2012 年 5 月 10 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一講義資料 4

お知らせ

- 次回からテキスト 2 章を扱います．テキスト §§2.1–2.4 に目を通しておいてください．

前回までの訂正

- 講義資料 3, 5 ページ，11 行目：$ab = 1 \Rightarrow ab = \frac{1}{2}$
- 講義資料 3, 8 ページ，下から 13 行目：${}^tAB = {}^tB{}^tA \Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ (問題 3-1 と同じ)
- 講義資料 3, 8 ページ，問題 3-3: $A^2 - 3A + 2E = O \Rightarrow A^2 - 3A + 2I = O$
- 講義資料 3, 8 ページ，問題 3-4: 行列の ( ) を [ ] に．

授業に関する御意見

■ **特集：解答配布について：** 講義資料の問題の解答を配布しないことについて：4 月 12 日配布の講義概要 3 ページにて配布しない理由を少なくとも 3 点あげています．(4 番目は，解答に自信がない場合の処方を述べたものです)．「解答がほしい」という方は，これらの理由が不当である，あるいは，これらの理由をしのぐ大きな何かの理由がある，という形で論を起こす必要があります．とくに第一の理由に対する反論はいただいておりません．この問題についていただいたご意見と山田のコメントを並記します：

- 講議問題（原文ママ，講義資料の問題のことか．4 月 26 日の講義で注意したが，漢字を間違えないこと）の解答がないと，友人たちと議論しやすいというメリットはあるが，最後までわからないままという危険性があるので 1∼2 週間後に解答を公開するのがベストだと思います．検討してください．

  山田のコメント： 現状では，分からなかった人が質問用紙に書くと解答が公開される，ということになっています．これでは不満でしょうか．質問するという手間を省きたいのでしょうか．
- 解答は配るべき．これは良識の問題．

  山田のコメント： 山田が解答を配布しない理由は講義概要にあげてあります．第 1 の理由は，せっかくの楽しい体験をふいにしたくない，という山田の良識です．たぶん，あなたの良識と山田の良識が違うようですので，「良識の問題」と端的に切ってすてるのではなく，あなたの「良識」が具体的にどういうものかを公開して議論すべきではないでしょうか．
- 問題を解いても答えが無いと，自分の間違いに気づけず，全くわからない問題は，質問に行くことになり， 勉強効率が悪いので，解答をネットに挙げて下さい．それでもわからない場合は質問するのが良いと思います．

  山田のコメント： あなたの事情を述べていますが，講義概要に挙げたこちらの理由に対しての反論にはなっていないようです．間違いに気がつくために複数の人々で寄り集まるのがよいと思います（ということを講義概要に書いたはず)．
- 解答は一通りではない，とのことですが，ここでいう解答とは正解にいたるまでの過程でしょうか．もしそうであるならば，解説でなく，答えそのものを配るべきです．自主学習中，自分の答えが間違っているなら考え直すことができますし，配らないことで自分の答えが間違っているのにそれを正解だと思い込んでしまう可能性もあります．

  山田のコメント： 自主学習，という場合に「複数の人」というものが含まれていますか？複数人での議論と，それによる修正機能に期待します．なお，たいていの問題は，検算をすることができるはずですし，そうすることを求めます．
- 初回の授業で H231 にはほとんどいないから前のポストに提出しろと言っておきながら，議論をしに来てほしい，とは矛盾していると思います．別に議論がしたいわけけはありません．

  山田のコメント： 説明を聞き間違えていませんか．ポストに提出するのは 231 にいないからではありません．部屋にいないので捕まりにくい，とは申し上げましたが．それから「議論をしましょう」であって「議論をしに来て下さい」ではありません．できればこういう場で議論をしましょう．後者であったとしても，講義概要 1 ページ「担当者」の項で指示した手順に従えば問題はないと思うのですが，どこが矛盾していますか?

■ **要望など:**

- 黒板の上にある板が講義を受ける側としても邪魔なので，取り払ってほしいです．
- まん中の黒板の上の謎の板がやっぱり邪魔なので気をつけていただけるとありがたいです．

  山田のコメント： 教務に要望を出したので，近いうちに対応されるはず．そうでなければ教務に無視されたことになる．

- 先週↑の欄に書いた質問に対する答えが読めないです．汚くても構いませんが，せめて解読可能な字での解答をお願いします．
  山田のコメント： 枚数と時間の兼ね合いを考えると丁寧に書くことはできません．ごめんなさい．用紙に書くのは資料作成のための山田用のメモと思って下さい．正式な回答（この場合は「解答」ではないと思います）は講義資料でご覧下さい．
- （字が汚い自分が言えたことではないが）返却された質問用紙の赤字が読めません...もう少しキレイに書いてもらえるか（赤字なしでいいので）自分の質問と回答をプリントから探しやすくしてもらえると助かります（質問の種類や問題番号での分類の見出しがあると嬉しいです）
  山田のコメント： 上のコメント参照．前回まで，実は内部的には見出しは付けているのですが，スペースの関係（なるべく少ない，偶数ページで収めたい）から印刷からはずしています．だいたい内容ごとに分類しているつもりですので，そのつもりで眺めて下さい．ちなみに，質問と回答は「全部読んでいただく」こと期待しています．
- 質問を原文のままプリントするという考え方は悪くないと思いますが，文法のミスなどは質問した人の考えが正しく伝わるのなら正してもらえると嬉しいです．ミスのある文章をわざわざ打つ方が大変だと思います．
  山田のコメント： 原文のままタイプするよう努力しているのは，(1) 間違いを晒すことで，当人に自覚してもらう (2) 運良く間違えなかった人も，人のふりみて我がふり直してもらう，というためです．
- 聞き取りにくい．
- マイクの位置をもう少し上にするといいと思いますよ．
- ファン？の音が途中までうるさくて少し聞きづらかったです．
- 今日はちょっとマイクの声が小さかった？ような気がしました．
  山田のコメント： マイクの位置，了解．ただ，あまり口に近づけると息の音が入って気持ち悪いそうです．ファンの件はもう 1 回様子を見てから検討します．
- やっぱりプリントの字がみにくいです．
  山田のコメント： ごめんなさい．プリンタの「黄色」のトナーが切れていたのですが，関係ありますかね．
- 予習の内容とほぼかぶっていて，ありがたかったんですが，もっと先に進んでほしかったです．
  山田のコメント： 申し訳ありません．今回はこちらの都合でした．
- ある程度授業内容・難易度が均一になるように授業をしてほしい． **山田のコメント：** それは無理．だんだん難しくなります．
- 虚数を「嘘の数」だと思っている人が多いと思うので，それも矯正してください．
  山田のコメント： 最初の時間に述べたように，実数だって「嘘の数」ですよね．
- 時間遡行ができたらどうしますか？ **山田のコメント：** なにして遊ぼうか（面白い回答が思いつかなかった `orz`）

■ **感想:**

- 高校の時は行列は 2×2 でばかり考えていて，ひたすら計算するイメージだったので，a_{ij} のように成分表記して考えるのは新鮮で面白かった． **山田のコメント：** すぐ陳腐に感じられるようになります．
- 行列って不思議です． **山田のコメント：** どこが？
- 毎回質問に対する回答をまとめたプリントを配っていただいており，大変ありがたいです．このプリントを作るのにどのくらいかかるのでしょうか？
  山田のコメント： 1, 2 件はちょっと調べなければならないものがあるので回答案を作るのに 40 分〜1 時間くらい，プリントをタイプするのに 3 時間くらい，合計で 4 時間くらい．5 時間を超えたらやりすぎなので，セーヴしています．
- 内容に関しては，記号の使い方が難しいというか複雑だなあと思いはじめました（$\subset$ と $\in$ とか...）
  山田のコメント： 数式は文章なので記号（単語）の意味をひとつひとつおさえておけば問題ありません．意味がわからない単語で文章を綴ってはいけないのと全く同じです．
- 予習していたので内容がよく理解できた． **山田のコメント：** ですよね．
- まだ虚数の範囲の復習が十分でないのに行列に入ってしまい焦っています．でも進度は丁度良いです．
  山田のコメント： 使いながら覚えるのがよいですね．
- 授業の展開が速いです． **山田のコメント：** 一昨年の学生さんからの意見のフィードバックです．
- 窓を開けて空気を入れ替えることはとても良いことだと思いまいた．集中できます． **山田のコメント：** そうですね．
- 授業が速く終わったので食堂がすいてました．
- 毎回早めに終わらしてくれるとうれしいです．
  山田のコメント： ごめんなさい．次からはだいたい時間通り．
- ${}^tA$ の t が Tenchi の略だという冗談が面白かったです．これからも面白いジョークを期待しています．
  山田のコメント： こんなレヴェルでいいんですか？
- 英語で専門用語を書いていただいてありがたいです． **山田のコメント：** そうですよね．
- 「構議」と書かないように気をつけます! **山田のコメント：** 「気を付けないと書いてしまう」ってのは問題かと思います．
- 行列を書くと紙面を沢山使いますね． **山田のコメント：** そうですよね．
- リンゴ好きですね． **山田のコメント：** ひょっとして見てた？あれは講義の材料．
- いつも笑顔に癒されています． **山田のコメント：** え？そんなに傷ついている？
- おもしろい． **山田のコメント：** そう？
- 面白い授業ありがとうございます． **山田のコメント：** どういたしまして．
- 特にありません．分かりやすかったです． **山田のコメント：** それは困った．

質問と回答

■定義という問題

質問： A が正方行列でない場合 trace A の値は存在しないのですか.

お答え： 定義しないのです. $\mathrm{tr}\, A$ という概念が（どういう経緯か）最初からあって，とくに A が正方行列のときは対角成分の総和であるという事実が示されている，という状況なら “$\mathrm{tr}\, A$ が存在するかしないか” という議論はできますが，もともと “正方行列の対角成分の和をトレースという” としているわけですから，それ以外のものについては何も言っていないのです.

質問： なぜ $m \times n$ 行列と $k \times l$ 行列のかけ算ができないのですか.

お答え： 「できない」のではなく，定義しない．だから，$n \neq k$ の場合，上の組み合わせの掛け算は「しない」のです.

質問： p. 7 1 つ目の質問に関連? しているのですが，実数でない複素数 ζ ($\leftarrow$ zeta) に対して共役複素数 $\bar{\zeta}$ が 1 つしか存在しないということは自明として良いのでしょうか.（自明としてはいけないときの「1 つしか存在しない」ということの示し方も分かりません).

お答え： 共役複素数の定義は何でしたか? 「複素数 $\zeta = \xi + i\eta$ (ξ, η は実数) に対して $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$ で定まる $\bar{\zeta}$ を ζ の共役という」のでしたよね．このように決めてしまったのですからもちろん一つです．数学では「このように定義してしまった」ら，ほかの抜け道によって別のものが現れることはありません.

■トレース

質問： 授業では $\mathrm{tr}({}^tAA) \geqq 0$ ということを習いましたが，$\mathrm{tr}(AA^t) \geqq 0$ も同様に成り立つのでしょうか.

お答え： A^t は ${}^tA$ のことですね．$B = {}^tA$ とすると ${}^tB = {}^t({}^tA) = A$ なので，$A^tA = {}^tBB$ となり，すでに示したことを使って結論が成り立つことがわかります．等号条件も同じ.

■問題

質問： 問 3-1 で，$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $AB = [c_{ij}]$ として，

$$ {}^tB{}^tA = \sum_{l=1}^{k}(b_{jl} \times a_{li}), \qquad AB = \sum_{l=1}^{k}(a_{il} \times b_{lj}), \qquad {}^tAB = [c_{ji}] $$

と書いて止まってしまいました．ここまでの方針は合っていますか?

お答え： これらの等式，とくに最初の 2 つの等式はおかしいです．左辺は行列なのに右辺は “スカラ” に見えます．きちんとスカラの等式にしてみましょう：${}^tA = [\tilde{a}_{ij}]$ とすると $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$, ${}^tB = [\tilde{b}_{ij}]$ とすると $\tilde{b}_{ij} = b_{ji}$.（“とすると” のあとの等式は，行列の等式ではなく，スカラの等式です)．したがって，

$$ ({}^tB{}^tA \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) = \sum_{l=1}^{k} \tilde{b}_{il}\tilde{a}_{lj} = \sum_{l=1}^{k} b_{li}a_{jl} = \sum_{l=1}^{k} a_{jl}b_{li} = (AB \text{ の } (j,i) \text{ 成分}) = ({}^t(AB) \text{ の } (i,j) \text{ 成分}). $$

対応する成分同士が等しいので ${}^tB{}^tA = {}^t(AB)$. たしか ${}^tAA$ のトレースの性質を示すときに同じようなことを黒板に書いたような気がする.

質問： 問題 3-2 の上の方の証明方法が分かりません.

お答え： $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $AB = [c_{ij}]$, $BA = [d_{ij}]$ とおいてみますと，

$$ c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} \qquad \text{なので} \qquad \mathrm{tr}\, AB = \sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}b_{lk} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}b_{lk}. $$

一方，

$$ d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} \qquad \text{なので} \qquad \mathrm{tr}\, BA = \sum_{l=1}^{n} d_{ll} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{lk}a_{kl} = \sum_{k,l=1}^{n} b_{lk}a_{kl}. $$

したがって $\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$. 鍵は (1) 和を取る添字は何を使ってもよいので，導きたい結論に合わせるのがよい (2) (有限個の) 総和記号の順序は交換できる.

質問： 授業プリントの問 3-3 に措いて（山田注：於いて？），2 次正方行列の解 A のうち $A = I, 2I$ を求めるにあたって「$A^2 - 3A + 2I = O \Leftrightarrow (A - I)(A - 2I) = O$ であるから $A = I$ or $2I$」と求めてよいでしょうか．また，解のうち $A = I, 2I$ 以外の解を求める途中で，解 A は $\mathrm{tr}(A) = 3$ かつ $\det(A) = 2$ をみたす」ということがわかったのですが，このあとどのようにして解を出すのかがわかりません．どのように解を導き出せばよいのでしょうか?

お答え： 前半：よくありません．「$(A - I)(A - 2I) = O$ であるから $A = I$, $A = 2I$」という文章が間違っています．行列の積は非自明な零因子を持ちますから，“であるから” といって I, $2I$ と結論付けているのはおかしいです．実際には，あなたがされているように $A = I, 2I$ 以外の解がたくさんあるはずです．前半は次のように書くべき：

$$A = I \qquad \text{または} \qquad A = 2I \qquad \text{ならば} \qquad A^2 - 3A + 2I = (A - 2I)(A - I) = O.$$

したがって I, $2I$ は解である．さらに，後半は（きちんと計算すると） $A = I, 2I$ 以外の行列が与えられた方程式を満たすには $\mathrm{tr}\,A = 3$, $\det A = 2$ であることが**必要十分である**ことがわかります．したがって，これらの性質を満たす行列がすべて解になります．$\mathrm{tr}\,A = 3$ から $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 3-a \end{bmatrix}$ と書けますが，このとき $\det A = a(3 - a) - bc = 2$ なので，例えば $c = 0$ と $c \neq 0$ の場合にわけて

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & \frac{a^2-3a+2}{c} \\ c & 3-a \end{bmatrix} \qquad (a,\, b,\, c \text{ は定数})$$

となります．a, b, c にどんな数を入れてもこれらの行列は与えられた方程式を満たすことを確かめて下さい．これらの行列と先に見つけた I, $2I$ が与えられた方程式の解になります．

先走って対角化を知っている方：I, $2I$ および $P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P$ (P は 2 次の正則行列) が解．

質問： 問題 3-4 で答えが任意になる部分が（たぶん）出てくると思うのですが，これは任意の実数ですか？実数じゃなくても大丈夫な気がしますが.

お答え： 大丈夫です．条件は $AB = BA$ ですから $B = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$ (a, c は任意のスカラ) で ok ですね．スカラとして実数を考えているなら実数，複素数まで考えているなら複素数です．

質問： 問題の 3-5 が考えてもうまく答えがでません．単位行列と零行列以外の n 次正方行列が可換であることを示すための方針を教えて下さい．

お答え： 2 つの順序でかけて成分が等しいための条件を見れば良い．この問題の場合：任意の n 次正方行列に X に対して $XA = AX$ を満たす n 次正方行列 A を求めよ，という問題なので $a = [a_{ij}]$ と書いて，その成分を求めれば良いことになります．こういう問題の定石として（受験では当たり前）簡単な X に対して $AX = XA$ が成り立つにして条件を絞って行くことが考えられます．いま，(n 以下の) 番号 m, k に対して E_{mk} を (m, k) 成分が 1, 他の成分はすべて 0 となるような行列とする（テキスト 19 ページ，問 1.30 の行列単位) と，

$$(AE_{mk} \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) = \begin{cases} a_{im} & (k = j \text{ のとき}) \\ 0 & (k \neq j \text{ のとき}) \end{cases}, \quad (E_{mk}A \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) = \begin{cases} a_{kj} & (m = i \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることがわかる．（実際，$E_{mk} = [\varepsilon_{ij}]$ とおくと $\varepsilon_{mk} = \delta_{mi}\delta_{kj}$ とかけることからわかる．ただし δ_{ij} はクロネッカーの δ 記号である．）これらがすべての (i, j) に対して等しくなければならないのだから，$i \neq m$, $j \neq k$ を満たすすべての i, j に対して

$$a_{mm} = a_{kk}, \qquad a_{ik} = 0, \qquad a_{jm} = 0$$

が成り立たなければならない．さらに，任意の m, k に対して A と E_{mk} が可換でなければならないから，

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}, \qquad a_{ij} = 0 \quad (i \neq j),$$

すなわち $A = \alpha I$ (α はスカラ) という形でなければならない．ここまでで言えたこと：任意の行列 X と可換な行列は αI の形でなければならない．逆に $A = \alpha I$ (α はスカラ) であれば，任意の行列 X と可換である（確かめよ）．したがって，$A = \alpha I$ (α はスカラ) であることがわかる．

【コメント】今回授業で扱った成分による計算と受験数学の常識，それから “E_{mk}” みたいなものに気がつくこと（最初から気がつかないのはあたりまえ，時間をかけた試行錯誤が必要）から自明でないことが示せます．こんな

面白いことを「先に解答をみなければ」なんて思うのは淋しいと思います．皆さんにはそんな淋しいことをさせたくありません！

今回は回答の outline を与えましたが，「どう考えてもうまく答えがでない」のであれば**どのような試行錯誤をしたか**をはっきり書いてください．

■言葉や記号

質問： $\mathrm{tr}({}^t\!AA) \geqq 0$ を示すとき「“=” $\Leftrightarrow A = O$」と書きましたが，これはちゃんとした書き方で，答案などにもこういったように書いてもいいのでしょうか（他 2 名）．

お答え： Informal なら結構です．ただし，必要なときはきちんと言葉で言えるように．「等号が成立するための必要十分条件は A が零行列となることである」“the equality holds if and only if A is the zero matrix.” 試験で，というのを皆さんは気にされますが，意味がわかっているように見えれば ok です．書き下しにしてほしいときは，そのように要求します．ちなみに “$\because$” や “$\therefore$” も略記法で，正式な論文やレポートでは使いません．

質問： 単位行列の書き方は E と I の 2 通りあるようになぜ数学の記号は 1 つの事象を表すのに複数の表し方が存在してしまうのですか． **お答え：**統一する独裁者がいないからです．よかった．

質問： 授業では単位行列を I で表記し，この I は the identity matrix の頭文字のことであるとのことでしたが，高校では単位行列は E で表していました．何故このような違いが生じたのでしょうか．また，数学をする上でこの 2 つを使い分けることはありますか．

お答え： 高等学校の教科書の多数派は E ですが，I と書いた本もありました．したがって「高校では」ではなく「あなたの高校では」ですね．同じ文脈で両者を混用することはありません．

質問： 単位行列 I が the identity matrix を意味するなら，E は何を意味するのでしょうか．

お答え： die Einheitsmatrix.

質問： 行列は平面上に数を並べた組を指しますが，これを拡張して空間上に並べることはありますか? あるとすれば名前はなんと言うのでしょうか．（まさか行列奥ではないですよね）

お答え： なるほど．面白い命名ですね．どこかで使ってみようかな．添字が 3 つある量 $[a_{ijk}]$ みたいなものですよね．3 階のテンソルや 3 次形式などがこのように表されます．さらに添字が 4 個，5 個の量... も考えることができますし，考えることがあります．

質問： クロネッカーの記号を使う意味は?

お答え： あります．$AI = A, IA = A$ の証明をクロネッカーの記号を使わないできちんと書くにはどうしたらよい?

質問： なぜ Kronecker’s delta を使いますか? **お答え：**上の回答参照．

質問： クロネッカーのデルタを単位行列以外で使うことはありますか?

お答え： 問題の 3-5 の解答例ではすこし違った意味で使ってみました．

質問： クロネッカーのデルタ記号は便利ですね．これを使わずにある行列に単位行列をかけても元の行列のままということを示すのは面倒そうです．他にもクロネッカーのデルタのように役に立つ関数はありますか?

お答え： 何の役に立つことを期待するかによります．量子力学などに出てくる Dirac の δ-関数なんかも便利ですね．本質的にはクロネッカーの δ 記号と同じなのですが，そのように見えるでしょうか．

質問： クロネッカーって何をやっていた人ですか．

お答え： いろいろなことをやりましたが，現代の数論につながる仕事が多いようです．

質問： 線形代数に限らず，数学や物理で $\sum$ 記号を使うときに，記号の上下に付く項数・変数の開始番号が省略されることがありますが， そのようなときにどのように解釈すれば良いのかがよく分かりません．

お答え： 文脈で添字の動くべき範囲はわかります．たとえば 3 次の正方行列に関する文脈で $c_{ij} = \sum a_{il}b_{lj}$ とあったら，和は $l = 1$ から 3 までと読めます．実際，左辺に i, j があるので，これらは “決まった値” で動きません．したがって，右辺で動ける添字は l だけ．このような判断ができないときは，和の添字を省略すべきではありません．

質問： $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ というように $a_{ij} = i + j$ と表せる行列があったとします．この行列を略記して $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ $(a_{ij} = i + j)$ というように書くことは可能でしょうか．

お答え： 可能です．このように書いてもいいですね：$A = [i + j]_{1\leqq i,j\leqq 3}$.

質問： 高校で行列といえば ( ) (丸カッコ) でしたが，授業も教科書も主流は [ ] (角カッコ) のようです．学会や世界では [ ] (角カッコ) の方が普通なのでしょうか．

お答え： そんなこともないと思います．他の教科書をいろいろ見てご覧なさい（書店にあります)．線形代数の教科書では丸カッコの方が多いと思います．

質問： 対角成分をこのように (図省略) 定めたのは「このように定めると色々とうまくいく」ということで定められたものだと思いますが，対角成分自体に何か数学的な意味はあるのでしょうか？

お答え： ひとつひとつには大きな意味がない，という文脈が多いと思います．

質問： 1 次変換で $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ による $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の像は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ となりましたが，2 次正方行列を用いるのに何故一次変換というのですか? 3 次元の座標空間で，3 次正方行列を用いた場合も一次変換というのでしょうか.

お答え： x, y の一次式で表されるので 1 次変換です．3 次元の場合も同じです．

質問： 授業中に「いんをふむ」という言葉を使っていましたが，「韻を踏む」という意味ですよね？このようにこの言葉を使うのは線形代数の世界では共通の認識事項ですか？先生のオリジナルですか？

お答え： オリジナルです．あまりほかで使わないほうが良いです.

質問： 数学用語の英語版は覚えるべきでしょうか？

お答え： はい，すくなくとも日本語を常用する人以外と，数学を用いた文脈で意思疎通をするには必須．この大学の卒業生は日本語を常用する人以外と意思疎通をする必要がまったくない仕事に付くことは稀.

質問： 行列という概念はどういう必要性に迫られて生み出されたのですか?

お答え： 本当に「必要性に迫られて生み出された」と言い切れるかどうか微妙．一つは連立 1 次方程式を統一的に扱うためと思われます．Dirac が量子力学を（“無限次の” 行列を用いて) 定式化したとき，すでに行列の概念はあったようですね．それは量子力学を定式化するために考えだされたのでは決してないのですが.

■授業や資料について

質問： 資料についてくる問題は解けないとテストで地獄を見る羽目になりますか? 自分にはレベルが少し高いです．助言お願いします.

お答え： テストがどうなるかは未定．どんなことをするか，を中間試験で明らかにするつもり（と最初の授業でいいましたよね)．レベルが高いのならちょうどよい．レヴェルアップの機会です.

質問： 行列が何行何列なのかを聞いたときに「間違える人が何人かいる」と言っていましたが，そういう基本問題もテストに出るんですか.

お答え： もちろん試験範囲．前回の授業でも述べたように「1 年次の数学では，数学の用語を用いて人とある程度の意思疎通ができる」ことが目標の一部です．したがって「正しく言葉が語れない」と負け.

質問： 何も書くことが思いつかなかったらどうしたらいいですか? **お答え：**思いつくまで時間をかけてください.

質問： とても分かりやすかったので質問はありません. **お答え：**それはうそ.

■読んでくれ・前にやった

質問： 行列 $[-4]$ についてですが $[-4] = -4$ とするということは，行列 $[-4]$ はスカラーであるということになりますか. **お答え：**テキスト 2 ページ.

質問： 私たちが現在学んでいる数学的記号，書き方の形式は，世界中どこでも通じるものでしょうか.

お答え： 講義概要 2 ページ 2 行目.

質問： 零ベクトルと零ベクトルでないベクトルの成す角 θ が定義されないなら，その内積 $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ も定義されないのでは? **お答え：**講義資料 2, 7 ページ下から 5 行目.

質問： 電気回路などでは，複素数を扱って，複素数 z について $\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ で与えられる大きさをすぐ考えてしまうと思います．でも複素数の大小関係は定義できないということは，数学では前述の式は複素数お大きさを示す（山田注：表すのことか）とは認められないのでしょうか.

お答え： この量は複素数の絶対値．講義資料 1, 2 ページ 7 行目で表される $|z|$ のこと．$|z|$ は実数だから，その大小は考えられる．しかし，複素数の大小は，絶対値の大小で比較するものではない.

質問： 前回の問題 2-2 について質問です．$d = 0$, $d \neq 0$ で場合分けをして考えました．$d = 0$ のとき表す図形は実数全体だと思うのですが，$d \neq 0$ のときはどうなりますか．それとも，場合分けの必要はないですか.

お答え： $d = 0$ のときも違います．講義資料 3，6 ページ下から 14 行目.【コメント】講義資料を読んでいることは前提です.

■あとでやる

質問： 1×1 行列をスカラーと見なしていいときとダメなときがもちろんありますよね．どんな場合にスカラーと見なせるのですか．

お答え： 文脈依存．授業の中で（後期，二次形式を扱うときに) 紹介する．

質問： ${}^tA$ という行列を考えるのにどのようなメリットがあるのだろうか．メリットの具体例をいくつか挙げてほしい．

質問： 転置行列はどのようなときに必要になるのですか．

質問： 転置行列はこれから具体的にどのような場面で使われますか．

質問： 転置行列の定義はわかったんですけど，わざわざこの行列を定める数学的理由は何でしょうか．

お答え： 内積に関する議論で用いられる．たとえばテキスト 126 ページにある．これらはたぶん後期で扱います．n 次実正方行列の転置は，数学的には $\mathbb{R}^n$ の標準内積に関する adjoint.

質問： ケイリー・ハミルトンの定理について調べたら (中略) とありました．どのようにしたら上の式が求められるのでしょうか．

質問： 高校で学習したケーリー・ハミルトンの定理は 2 次正方行列でしたが，これは n 次正方行列でも使えたりするんですか．

質問： 高校時代は 2×2 行列に対してケーリー・ハミルトンの式を習いましたが $m \times n$ 行列と一般化した形でじょケーリー・ハミルトンの式はあるのですか?

お答え： テキスト 147 ページ．後期にやります．

質問： 高校では 2×2 行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の逆行列は $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ と習いました．しかし $m \times n$ 行列にもこのように逆行列を求める方法はありますか？また，逆行列が存在しない条件もありますか？

お答え： 「しかし」の使い方が変です．ご質問の内容を今回の講義としばらくあとにやります．テキスト 37 ページ，および 3 章参照.

質問： 高校時代の 2×2 の正方行列では対角化を行い，A^n などを求めることが可能なものが存在しました．では 3×3, 4×4 ... 等の正方行列でも対角化が行えるものは存在ますか．よろしければ対角化が可能となる条件を教えて頂ければと思います.

お答え： テキスト 6.3 節，定理 6.4．後期にやります.

質問： 行列のスペクトル分解などで機械的に A^n が求まることなど行列は不思議です．なぜ機械的に求まるのか教えて下さい.

お答え： 「機械的」という言葉の意味が分かりませんが，ほぼテキスト第 6 章の内容です．後期にやります.

■意味不明

質問： 行ベクトル，列ベクトルとありましたが，行と列の違いは座標の点ではどこまで違いがでるのですか?

お答え： 座標の点，という言葉で何を指しているのか，わかりません．前回申し上げましたように，とりあえず**図形は忘れて**ください．共変ベクトルと反変ベクトルの区別，という説明もつきます（テンソルや相対性理論の本を読むと出てきます）が，この講義の範囲を超えます.

質問： (4 次列ベクトル) $\times$ (4 次行ベクトル) の計算はできないんじゃなかったんですか.

お答え： 4×1 型と 1×4 型だからできると思いますが，なぜ「できないんじゃなかった」と思うんでしょうか.

質問： $m \times n$ 行列は m, n がどちらも任意の整数であるにもかかわらず，行数を表わす m の方が列数を表す n よりも少なく表わされているのは，ローマ字で m の方が n よりも前にあるからですか?

お答え： 「少なく表されている」の意味がわかりません．m と n の大小関係のことを言っているなら，何の制限もありませんよね.

質問： 先生の話によると，日本人は行列を見ると並びたくなるとのことですが，（図省略，3×4 行列の右側に棒人間の人が 3 人並んで ...）左のようになったら何が発生しますかね.

お答え： 授業で言ったのは「東京人」ね．西日本ではそれほど見かけないように思います．ご質問については「左のようになる」がどうなることだかよくわからないので回答しようがありません.

4 行列 (2)

■対称行列・交代行列

- 定義 (テキスト 10 ページ)
- 性質 (11 ページ問 11, 12; 1 章の問題 1.7, 1.8, 1.9, 1.12, 1.13, 1.14, 1.21)

■正則行列

- 定義（正則行列，逆行列）：テキスト 11–12 ページ.
  何が定義で，何が定義から導かれる性質か.
  A^{-1} という記号を使って良いのはなぜか.

- 例 10, 例 11, 問題 1.20, 1.25 など：逆行列を求める公式は必要ない．使う道具は何か.
- 逆行列を求める公式は 70 ページ，定理 3.20．これの 2 次の場合が高等学校で習う公式だが，一般にはこの公式は実用的ではない.
- 逆行列の求め方は 37 ページ.

■行列の分割

- テキスト 13 ページ–
- 16 ページの例 15 は確かめておこう.

問題

4-1 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則である必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であり，そのとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

となることを示しなさい.

4-2 3 次正方行列

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

が正則であるための必要十分条件は

$$aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \neq 0$$

であり，

$$B^{-1} = \frac{1}{aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg}\begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

であることを確かめなさい.

4-3 テキスト 11 ページから 16 ページの問; 17 ページ 1.1, 1.2, 1.10; 18 ページ 1.11, 1.12, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.19. 1.20; 19 ページ 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28. 1.29, 1.30.

2012 年 5 月 10 日