： 複素変数の対数関数ですね．複素数 z を $z = re^{i\theta}$ と極表示するとき，$\log z = \log r + i\theta$ と定義するのが自然でしょう．ただし，右辺の $\log$ は正の実数に対する対数関数，すなわち高等学校で学んだやつです．ところで θ (複素数の偏角) は 2π の整数倍だけの不定性がありますから，$\log z$ の虚部は 2π の整数倍だけの自由度があることになります．そのうちどれか一つを選ぶ，というのは，複素数の平方根のうちどちらを選ぶか，という例と同様に不自然なものなので，$\log z$ の値は “一つに決まらない” とすることもあります．複素関数論では，このような関数を “多価関数” といいます．対数関数の多価性から対数法則が必ずしも成り立たちません．これは積の平方根の公式が複素数に関しては必ずしも成り立たないことに対応しています．

質問： 複素数の大小関係は定義できない，ということに関して，大小関係がないのに，複素平面の図を描くとき，その軸には矢印をつけてもいいのですか？実数軸にはつけてもよさそうな気がしますが，少なくとも虚数軸には矢印をつけることはできない気がします.

お答え： 虚軸は原点を通る直線ですが，原点に対してどちら側に i を目盛るか，ということは指定しなければなりません．そこで i を目盛る側に矢印をつけるのですが，“方向” という感覚なら，複素数 z の虚部 $\operatorname{Im} z$ (これは実数になります) が増える方向，という説明ができます．

質問： arccos の arc って何の略ですか． **お答え：**略ではありません．辞書をひいてごらん．

質問： 問題の注：$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$, $0 \leqq y \leqq \pi$ これはそのうち微積でやるということですか? それとももう知っていなければならないのですか?

お答え： そのうち微積分で扱うはずです．したがって，もう知っていなければならないわけではないですが，問題の注に定義が書いてあるのだから，もう知っているはずです．

質問： 注のところに $\cos^{-1} x$ というのが載っていますが，同じように $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ もあるんですか？もしあるとしたら値はどうなりますか．

お答え： 微積分の教科書をみてごらん．

質問： arccos の定義がよくわかりません．$\cos^{-1}\frac{1}{3} = x$ とすると $\cos x = \frac{1}{3}$ ということですか?

お答え： かつ $0 \leqq x \leqq \pi$．講義資料に書いてある定義のどこがわからないのでしょうか．

質問： 前回は複素数平面（原文ママ：複素平面のことか）今回はベクトル（原文ママ：平面や直線のこと？）次回は行列演算と続くらしいですが，一見すると関連性がなさそうな 3 つの分野ですが，どんな関連性があり，どのように結びつくのでしょうか．

お答え： それがこの授業の目標かもしれません．

質問： 今回やったことはこれからやる行列で使うんですか．

お答え： 使うというよりも一般化します．その際に知っておくべき背景となる常識，と思ってください．

質問： 高校で使わなかった文字（ギリシャ文字）書体（ボールド体）を書くことやその書き分けが難しいです．テスト等で，記号について「この文字，記号はこう書くこと」のような指定はありますか? 過去の学生が「この文字，記号はこの意味だったのに違う意味に読まれた」ということがあったらその例を教えてください．

お答え： 一応，講義とテキストにしたがってください．なお，難しくてもきちんと書いてくださいね．事例は講義中にコメントします．

質問： B の小文字を b (ブロック体) で書く人と (略) (筆記体) で書く人がいますが，どちらを使っている人が多いのでしょうか．

お答え： どうでしょう．山田は b と書くことが多いような気がしますが，混ざってしまいます．ちなみに，印刷では，

変数名は斜体（イタリック）で書きます．したがって “b” でなくて “b” です．特別な関数の名前, cos, sin などは立体（ローマン）です．たとえば “$\cos x$” のように書きます．これを $cos\ x$ や cos x のように書くと，あまり数学をしらない人だな，と思われます．

質問： 高校で内積の計算は $\vec{a}=(p,q)$, $\boldsymbol{b}=(s,t)$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=ps+qt$ と書き，$\vec{a}\cdot\vec{b}=(p,q)(s,t)=ps+qt$ と書いてはいけないと教わりました．何故，上のように成分をそのまま式に書いてはいけないのでしょうか?

お答え： いけない理由はとくにないと思いますが，(p,q) と (s,t) の間に内積の記号 “·” が抜けてます．

質問： 空間内の 3 つのベクトルが互いに平行でないことをいう場合に，「それぞれが一次独立なので」と書いていいのでしょうか.

お答え： まず，3 つ以上のベクトルの一次独立性（前期の最後くらいにやります）は平行性を用いずに定義されます．たとえば $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,2,1)$ はどの 2 つも平行ではないですが，一次独立ではありません（一次従属といいます）．2 つのベクトルが一次独立であることと平行でないことは同値です．ご質問の「それぞれ」がどういう意味かがわかりませんが，「どの 2 つも」という意味であれば，大丈夫です．しかし，「それぞれが一次独立」であることを示すには「平行でない」ことを示す必要があるように思います．したがって，このように言う場面は無いのではないかと思います．

質問： 授業で「$\overrightarrow{PX}{}^{\perp}\boldsymbol{v}$」と書いていましたが,「⊥」を上の方に書くということは，何か特別な意味があるのでしょうか.「$\overrightarrow{PX}\perp\boldsymbol{v}$」というように下に書いてはいけないのでしょうか？

お答え： なんとなく上に書く人もいますが，この記号に関しては意味の違いはとくにないようです．後期に扱う “ベクトル空間 V の直交補空間” は “$V^{\perp}$” と上に書くのが普通ですが.

質問： vector が英語と言われてましたが， vector は独語です．だからヴェクターとは読まないのではないでしょうか. “irrigator” (独) なども “イルリガートル” と読みます．独の数学者 “Georg Cantor” もカントルです.

お答え： まず，vector はドイツ語ではありません．ドイツ語では “der Vektor” ですね．男性名詞ですので男性定冠詞をつけておきます．語源はよくわかりませんので，ドイツ人がこれをどう発音するか知りませんが (ドイツ人数学者とこういうものについて話すときは英語です．ヴェクタといってます；外来語だと発音の規則からはずれる場合もありますし) ドイツ語の標準語らしきもの (北の方のドイツ語) では，この綴字は “フェクトァ” に近い発音になるのではないでしょうか．(der Volkswagen は ヴォルクスワーゲン ではなくフォルクスヴァーゲンに近いですよね)．語尾の “er”, “or” を “巻く” のは，舞台ドイツ語でもないかぎり殆ど聞いたことがありません．山田が寡聞なだけかもしれませんが.

質問： 余弦定理を用いずとも正弦定理によって内積の公式の導入を行えますか．(問 2-1)

お答え： 正弦定理から余弦定理が証明できるはずですから，原理的にはできますね．やってみてごらんなさい.

質問： 今回の問題 2-2 $(a,b,c)=(0,0,0)$ のとき $ax+by+cz+d=0$ (1) はどのような図形を表すかなのですが，条件から (1) は $d=0$ でさえあればどのような実数値 x, y, z について成り立つ．よって (1) は座標空間全体を表す，という解答は間違っているのでしょうか? そもそも重大な勘違いをしていますか?

質問： 問題 2-2 で $(a,b,c)=(0,0,0)$ であれば $ax+by+cz+d=0$ に代入して $d=0$ となり，(x,y,z) は実数全体をとれると考えたのですが，どんな図形を表すかという問いにどのように答えたら良いかわかりません．そもそもこの考え方が間違っているのでしょうか.

お答え： d は問題に与えられた定数ですから，あなたが 0 とおいてはいけません．求める集合は $\{(x,y,z)\,|\,d=0\}$ という集合です．したがって，$d=0$ の場合と $d\neq 0$ の場合に分けて (A) $d=0$ のとき，どんな (x,y,z) でも条件式を満たすから $\{(x,y,z)\,|\,d=0\}=\mathbb{R}^3$. (B) $d\neq 0$，どんな (x,y,z) でも条件式を満たすから $\{(x,y,z)\,|\,d=0\}$ はひとつの要素ももたない，すなわち空集合.

質問： 問題 2-3 で $x+2y-3z=1$, $2x+4y+az=b$ の 2 式から x, y をいそれぞれ z と定数だけで表そうとしたところ x (もしくは y) を消去するとき，同時に y (もしくは x) も消えてしまい，表すことができません．このような場合，上 2 式の平面が交わることはあるのでしょうか．交わる場合，どのような手法で計算すればよいでしょうか.

お答え： たとえば x, z を y で表す，すなわち 2 式を x と z についてといてみたらどうでしょう．このようにいろいろやってみてもどうしてもうまく行かないのは $a=-6$ の場合．とくに $b\neq 2$ なら 2 つの平面は平行，$b=2$ のときは 2 平面は一致する.

質問： 2-4 の (略) の共通部分を求めよという問いで (略：第 1 式と第 2 式の共通部分のパラメータ表示を用いて第 3 式に代入している) というやりかたでできましたが，パラメータ表示をしないでやるやりかたがわかりません.

お答え： しばらく後でやる「連立一次方程式」の一般論がそのことを教えてくれます．この問題に関連しているのだな，ということを 6 月くらいに思い出してください.

質問： 前回の問題 1-7 なのですが，前半の共役複素数も混んであるというのは証明できましたが，後半の部分をうまく証明することができません．どのように書けば正しい証明になりますか? また，問題文中の ζ というマークは何と読みますか?

お答え： ζ はマークではなくギリシア文字の zeta. 証明はこんな具合でしょうか：$f(z)$ の根が全て実数なら，実係数の１次式の積因数分解できるので，実数でない根を持つ場合を考える．$f(z)$ の実数でない根の一つを ζ_1 とすると，$\bar{\zeta}_1$ もまた根である．とくに ζ_1 は実数でないから $\zeta_1 \neq \bar{\zeta}_1$ なので，実数でない根が 2 つ見つかったことになる．これと異なる f の根のうち，実数でないもの ζ_2 があったとすると，$\bar{\zeta}_2$ もまた根である．このようにして，$f(z)$ の実数でない根は偶数個で，2 つずつ互いに共役な複素数からなる．そこで実数でない根すべてを

$$\zeta_1,\ \bar{\zeta}_1,\ \zeta_2,\ \bar{\zeta}_2,\ \ldots \zeta_k,\ \bar{\zeta}_k$$

と書く．$f(z)$ の根は m 個あるから，残りの $m-2k$ 個の根は全て実数である．これらを

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-2k}$$

と書くと，因数定理から

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{m-2k})(z-\zeta_1)(z-\bar{\zeta}_1)\ldots(z-\zeta_k)(z-\bar{\zeta}_k) \\ &= a_m(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{m-2k})\bigl(z^2-(\zeta_1+\bar{\zeta}_1)z+\zeta_1\bar{\zeta}_1\bigr)\ldots\bigl(z^2-(\zeta_k+\bar{\zeta}_k)z+\zeta_k\bar{\zeta}_k\bigr) \\ &= a_m(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{m-2k})\bigl(z^2-2(\operatorname{Re}\zeta_1)z+|\zeta_1|^2\bigr)\ldots\bigl(z^2-2(\operatorname{Re}\zeta_k)z+|\zeta_k|^2\bigr) \end{aligned}$$

$\operatorname{Re}\zeta_l$, $|\zeta_l|^2$ はともに実数だからしたがって，f は実係数の 1 次式と 2 次式の積に因数分解できる．

質問： 「前回の質問に対する解答（原文ママ：回答のこと？)」にさらに質問したり，少し前の授業に対する質問は可能ですか？やっぱり凄くメンドウだし時間がかかるからダメですか？

お答え： 回答への質問など大歓迎．ただ，質問はできればひとつに絞ってください．

質問： 演習問題は自分で解いてわからないところは質問するという形ですか? できれば答えをしりたいです．

お答え： 3 人くらい集まれば正しい答えに収束するはず．クラスで演習問題解答ブログを作っていたところもありますよ．

質問： 無理数の中には超越数という区分があると聞きました．気になるので超越数の定義を教えてください．

お答え： 有理数を係数とする多項式の根にならない実数．超越数でない実数を代数的数といいます．たとえば $\sqrt{2}$ は有理数ではありませんが x^2-2 の根ですから代数的数であって超越数ではありません．e や π は超越数であることが証明されています．

質問： 空間や平面上の点をベクトルを用いて表すことでき（原文ママ)，そうすることで，色々と便利なことがわかりました．ベクトルで表記するお，という手法はどういうけいい（原文ママ）で生まれたのでしょうか．

お答え： 歴史はあまりよくわかりません．だいたい 19 世紀から 20 世紀の前半くらいにかけていろいろな人々により道が整備されてきたようです．もともとのアイディアの一つはデカルトなんでしょうが.

質問： 平面や直線についての説明があったが，空間には何故ノータッチだったのか？

お答え： 今回は例示ですので，別にノータッチでもよいでしょう．それに $\mathbb{R}^3$ の部分集合としての直線や平面にはさまざまなものがありますが，“空間” といったら $\mathbb{R}^3$ そのものしかないのでは?

質問： 平面を x, y, z で表すよりも，パラメータで表した方が平面をイメージしやすい気がするのですが，x, y, z で表すメリットはありますか?

お答え： あります．

質問： 高校までのベクトルとちがいはありますか? **お答え：**何がですか? (主語がない)

質問： 次元を下げるということをやっていたのですが，逆に次元を上げるのは可能ですか．可能であるなら，次元を下げるのと反対の手続きで次元を上げることは可能ですか．それとも全く別の手続きが必要ですか?

お答え： ご質問の意味が分かりません．

質問： 大岡山の訳を the Great Okayama としたのは何故ですか? **お答え：**アンサイクロペディアに倣いました．

質問： 数学の先生が黒板に番号をつけるのは職業病ですか？ **お答え：**2 年前の学生さんからのリクエストです．

質問： 特にありません．わかりやすかったです． **お答え：**一応，わかりにくい講義を目指しています．

3 行列

■言葉 (§1.1)

- 行列，行，列，$m \times n$ 型行列，(i, j)-成分
- 成分の添字表示

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

- 正方行列，m 次正方行列，対角成分，対角行列.
- 行ベクトル，列ベクトル，m-次行（列）ベクトル

■演算 (§§1.2, 1.3)　どのようなサイズの行列に対して定義されるか/ 数の演算との違いは何か.

- 和，差，零行列 (O), 定数倍またはスカラ倍
- 積，単位行列 $(I,\ I_m)$, クロネッカーのデルタ記号 δ_{ij}
- 可換な行列，非可換な行列.
- 正方行列のべき乗

■転置行列 (§1.4)

- 転置行列 $({}^tA)$
- 転置行列と行列の積 $({}^t(AB) = {}^tB{}^tA)$
- 対称行列，交代行列, 上三角行列，下三角行列

問題

3-1 $m \times k$ 行列 A と $k \times n$ 行列 B に対して ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ であることを証明しなさい.

3-2 正方行列 A に対してその対角成分の総和を A の**跡** または **トレース** といって，$\operatorname{tr} A$ とかく.

- ふたつの n 次正方行列 A, B に対して $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ が成り立つことを証明しなさい.
- 実数を成分とする正方行列 A に対して，$\operatorname{tr}({}^tAA) \geqq 0$ であることを証明しなさい．等号が成り立つのはどんなときか.

3-3 $A^2 - 3A + 2I = O$ を満たす 2 次正方行列を全て求めなさい.

3-4 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して $(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = O$ となるような 2 次正方行列 B をすべて求めなさい.

3-5 任意の n 次正方行列と可換な n 次正方行列を求めなさい.

3-6 テキスト 1 ページから 11 ページの問；17 ページ 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 1.8, 1.9；18 ページ 1.13, 1.18, 1.21.

2012 年 4 月 26 日 (2012 年 5 月 10 日訂正)